

**MINISTÉRIO DA DEFESA  
EXÉRCITO BRASILEIRO  
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA  
CURSO DE MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**FÁBIO MAGALHÃES FERREIRA**

**MODELAGEM DE SISTEMAS MECÂNICOS UTILIZANDO  
PROCEDIMENTOS MODULARES**

**Rio de Janeiro**

**2006**

**INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA**

**FÁBIO MAGALHÃES FERREIRA**

**MODELAGEM DE SISTEMAS MECÂNICOS UTILIZANDO  
PROCEDIMENTOS MODULARES**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Fernando Ribeiro da Silva – D. Sc.

Rio de Janeiro

2006

c2006

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha

Rio de Janeiro - RJ            CEP: 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmear ou adotar qualquer forma de arquivamento.

São permitidas a menção, a reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do autor e do orientador.

F 383 Ferreira, Fábio Magalhães.

Modelagem de Sistemas Mecânicos utilizando Procedimentos Modulares /  
Fábio Magalhães Ferreira - Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia,  
2006.

150 p. :il., graf., tab.

Dissertação (mestrado) - Instituto Militar de Engenharia – Rio de Janeiro,  
2006.

1. Grafos de Ligações 2. Sistemas Dinâmicos, Modelagem e Simulação I. Título.  
II Instituto Militar de Engenharia.

CDD 511.5

**INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA**

**FÁBIO MAGALHÃES FERREIRA**

**MODELAGEM DE SISTEMAS MECÂNICOS UTILIZANDO  
PROCEDIMENTOS MODULARES**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Fernando Ribeiro da Silva – D. Sc.

Aprovada em 12 de janeiro de 2006 pela seguinte Banca Examinadora:

---

Prof. Fernando Ribeiro da Silva – D. Sc. do IME – Presidente

---

Prof. Benedito Luiz Barbosa de Andrade – TC/QEM – D. Sc. do IME

---

Prof. Mauro Speranza Neto – D. Sc. da PUC - RJ

Rio de Janeiro  
2006

À minha mãe, Alci Magalhães Ferreira.

## AGRADECIMENTOS

A minha mãe Alci pela formação e pelo apoio irrestrito que tornou possível seguir este caminho e a quem devo grande parte do que conquistei.

A minha namorada Joice pela paciência e pelas palavras de incentivo nos momentos mais difíceis.

Ao professor Fernando que desde o início do curso (e mesmo antes) tem me apoiado, sempre com extrema boa vontade e atenção, e pela valiosa orientação e sugestões dadas durante a realização deste trabalho.

A todos os professores do programa de Mestrado em Engenharia Mecânica do IME, em especial ao prof. Arnaldo Ferreira, ao prof. Clódio Sarzeto, ao prof. Benedito Luiz B. de Andrade e ao prof. Francesco Scofano Neto, que muito contribuíram para minha formação acadêmica.

Aos funcionários da Seção de Engenharia Mecânica e de Materiais, em particular ao Cap Veltri, a Sra. Sandra e a Sra. Heloísa, pela atenção e presteza sempre a eles solicitei auxílio.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

A todos aqueles que de alguma forma contribuíram e me ajudaram para que eu conseguisse superar mais esta etapa, o meu muito obrigado.

## SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES .....	8
LISTA DE TABELAS .....	12
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS .....	13
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>19</b>
1.1 Objetivos .....	19
1.2 Posicionamento .....	20
1.3 Organização .....	24
<b>2 A TÉCNICA GENERALIZADA DOS GRAFOS DE LIGAÇÃO .....</b>	<b>26</b>
2.1 Conceitos Básicos da Técnica .....	26
2.2 Generalização dos Elementos Básicos: Campos Multiportas .....	30
2.3 Grafo Multiligação .....	32
2.4 Estrutura de Junção .....	35
<b>3 O PROCEDIMENTO GENERALIZADO DE MODELAGEM MODULAR PARA SISTEMAS MECÂNICOS .....</b>	<b>37</b>
3.1 Introdução .....	37
3.1.1 Modelos de Sistemas .....	37
3.1.2 Critérios para a Hierarquização de Sistemas no Procedimento Modular .....	38
3.2 Definição do Procedimento de Modelagem Modular para Sistemas com Elementos Escalares .....	39
3.2.1 Elementos da Expansão em Diagrama de Blocos .....	39
3.2.2 Considerações Acerca da Forma de se Representar o Diagrama de Blocos .....	45
3.3 Definição do Procedimento de Modelagem Modular para Sistemas com Elementos Multiportas .....	51
3.3.1 Modelagem e simulação de problemas de carga móvel sobre viga .....	53
3.3.2 Modelagem e simulação de um problema de dinâmica vertical para um veículo com chassi flexível .....	67
3.4 Descrição dos Campos com Causalidade Mista em Diagrama de Blocos .....	77
3.5 Descrição de Campos Não-Lineares em Blocos no Simulink® .....	83

3.6	Descrição dos Campos Modulados em Blocos no Simulink® .....	88
<b>4</b>	<b>TRATAMENTO DE CASOS ESPECIAIS DA MANIPULAÇÃO DOS GRAFOS DE LIGAÇÕES NO PROCEDIMENTO MODULAR .....</b>	<b>91</b>
4.1	Propostas de Solução de Problemas Decorrentes da Existência de Caminhos Causais de Ordem Zero (ZCP's) no Grafo de Ligação .....	91
4.1.1	Introdução .....	91
4.1.2	Propostas para Simulação de Sistemas Contendo Dependência entre Variáveis. 92	
4.1.3	Estudo da Simulação de Sistemas com ZCP Classe 1 em Diagramas de Blocos. 95	
4.1.4	Exemplo de Sistema Contendo ZCP Classe 1 e Descontinuidades: Estudo da Estabilidade de um Modelo de Veículo Plano .....	108
4.2	Propostas de Solução de Problemas Decorrentes do Acoplamento entre Subsistemas com Mudança de Causalidade .....	113
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....</b>	<b>117</b>
5.1	Conclusões .....	117
5.2	Sugestões para Trabalhos Futuros .....	118
<b>6</b>	<b>APÊNCIDES .....</b>	<b>120</b>
6.1	APÊNDICE 1: MODELOS MATEMÁTICOS E CÓDIGOS COMPUTACIONAIS DOS PRINCIPAIS PROBLEMAS .....	121
6.2	APÊNDICE 2: OBSERVAÇÕES PARA HIERARQUIZAÇÃO DE MODELOS UTILIZANDO RECURSOS DO <i>SIMULINK</i> ® .....	138
6.3	APÊNDICE 3: CONSIDERAÇÕES SOBRE SIMULAÇÕES DE SISTEMAS .....	143
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>146</b>



