

## PROVA DE MATEMÁTICA DO VESTIBULAR 96/97

## DO INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA (02/12/96)

<b>1<sup>a</sup> Questão:</b>	<b>Valor : 1,0</b>
Resolva o sistema abaixo:	
$\begin{cases} x^a = y^x \\ y = ax \end{cases} \quad \text{onde } a \neq 1 \text{ e } a > 0$	
<b>2<sup>a</sup> Questão:</b>	<b>Valor : 1,0</b>
Determine o termo máximo do desenvolvimento da expressão:	
$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{65}$	
<b>3<sup>a</sup> Questão:</b>	<b>Valor : 1,0</b>
Dados os pontos A e B do plano, determine a equação do lugar geométrico dos pontos P do plano, de tal modo que a razão entre as distâncias de P a A e de P a B seja dada por uma constante k. Justifique a sua resposta analiticamente, discutindo todas as possibilidades para k.	
<b>4<sup>a</sup> Questão:</b>	<b>Valor : 1,0</b>
Em cada uma das 6(seis) faces de um cubo, construiu-se uma circunferência, onde foram marcados <b>n</b> pontos. Considerando que 4 (quatro) pontos não pertencentes à mesma face, não sejam coplanares, quantas retas e triângulos, não contidos nas faces desse cubo, são determinados pelos pontos.	
<b>5<sup>a</sup> Questão:</b>	<b>Valor : 1,0</b>

Considere a função

$y = f(x) = \text{Ln}(x + \sqrt{x^2 + 1})$  onde  $\text{Ln}$  denota o logaritmo neperiano.  
 Responder aos itens a seguir, justificando sua resposta.

(a) Se  $g(x) = \text{Ln}(2x)$ , que relação existe entre os gráficos das curvas  $f$  e  $g$  ?

(b) Pode-se afirmar que a função definida por  $H(x) = \frac{f(x)}{2}$  é uma primitiva

para a função  $T(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$  ?

**6ª Questão:**

**Valor : 1,0**

Se  $\text{tg } a$  e  $\text{tg } b$  são raízes da equação

$x^2 + px + q = 0$ , calcule, em função de  $p$  e  $q$ , o valor simplificado da expressão:

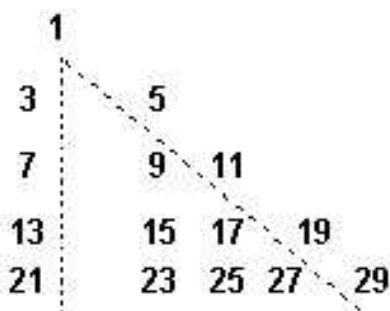
$$y = \text{sen}^2(a + b) + p \text{sen}(a + b)\text{cos}(a + b) + q \text{cos}^2(a + b).$$

Considere  $p, q \in \mathbb{R}$  com  $q \neq 1$ .

**7ª Questão:**

**Valor : 1,0**

Considere os números ímpares escritos sucessivamente, como mostra a figura abaixo, onde a  $n$ ésima linha compreende  $n$  números. Encontre em função de  $n$ , nesta linha, a soma de todos os números escritos, bem como o primeiro e o último.





**8ª Questão:**

**Valor : 1,0**

Determine o resto da divisão do polinômio

$(\cos \varphi + x \operatorname{sen} \varphi)^n$  por  $(x^2 + 1)$ , onde  $n$  é um número natural.

**9ª Questão:**

**Valor : 1,0**

Considere uma esfera inscrita e tangente à base de um cone de revolução. Um cilindro está circunscrito à esfera de tal forma que uma de suas bases está apoiada na base do cone. Seja

$V_1$  o volume do cone e  $V_2$  o volume do cilindro. Encontre o menor valor da constante  $k$  para o qual  $V_1 = kV_2$ .

Sugestão: Considere o ângulo formado pelo diâmetro da base e a geratriz do cone em uma das extremidades deste diâmetro.

**10ª Questão:**

**Valor : 1,0**

Em uma parábola (P), com foco F e parâmetro p, considere uma corda

$\overline{MM'}$  normal à parábola em M. Sabendo que o ângulo  $\angle MFM' = 90^\circ$ ,  
calcule os segmentos  $\overline{FM}$  e  $\overline{FM'}$ .