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG.2.1	Representação de uma ligação em grafo de ligação .....	29
FIG.2.2	Representação do sentido da potência e do efeito de carga entre os sistemas ...	29
FIG.2.3	Elementos multiportas. En é um campo qualquer da técnica .....	31
FIG.2.4	Multiligação. (A) – representação de uma multiligação de ordem n. (B) – Expansão em ligações simples .....	33
FIG.2.5	Junção vetorial. (A) – representação de uma junção vetorial de ordem n. (B) – equivalente em junções escalares .....	33
FIG.2.6	Representação de um campo capacitivo misto .....	34
FIG.2.7	Exemplo de composições entre ligações .....	34
FIG.2.8	Elementos multiportas .....	35
FIG.3.1	Expansão da representação multiporta em fluxo de sinais .....	40
FIG.3.2	Representação dos elementos de uma porta em diagrama de blocos .....	41
FIG.3.3	Representação dos elementos de duas portas em diagrama de blocos .....	42
FIG.3.4	Representação dos elementos de três portas em diagrama de blocos .....	42
FIG.3.5	Elementos básicos para a construção de diagramas de blocos de sistemas dinâmicos .....	43
FIG.3.6	Elementos de um modelo em diagrama de blocos .....	44
FIG.3.7	Sistema mecânico rotativo .....	46
FIG.3.8	Grafo de ligação do sistema mecânico rotativo .....	46
FIG.3.9	Diagrama com blocos representativos dos elementos do grafo do sistema.	47
FIG.3.10	Diagrama com blocos representativos dos elementos do grafo com blocos das junções .....	47
FIG.3.11	Exemplos de blocos de elementos de junção. (A) junção–0.(B) junção–1 .....	48
FIG.3.12	Diagrama com blocos de campos de estrutura de junção .....	49
FIG.3.13	Respostas do sistema. (A) – Velocidade angular da Engrenagem 1. (B) – Torques resultantes nas engrenagens 1 e 3 .....	50
FIG.3.14	Grafo multiligação genérico de estruturas .....	52
FIG.3.15	Viga bi-apoiada submetida a uma carga móvel de módulo constante .....	54
FIG.3.16	Grafo de ligação do modelo de carga constante móvel sobre viga .....	55
FIG.3.17	Diagrama de blocos do modelo de carga constante móvel sobre viga .....	56

FIG.3.18	Respostas do sistema. (A) – Deslocamento vertical do centro da viga. (B) – Velocidade do centro da viga .....	57
FIG.3.19	Viga bi-apoiada submetida ao deslocamento de um oscilador .....	58
FIG.3.20	Grafo de ligação do modelo de oscilador móvel sobre viga .....	58
FIG.3.21	Diagrama de blocos do modelo de oscilador móvel sobre viga .....	60
FIG.3.22	Respostas do sistema. (A) – Deslocamento vertical do centro da viga. (B) – Força transversal no nó central da viga .....	61
FIG.3.23	Respostas do oscilador. (A) – Deslocamento vertical do bloco. (B) – Força resultante no bloco .....	61
FIG.3.24	Viga bi-apoiada submetida ao deslocamento de um veículo plano .....	62
FIG.3.25	Grafo de ligação do modelo do veículo plano deslocando-se sobre viga .....	63
FIG.3.26	Diagrama de blocos do modelo do veículo plano deslocando-se sobre viga ....	65
FIG.3.27	Respostas da viga à carga móvel. (A) – Deslocamento vertical no centro da viga. (B) – Forçamento transversal no centro da viga .....	66
FIG.3.28	Deslocamento vertical do CM do veículo .....	66
FIG.3.29	Modelo físico do veículo e seus subsistemas .....	68
FIG.3.30	Elemento de grelha, com a numeração dos GDL para o problema .....	68
FIG.3.31	Modelo discretizado do chassi, com a numeração dos nós .....	69
FIG.3.32	Grafo multiligação do sistema global com a numeração das ligações .....	71
FIG.3.33	Diagrama de blocos do sistema veicular completo .....	72
FIG.3.34	Detalhe do subsistema chassi .....	73
FIG.3.35	Detalhe dos subsistemas acoplados: passageiros e motor .....	73
FIG.3.36	Detalhe do subsistema suspensões .....	74
FIG.3.37	Deslocamento do nó 6 .....	75
FIG.3.38	Deslocamento do assento .....	75
FIG.3.39	Deslocamento de uma das suspensões traseira .....	75
FIG.3.40	Deslocamento de uma das suspensões dianteira .....	75
FIG.3.41	Carregamento resultante em cada pneu traseiro .....	76
FIG.3.42	Campos capacitivos com 4 portas e 4 reações constitutiva .....	77
FIG.3.43	Campos capacitivos com 4 portas e uma relação constitutiva .....	78
FIG.3.44	Campo capacitivo misto com causalidade integral no capacitor .....	78
FIG.3.45	Bloco de campo capacitivo com causalidade mista e com relação constitutiva integral . .....	79

FIG.3.46	Campo capacitivo misto com causalidade diferencial no capacitor .....	79
FIG.3.47	Bloco de campo capacitivo com causalidade mista e com relação constitutiva diferencial .....	80
FIG.3.48	Campo capacitivo misto com 4 relações constitutivas .....	80
FIG.3.49	Bloco de campo capacitivo com causalidade mista e com relações constitutivas integrais e diferenciais .....	81
FIG.3.50	Campo capacitivo misto .....	81
FIG.3.51	Característica não-linear das molas das suspensões .....	83
FIG.3.52	Campo capacitivo não-linear montado com blocos do <i>Simulink</i> ® .....	84
FIG.3.53	Deformação da mola das suspensões traseira e dianteira. A linha tracejada indica a resposta na ausência dos batentes .....	85
FIG.3.54	Elementos resistores modulados (ROSENBERG e KARNOPP, 1983) .....	88
FIG.3.55	Modelo de carga móvel na forma de estrutura de junção .....	89
FIG.4.1	Tipos de malhas topológicas associadas a dependências entre variáveis .....	91
FIG.4.2	Modelo de um elevador .....	97
FIG.4.3	Grafos de ligações para solução do modelo com ZCP classe 1 .....	97
FIG.4.4	Diagrama de blocos do sistema .....	99
FIG.4.5	Diagrama de blocos do sistema. Abordagens de simulação .....	99
FIG.4.6	Posição do bloco 1 .....	100
FIG.4.7	Velocidades dos blocos .....	101
FIG.4.8	Força resultante no bloco 1 .....	101
FIG.4.9	Violação da restrição de posição .....	104
FIG.4.10	Violação da restrição de velocidade .....	105
FIG.4.11	Violação da restrição de aceleração .....	106
FIG.4.12	Modelo plano para a análise da rolagem .....	108
FIG.4.13	Grafo de ligação da dinâmica do veículo .....	109
FIG.4.14	Diagrama de blocos da dinâmica do veículo .....	110
FIG.4.15	Velocidades das excitações de base nas rodas esquerda (em preto) e direita (em azul) .....	111
FIG.4.16	Ângulo de rolagem do chassi no modelo sem barra (linha azul) e com barra anti-rolagem (linha preta) .....	18
FIG.4.17	Deslocamento vertical do CM do veículo no modelo sem barra (linha azul) e com barra anti-rolagem (linha preta) .....	112

FIG.4.18	Subsistemas com causalidade e potência compatível .....	112
FIG.4.19	Subsistemas com causalidade e potência invertida .....	113
FIG.4.20	Subsistemas com causalidade incompatível .....	114
FIG.4.21	Subsistemas com causalidade incompatível .....	114
FIG.4.22	Montagem dos subsistemas com inversão de causalidade .....	115
FIG.6.1	Grafo de ligação do modelo de carga constante móvel sobre viga .....	115
FIG.6.2	Grafo multiligação do veículo com chassi flexível, com a numeração das ligações e indicação de dimensões de sinais .....	123
FIG.6.3	Comparação entre elementos tecnológicos e grafos .....	130
FIG.6.4	Diagrama de blocos da dinâmica de um veículo plano .....	137
FIG.6.5	Bloco do subsistema chassi para um modelo de veículo plano .....	138
FIG.6.6	Diagrama de blocos do veículo plano com máscaras .....	139
FIG.6.7	Caixas de diálogo dos blocos do chassi e das suspensões com máscara .....	139

## LISTA DE TABELAS

TAB.2.1	Domínio físico e variáveis de potência e de energia .....	27
TAB.2.2	Elementos básicos, equações constitutivas e causalidades .....	28
TAB.2.3	Campos generalizados .....	31
TAB.3.1	Dados da viga .....	54
TAB.3.2	Parâmetros de simulação do veículo .....	62
TAB.3.3	Massa dos subsistemas do veículo .....	70
TAB.3.4	Carga por eixo e carga crítica .....	70
TAB.3.5	Tempo de simulação para o modelo com diferentes métodos de integração ..	86
TAB.4.1	Características dos métodos para solução de sistemas com ZCP .....	96
TAB.4.2	Tempo de simulação em segundos .....	102
TAB.4.3	Tempo de Simulação com degrau, em segundos .....	102
TAB.4.4	Parâmetros de simulação do veículo .....	111
TAB.C.1	Autovalores dos modelos de quebra de ZCP classe <i>I</i> .....	142

## LISTA DE ABREVIATURA E SÍMBOLOS

### ABREVIATURAS

- $CM$  – Centro de massa  
 $BDF$  – Fórmula de diferenciação retrógrada (“*Backward differentiation formula*”)  
 $GDL$  – Grau(s) de liberdade  
 $MEF$  – Método dos Elementos Finitos  
 $NVH$  – Ruído, vibração e aspereza (*Noice Vibration and Harshiness*)  
 $ZCP$  – Caminho causal de ordem zero (“*Zero-order Causal Path*”)

### SÍMBOLOS

- $\underline{\mathbf{0}}$  – Junção vetorial de esforço comum.  
 $\underline{\mathbf{1}}$  – Junção vetorial de fluxo comum.  
 $A$  – Matriz de estado; Área da seção transversal da viga.  
 $a$  – Distância horizontal entre o CM e a roda traseira.  
 $b$  – Coeficiente de amortecimento do componente; Distância horizontal entre o CM e a roda dianteira.  
 $[B]$  – Matriz de amortecimento estrutural do MEF.  
 $\bar{B}$  – Matriz de compatibilidade das entradas.  
 $B_p$  – Matriz diagonal de amortecimento dos pneus.  
 $b_p$  – Coeficiente de amortecimento do pneu.  
 $B_s$  – Matriz diagonal de amortecimento das suspensões.  
 $b_s$  – Coeficiente de amortecimento do amortecedor.  
 $c$  – Flexibilidade do componente; Distância horizontal entre o CM e as rodas esquerda e direita.  
 $C$  – Elemento capacitivo.  
 $[C]$  – Matriz do campo capacitivo.  
 $C_{RB}$  – Matriz de rigidez da barra anti-rolagem.  
 $d_{ent}$  – Vetor de entrada no campo dissipativo.  
 $d_{sai}$  – Vetor de saída do campo dissipativo.

$e$	– Variável generalizada de esforço.
$E$	– Campo multiporta genérico; Módulo de elasticidade.
$f$	– Variável generalizada de fluxo.
$F$	– Força.
$G$	– Módulo de cisalhamento.
$g$	– Aceleração da gravidade.
$GY$	– Girador.
$\mathbb{G}Y$	– Multigirador.
$hr$	– Distância vertical do CM do veículo ao eixo de rolagem.
$[\mathbb{I}]$	– Matriz do campo inercial.
$I$	– Elemento inércia.
$I, I_x, I_y, I_z$	– Momento de inércia de massa.
$In$	Matriz identidade de dimensão $n$ .
$Is$	– Matriz diagonal de massa das suspensões.
$Iv$	– Matriz diagonal de massa do veículo (chassi).
$\underline{J}$	– Junção vetorial genérica.
$J$	– Momento de inércia polar.
$[\mathbb{J}]$	– Matriz estrutura de junção.
$k$	– Coeficiente de rigidez do componente.
$[K]$	– Matriz de rigidez estrutural do MEF.
$Ke$	– Matriz de rigidez do elemento.
$Kp$	– Matriz diagonal de rigidez dos pneus.
$kp$	– Coeficiente de rigidez do pneu.
$k_{RB}$	– Rigidez da barra anti-rolagem.
$Ks$	– Matriz diagonal de rigidez das suspensões.
$ks$	– Coeficiente de rigidez da mola da suspensão.
$L$	– Matriz característica do campo dissipativo; comprimento da viga.
$L_e$	– Comprimento do elemento.
$m$	– Massa; Módulo do transformador.
$[M]$	– Matriz de massa do MEF.
$Me$	– Matriz de massa do elemento.
$MGY$	– Girador modulado.
$\mathbb{M}GY$	– Multigirador modulado.

$m_R$	– Massa não-suspensa.
[Mr]	– Matriz de massa da suspensão.
ms	– Massa suspensa.
MTF	– Transformador modulado.
<b>MTF</b>	– Multitransformador modulado.
[Mv]	– Matriz de massa do veículo.
[N]	– Matriz do multitransformador ou multigirador.
$n_e$	– Número do elemento.
P	– Potência.
$p$	– Variável generalizada de momento.
$q$	– Variável generalizada de deslocamento.
r	– Raio; Módulo do girador.
R	– Elemento resistivo.
[R]	– Matriz do campo dissipativo.
s	– Taxa de rigidez de um sistema.
$S_D$	– Matriz característica do campo armazenador dependente.
Se	– Fonte de esforço.
$S_e$	– Fonte de esforço vetorial.
Sf	– Fonte de fluxo.
$S_f$	– Fonte de fluxo vetorial.
$S_I$	– Matriz característica do campo armazenador independente.
$S_{ij}$	– Sub-matrizes particionadas do MEF.
t	– Tempo.
TF	– Transformador.
TF	– Multitransformador.
$t_s$	– Tempo (real) de simulação.
<b>U</b>	– Vetor das entradas.
<b>V</b>	– Vetor complementar de potência.
v	– Velocidade.
$V_e$	– Vetor dos graus de liberdades que recebem esforço externo.
$V_f$	– Vetor dos graus de liberdades que recebem fluxo prescrito.
$V_i$	– Vetor dos graus de liberdades internos da estrutura.
$V_s$	– Vetor dos graus de liberdades que interagem com subsistemas externos.



$\mathbf{X}$	– Vetor de estados.
$\mathbf{X}_D$	– Vetor de energia dos elementos dependentes.
$x_e$	– Posição da carga sobre o elemento.
$\mathbf{X}_I$	– Vetor de energia dos elementos independentes.
$\mathbf{Y}$	– Vetor de saídas do sistema.
$y$	– Deslocamento de base.
$\dot{y}$	– Excitação de base.
$\dot{\mathbf{Y}}$	– Vetor de semi-estados derivados.
$\mathbf{Z}$	– Vetor das variáveis de semi-estado.
$\mathbf{Z}_D$	– Vetor de co-energia dos elementos dependentes.
$\mathbf{Z}_I$	– Vetor de co-energia dos elementos independentes.
$\Phi$	– Vetor modulador do multitransformador.
$\lambda$	– Vetor dos Multiplicadores de Lagrange.
$\lambda_j$	– Autovalores da matriz de estado.
$\rho$	– Densidade.
$\omega$	– Frequência circular natural.
$\omega_0$	– Rotação prescrita.

## SUBSCRITO

$b_s, b_i$	– Índices relativos a batente superior e batente inferior.
$d, t$	– Índices relativos a dianteiro e traseiros.
$e, d$	– Índices relativos a esquerdo e direito.

## RESUMO

Neste trabalho é proposto um procedimento de modelagem de sistemas físicos (mecânicos) orientado ao objeto, no qual se constrói diagrama de blocos baseado no grafo de ligação do sistema, para a obtenção da sua resposta dinâmica. Os blocos são diretamente relacionados aos componentes físicos do sistema que representa, com suas relações constitutivas previamente definidas, e em seguida montados de acordo com as relações de compatibilidade e de continuidade do sistema, dadas pelos elementos de junções do grafo. Dessa maneira, como será mostrado, é possível modelar e simular um sistema dinâmico apenas trabalhando graficamente com os elementos que o compõe, sem a necessidade de realizar equacionamento direto (ficando este implícito no diagrama de blocos). Alguns trabalhos relativos à aplicação desta metodologia na simulação de sistemas dinâmicos têm sido publicados, porém predominantemente aplicados a casos pouco complexos e baseados em ligações simples, cujo uso se torna proibitivo quando são considerados sistemas de grande porte ou descritos por parâmetros distribuídos. São feitas discussões acerca das formas representativas que promovam condensação ao diagrama de blocos sem perda do entendimento físico ou tecnológico do sistema ou de seus componentes, considerando principalmente o emprego da notação multiligação, mas também uma hierarquização das partes do sistema de maneira a torná-las as mais reutilizáveis possíveis. Aspectos delicados da modelagem e simulação pelo procedimento modular também são estudados, como a questão da causalidade diferencial e do acoplamento entre subsistemas onde ocorra mudança de causalidade. Outros aspectos como a representação dos blocos de campos modulados, blocos de campos não-lineares e de campos com causalidade mista são estudados. Para esses casos são feitas propostas de solução que são testadas, desenvolvidas e formalizadas para passar a compor o procedimento. Ainda, Comentários sobre modelagem e simulação no *Simulink*® são feitos.

## ABSTRACT

It is proposed in this work a object-oriented physical systems modeling procedure in which system's bond-graph based block diagrams are built for system's dynamical responses determination. Blocks are directly related with system's physical componens, with its constitutives relations previously defined, and after put together by the compatibility and continuity relations given by bond-graph junctions elements. It is noticed that by this way it is possible to simulate a ynamic system working only graphically with the elements that compose it, without the need of equating. Some works related to the use of this methodology in the simulation of dynamical systems haave been published, however applied to siple bonds, which the usage is unneficient in case of complexes systems or systems described by lumped parameters. It is discussed some block-diagram representative forms that promote reductions on the representation without lost of systems' and its components' physical insight, considering mainly the use of multibond notation, as so the reticulation of the system into several parts as reusable as possible. Some delicated issues concerning with modeling and simulation in the modular procedure are studied, as the derivative causality or the coupling between subsystems with causality change. Others issues such the representation of modulated fields blocks, nomlinear fields blocks and mixed causality fields blocks are to be studied. For these cases, solving proposal are made and have been tested, developed and documented to compose the procedure. Still, some coments on modeling and ssimulation in *Simulink*® are done.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 OBJETIVOS

Este trabalho se propõe discutir um procedimento de modelagem e simulação para sistemas mecânicos em geral utilizando-se a técnica generalizada dos grafos de ligações - empregada preferencialmente na sua forma multiligação - e a modularidade dos diagramas de blocos. Neste procedimento, o grafo de ligação representativo do sistema é inteiramente convertido em diagrama de blocos que mantém todas as propriedades do grafo, inclusive o significado físico dos elementos de um sistema, porém sem a necessidade de equacionar diretamente ou de escrever uma única linha de código numérico para resolver as equações de espaço de estado do sistema. Os elementos têm suas relações constitutivas previamente definidas quer seja analiticamente ou experimentalmente. Em casos onde apareçam campos multiportas, é necessário também construir as matrizes características dos campos. Estas relações geralmente são obtidas de maneira bastante simples, visto que normalmente é muito mais fácil se ampliar o conhecimento sobre uma parte do que sobre todo um sistema.

Aspectos delicados da modelagem e simulação pelo procedimento modular são estudados. Tais aspectos podem ser decorrentes dos grafos de ligações - como a questão da causalidade diferencial e do acoplamento entre subsistemas onde ocorra mudança de causalidade - ou de sua representação em diagramas de blocos - principalmente a representação dos blocos transformadores modulados, blocos não lineares e de campos com causalidade mista. Propostas de soluções para estes casos são apresentadas.

Este procedimento visa desenvolver e formalizar uma representação intermediária para execução de simulação por diagramas de blocos, empregável a sofisticados *softwares* de simulação como, por exemplo, o *Simulink*<sup>®</sup>, ou quaisquer outros já disponíveis, o que vem a ser uma alternativa ao uso de pacotes específicos de simulações de sistemas baseados em grafo de ligação, geralmente caros e restritos. Embora o foco neste trabalho esteja sobre a modelagem de sistemas mecânicos, este estudo é conduzido de modo que a extensão do procedimento para sistemas de outros domínios físicos, ou mesmo multi-domínios, por analogia, seja imediata.

## 1.2 POSICIONAMENTO

A evolução científica e tecnológica do mundo moderno tem exigido de engenheiros e pesquisadores uma especial dedicação à área de Dinâmica de Sistemas. Esta necessidade advém da alta tecnologia empregada nos projetos de engenharia, que envolvem, em muitos casos subsistemas de áreas distintas do conhecimento, com elementos descritos muitas vezes por relações não-lineares. A área de dinâmica de sistemas tem como objetivo o estudo de sistemas em suas fases transientes e estacionárias, sejam eles mecânicos, elétricos, hidráulicos, ou outros. Os modelos matemáticos desses sistemas têm sido obtidos através de leis fundamentais e metodologias específicas de cada ramo da ciência. Nos sistemas mecânicos, em particular, o tratamento de modelos em que haja interação entre subsistemas de parâmetros concentrados com outro de parâmetros distribuídos (estruturais) tem ganhado muita importância, assim como a descrição da cinemática no estudo da dinâmica de sistemas multicorpos. Casos que demonstram a necessidade de uma abordagem sistemática dos problemas de Engenharia são amplamente discutidos por CANNON, Jr. (1967), CRANDALL *et al.* (1968), DOEBELIN (1972) e ROSENBERG e KARNOPP (1983).

Particularmente, a técnica dos Grafos de Ligação (Bond Graphs) tem se apresentado nos últimos anos como bastante atrativa para os mais variados tipos de problemas, nas mais diversas áreas do conhecimento, principalmente pela sua característica generalizada e também modular. A técnica dos Grafos e Ligação é uma ferramenta poderosa na modelagem de dispositivos complexos, que podem incluir sistemas de naturezas físicas distintas, tais como elétricos, mecânicos, hidráulicos, pneumáticos e térmicos, ou combinações desses, entre outros. Foi criada por H. M. Paynter no final da década de 50, que imaginou serem energia e potência as variáveis dinâmicas fundamentais, e que essas variáveis seriam as únicas responsáveis pelas interações físicas entre sistemas. Desenvolvida inicialmente para representar sistemas de parâmetros concentrados, lineares ou não, atualmente apresenta generalizações que permitem sua aplicação a sistemas de parâmetros distribuídos e a dinâmica de corpos rígidos no espaço, entre outros (FILIPPO *et al.*, 1991).

É de se notar que a maioria das aplicações da técnica dos grafos de ligação é para sistemas mecânicos, o que não é por acaso, tendo em vista que os primeiros a trabalharem neste campo foram engenheiros mecânicos. Em sistemas mecânicos, a técnica dos Grafos de Ligação tem sido usada para o estudo de sistemas multicorpos, da dinâmica veicular, de formulações para sistemas estruturais e da interação entre sistemas mecânicos contínuos e discretos.

Outros estudos também têm sido realizados nas áreas da robótica, de sistemas mecânicos em rotação, no modelamento de sistemas mecânicos tridimensionais e extensos, em vibrações e fenômenos sonoros (*NVH*), etc. Assim, vários trabalhos relacionados ao emprego da técnica dos grafos de ligação a diversos tipos de sistemas mecânicos foram estudados, de maneira a servir de base para as discussões que serão realizadas ao longo deste trabalho.

Um caso interessante de dinâmica de sistema mecânico em rotação é tratado no trabalho de FURTADO (1999), onde é estudado o problema do acoplamento entre rotores rígidos e eixos flexíveis, considerando-se também efeitos dissipativos e de flexibilidade nos mancais. Nesse trabalho, um modelo clássico, no qual os efeitos inerciais dos elementos solidários ao eixo são representados pelas equações de Newton-Euler e o eixo é modelado pelo método dos elementos finitos, é comparado a outro modelo construído através dos grafos de ligação que agrega em si as mesmas equações clássicas do corpo rígido e do método dos elementos finitos, porém obtidas pela sistemática da técnica dos grafos.

No estudo de sistemas multicorpos, ROSENBERG (1971) propõe um procedimento de simulação baseado em grafo de ligação com o emprego de um algoritmo (*ENPORT*), com exemplos em dinâmica de corpo rígido. Por outro lado, KARNOPP (1997) discute o emprego dos grafos de ligação na construção de modelos de sistemas multicorpos, apresentando diferentes maneiras de se formular as equações de restrição.

Na análise da dinâmica veicular, destacam-se os trabalhos de PACEJKA (1985), DROZDZ e PACEJKA (1991) e de MARTINEZ (1991), onde modelos veiculares, planos e espaciais, são estudados para a análise do comportamento de veículos sobre suspensão submetidos a excitações. No primeiro, simulações considerando-se diferentes tipos de pneus são realizadas e comparadas a resultados obtidos em testes de campo. No segundo, vários modelos são construídos e simulados com o objetivo de demonstrar a aplicabilidade da técnica dos Grafos de Ligação à área da dinâmica veicular. Já no trabalho de MARGOLIS e SHIM (2001), elementos de controle, tais como sensores e atuadores são adicionados ao modelo da dinâmica do veículo para o desenvolvimento de controladores para segurança passiva de veículos.

Com relação aos sistemas estruturais, a primeira abordagem utilizada para modelar o problema de estruturas flexíveis utilizando o formalismo da técnica dos Grafos de Ligação foi através da análise modal (KARNOPP *et al.*, 1990). Nesta análise parte-se da solução da parte homogênea da equação diferencial parcial de governo do sistema estrutural, e considerando-se as condições de contorno, determinam-se as suas autofunções. Constrói-se então o grafo de

ligação representativo dos modos normais da estrutura, que representa as equações modais não acopladas do sistema estrutural. A utilização da metodologia da análise modal, no entanto, apresenta uma desvantagem, que é a necessidade de se conhecer as autofunções do problema. Para modelos mais complexos, onde a obtenção analítica das autofunções se torna difícil, seu emprego fica limitado. Outra abordagem ao problema de estruturas flexíveis utilizando a técnica dos grafos de ligação, foi desenvolvida por Da SILVA e SPERANZA NETO (1993), e formalizada em trabalho posterior (Da SILVA, 1994). Nela o modelo dinâmico da estrutura, discretizado pelo método dos elementos finitos, é integralmente aproveitado pela técnica dos Grafos de Ligação, por isso, esta metodologia não sofre as mesmas limitações da análise modal. A utilização deste procedimento também se beneficia da qualidade da técnica dos Grafos de Ligação de facilitar o acoplamento dinâmico entre subsistemas. Esta abordagem será empregada em alguns exemplos no desenvolvimento deste trabalho.

No estudo da interação entre sistemas mecânicos contínuos e discretos, tem-se em MARGOLIS (1985) uma pesquisa voltada para o desenvolvimento da modelagem desses tipos de problemas, em grafos de ligação, através do uso de modos normais. No trabalho de ANDRADE (1995) têm-se alguns modelos estudados por esta abordagem, onde são construídos modelos em grafos de ligação para o estudo da interação entre sistemas mecânicos lineares típicos. Além da análise modal, a formulação de Da Silva e Speranza Neto, apresentada acima, também foi utilizada na descrição dos elementos estruturais. Comparações entre os resultados assim obtidos com os de modelos analíticos, foram feitas para validação da metodologia.

Vários outros trabalhos continuaram abordando o problema estrutural utilizando as formulações acima citadas: Da ROCHA (1998) explora a utilização da técnica dos Grafos de Ligação na modelagem da dinâmica vertical de veículos automotores terrestres com chassis flexíveis, realizando acoplamento dinâmico entre subsistemas estruturais com parâmetros distribuídos (chassis) e com parâmetros concentrados (passageiros, motor, suspensão). Já em BESSA (2000), é tratado o problema de cargas móveis em elementos estruturas com enfoque na análise modal.

Esses trabalhos exploram em profundidade os casos do emprego da técnica generalizada dos Grafos de Ligação em problemas mecânicos de várias espécies sem, contudo, entrar no mérito da formulação de um procedimento de modelagem que inclua, por exemplo, modelagem de sistemas com campos não-lineares ou acoplamento de sistemas com mudança de causalidade. Existem várias referências que tratam das bases teóricas e das definições da técnica,

abordando, inclusive, aspectos de simulação por um esquema mais tradicional e simples que os empregados nos trabalhos mencionados, onde diagramas de blocos são empregados na descrição dos modelos. CANNON, Jr. (1967), por exemplo, discute o emprego de diagramas de blocos para o estudo de sistemas dinâmicos, baseado nos *computadores analógicos*, que são coleções de componentes eletrônicos e eletromecânicos especialmente projetados, montados de modo a formar um sistema dinâmico onde a tensão que o percorre obedece à mesma equação dinâmica de governo do modelo físico que tal circuito representa. O conhecimento prévio dessas equações é necessário para a construção do diagrama de blocos.

Uma maneira mais elaborada de se construir diagramas de blocos para a simulação de sistemas dinâmicos foi levantada por KARNOPP *et al.* (1990) e mais tarde padronizada (BROENINK, 2000), na qual parte-se do grafo de ligação do sistema para se construir o diagrama. É de se notar que dessa maneira é possível simular um sistema dinâmico apenas trabalhando graficamente com os elementos que o compõe, sem a necessidade de equacionamento. Alguns trabalhos relativos à aplicação desta metodologia na simulação de sistemas dinâmicos foram publicados, porém predominantemente aplicados a casos pouco complexos, baseados em ligações simples.

A extensão da metodologia descrita acima, considerando-se também uma condensação na representação de sistemas em diagramas de blocos e em outras formas pictóricas pelo emprego da notação multiportas, começou a ser discutida nos últimos anos e, com a evolução nos computadores na última década, houve a extensão para o desenvolvimento de *softwares* de simulação de sistemas dinâmicos, baseados nos grafos de ligação. Como exemplos, destaca-se o pacote *AMESim*® (AMESIM, 2000a), que aplica elementos icônicos multiportas ligados entre si pelo fluxo de potência (dois sinais por ligação), e o *20 – SIM*® (CONTROLLAB, 2004), que possibilita a simulação direta de grafos de ligação, bem como de diagramas de blocos, diagramas icônico e mistos destes. A vantagem da utilização destes pacotes, entretanto, pode ficar limitada devido a fatores como custos, limitações em suas bibliotecas matemáticas e limitações na capacidade de modelamento, sobretudo quando são tratados problemas que considere casos estruturais ou de dinâmica de multicorpos.

Uma alternativa para a simulação de sistemas dinâmicos, com a utilização de simulação via fluxo de sinais foi proposta em trabalhos recentes (FERREIRA e Da SILVA, 2005a), (FERREIRA e Da SILVA, 2005b). Nestes trabalhos, modelos relacionados à dinâmica veicular foram construídos por grafos multiligação e simulados via diagramas de blocos. Alguns



aspectos de representação e problemas potenciais para o procedimento foram observados, e serão tratados neste trabalho mais adiante.

Ao longo deste trabalho diversas simulações em fluxo de sinais efetuadas com o programa *Simulink*® são apresentadas com o único objetivo de demonstrar e validar os aspectos estudados, pertinentes ao procedimento proposto. Portanto, profundas interpretações dos resultados são evitadas. Para efeito de validação, essas respostas são comparadas a outras obtidas pelo equacionamento clássico da técnica dos grafos de ligações.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO

O trabalho é dividido em cinco capítulos e três apêndices, que estão organizados da seguinte maneira:

Capítulo 1 – Introdução: são apresentados os objetivos do trabalho, seu posicionamento e sua organização.

Capítulo 2 – A técnica generalizada dos Grafos de Ligação: são apresentados alguns conceitos básicos da técnica necessários ao entendimento do trabalho. Nomenclaturas e notações utilizadas ao longo do trabalho são introduzidas.

Capítulo 3 – O procedimento generalizado de modelagem modular para sistemas mecânicos: neste capítulo são apresentadas e discutidas as bases do procedimento de modelagem modular de sistemas dinâmicos, com destaque para sistemas mecânicos, baseado em grafos de ligação. É feita uma discussão sobre a hierarquização de sistemas no contexto do procedimento modular, bem como sobre outros aspectos como o procedimento de expansão do grafo de ligação em diagrama de blocos, tanto para elementos escalares quanto para elementos multiportas, apresentação de algumas formas representativas de diagramas possíveis, descrição dos elementos básicos da técnica dos grafos de ligações como blocos e montagem do diagrama de blocos. Vários exemplos de aplicação são dados. Aspectos mais específicos da técnica dos grafo são revistos para a descrição em diagramas de blocos, tais como o tratamento de campos com causalidade mista, não-lineares e modulados. Comentários sobre modelagem e simulação no *Simulink*® são feitos.

Capítulo 4 – Tratamento de casos especiais da manipulação dos grafos de ligações no procedimento modular: aqui são feitas propostas de solução para alguns problemas típicos de modelagem e simulação de sistemas pela técnica dos grafos de ligações, como a questão da simulação de sistemas que contenham elementos armazenadores com causalidade diferencial,

a modelagem do acoplamento entre subsistemas com causalidades incompatíveis e consequente inversão de causalidade em um deles, e a interação com subsistemas descritos por funções de transferência.

Capítulo 5 – Conclusões e sugestões: são apresentadas as conclusões do trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros.

Apêndice 1 – Modelos matemáticos e códigos computacionais dos principais modelos: alguns modelos utilizados ao longo deste trabalho são desenvolvidos também pelo equacionamento clássico da técnica dos grafos de ligações e codificado em *Matlab*® para comparação de respostas ou para compor blocos de subsistemas. Tais modelos são analisados em detalhes e seus códigos são apresentados, com comentários.

Apêndice 2 – Observações para hierarquização de modelos utilizando recursos do *Simulink*®: o objetivo neste apêndice é de formalizar e estender as idéias de hierarquização e condensação de elementos apresentadas neste trabalho pelo conceito de abstração das relações constitutivas dos elementos, inclusive com a utilização de recursos avançados oferecidos pelo *Simulink*®.

Apêndice 3 – Considerações sobre simulações de sistemas: são feitos comentários sobre aspectos relevantes de simulação por integração numérica de sistemas em diagrama de blocos baseados em grafos de ligações. São fornecidos parâmetros para auxiliar na escolha do método de integração mais apropriado para um dado sistema.

## CAPÍTULO 2

### A TÉCNICA GENERALIZADA DOS GRAFOS DE LIGAÇÃO

#### 2.1 CONCEITOS BÁSICOS DA TÉCNICA.

O procedimento modular proposto neste trabalho é essencialmente baseado na técnica dos Grafos de Ligação. Portanto, o conhecimento tácito dos conceitos básicos da técnica por parte dos engenheiros e pesquisadores que vierem a fazer uso do procedimento é necessário. Neste capítulo, são destacados alguns tópicos necessários à compreensão dos aspectos estudados no desenvolvimento deste trabalho. Leituras mais completas sobre a técnica dos Grafos de Ligação podem ser encontradas em ROSENBERG e KARNOPP (1983), em KARNOPP *et al.* (1990), assim como em BROENINK (2000).

A característica multidisciplinar da técnica dos Grafos de Ligação é consequência de dois pontos fundamentais. Primeiramente tem-se o conceito de fluxo de potência, que consiste na transferência de potência entre os elementos de um sistema. A potência instantânea que flui através de um elemento é dada pela EQ. 2.1

$$P(t) = e(t) \cdot f(t) \quad (2.1)$$

onde  $P(t)$  é a potência  $e(t)$  é o esforço e  $f(t)$  é o fluxo associado a um elemento. Como foi apresentado no capítulo anterior, a idéia primordial é que energia e potência são as variáveis dinâmicas fundamentais, e que essas variáveis são as únicas responsáveis pelas interações físicas entre sistemas, daí vem a generalização das variáveis de potência: esforço  $e$  e fluxo  $f$ , e das variáveis de energia: deslocamento  $q$  e quantidade de movimento  $p$ , que são importantes para a análise de sistemas dinâmicos e se relacionam com as variáveis de potência como mostrado nas EQ. 2.2 e EQ. 2.3.

$$p(t) = \int e(t) dt \quad (2.2)$$

$$q(t) = \int f(t) dt \quad (2.3)$$

Na TAB. 2.1 são mostradas as variáveis de potência e de energia para alguns domínios físicos.

TAB. 2.1 Domínio físico e variáveis de potência e de energia.

<b>Domínio Físico</b>	<b>Esforço (<math>e</math>)</b>	<b>Fluxo (<math>f</math>)</b>	<b>Qtd. de Movimento (<math>p</math>)</b>	<b>Deslocamento (<math>q</math>)</b>
Mecânico Translação	Força (N)	Velocidade (m/s)	Qtd. de Movimento (N•s)	Posição (m)
Mecânico Rotação	Torque (N•m)	Velocidade Angular (rad/s)	Qtd. de Movimento (N•s•m)	Ângulo (rad)
Hidráulico	Pressão (Pa)	Vazão Volumétrica (m <sup>3</sup> /s)	Qtd. de Movimento de Pressão (Pa•s)	Volume (m <sup>3</sup> )
Elétrico	Voltagem (V)	Corrente (A)	Enlace de Fluxo (V•s)	Carga (C)

O segundo ponto fundamental da técnica é a definição de nove elementos básicos, que combinados convenientemente descrevem o modelo físico de um sistema. Estes elementos são classificados pelo número de portas que possuem, ou seja, o número de ligações associadas ao elemento.

Os elementos de uma porta são aqueles em que a potência flui através de uma única ligação. As fontes ideais de esforço ( $Se$ ) e de fluxo ( $Sf$ ) são os elementos de uma porta que fornecem energia ilimitada ao sistema. A inércia ( $I$ ) e o capacitor ( $C$ ) são os elementos armazenadores de energia do sistema, associados, respectivamente, à quantidade de movimento ( $p$ ) e ao deslocamento ( $q$ ). Já o resistor ( $R$ ) é o elemento dissipador de energia do sistema.

Os elementos de duas portas, que são o transformador ( $TF$ ) e o girador ( $GY$ ), têm a função de compatibilizar as variáveis de potência. São empregados, por exemplo, no acoplamento entre elementos ou subsistemas, na representação de um sistema de alavancas e nas transformações de coordenadas. Estes elementos são conservadores de potência, ou seja, a potência que entre nele é igual a que sai. Em adição, destacam-se as situações onde estes elementos possuem módulos não constantes, passando a ser chamados de transformador modulado ( $MTF$ ) e girador modulado ( $MGY$ ).

Os elementos de três ou mais portas, conhecidos como junções, são utilizados para se representar condições de equilíbrio e compatibilidade cinemática em um sistema. Existem dois tipos de junções: a de esforço comum (ou *junção – 0*), e a de fluxo comum (ou *junção – 1*). Todos os nove elementos da técnica, com suas relações constitutivas e atribuições de causalidades, são mostrados na TAB. 2.2.

TAB. 2.2 Elementos básicos, equações constitutivas e causalidades.

Elemento	Forma Causal	Relação Causal
Fonte de esforço	Se $\longrightarrow$	$e(t) = E(t)$
Fonte de fluxo	Sf $\longleftarrow$	$f(t) = F(t)$
Resistor	R $\longleftarrow$ R $\longleftarrow$	$e = \phi_R(f)$ $f = \phi_R^{-1}(e)$
Capacitor	C $\longleftarrow$ C $\longleftarrow$	$e = \phi_C^{-1}(\int f dt)$ $f = \frac{d}{dt} \phi_C(e)$
Inércia	I $\longleftarrow$ I $\longleftarrow$	$f = \phi_I^{-1}(\int e dt)$ $e = \frac{d}{dt} \phi_I(f)$
Transformador	$\begin{array}{c} \xrightarrow{1} \text{TF} \xrightarrow{2} \\ \text{: } m \end{array}$ $\begin{array}{c} \xrightarrow{1} \text{TF} \xrightarrow{2} \\ \text{: } 1/m \end{array}$	$e_1 = m e_2$ $f_2 = m f_1$ $e_2 = e_1 / m$ $f_1 = f_2 / m$
Girador	$\begin{array}{c} \xrightarrow{1} \text{GY} \xrightarrow{2} \\ \text{: } r \end{array}$ $\begin{array}{c} \xrightarrow{1} \text{GY} \xrightarrow{2} \\ \text{: } 1/r \end{array}$	$f_2 = r e_1$ $f_1 = r e_2$ $e_2 = f_1 / r$ $e_1 = f_2 / r$
Junção 0	$\begin{array}{c} \xrightarrow{1} 0 \xleftarrow{2} \\ \uparrow 3 \\ \text{---} \end{array}$	$e_2 = e_1$ $e_3 = e_1$ $f_1 + f_2 + f_3 = 0$
Junção 1	$\begin{array}{c} \xrightarrow{1} 1 \xleftarrow{2} \\ \uparrow 3 \\ \text{---} \end{array}$	$f_2 = f_1$ $f_3 = f_1$ $e_1 + e_2 + e_3 = 0$

Uma das principais características da técnica dos Grafos de Ligação é a representação gráfica do modelo físico do sistema através de uma simbologia própria, de tal maneira que a visualização das conexões entre os vários elementos componentes do sistema se torna imediata. A entidade fundamental da representação é uma meia seta, como a mostrada na FIG. 2.1, orientada no sentido do fluxo instantâneo de potência através de uma ligação.

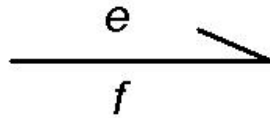


FIG. 2.1 Representação de uma ligação em grafo de ligação.

Uma ligação onde flui potência é chamada de *ligação passiva* e, através dela se verifica o *efeito de carga*, ou seja, a reação que ocorre na conexão entre dois sistemas ou componentes que trocam potência. Quando a transferência de informação é feita com fluxo de potência desprezível, utiliza-se uma *ligação ativa* (representada por uma seta cheia) para indicá-la no grafo de ligação. Além do sentido do fluxo da potência, são também caracterizados os sentido dos esforços e dos fluxos de cada ligação. A FIG. 2.2, por exemplo, mostra um caso genérico de representação do fluxo de potência entre dois sistemas.

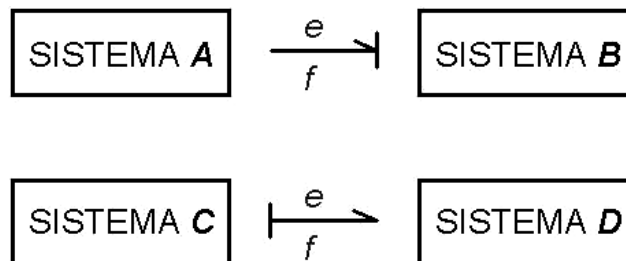


FIG. 2.2 Representação do sentido da potência e do efeito de carga entre os sistemas.

O sentido da potência em ambos os casos ilustrados é definido como sendo da esquerda para a direita, ou seja, potência fluindo de *A* para *B*, e de *C* para *D*.

Observa-se também, na FIG. 2.2, o sentido da entrada e saída do esforço e do fluxo, representado pela *barra causal*, colocada em uma das extremidades da meia seta. A barra causal representa o efeito de carga entre os sistemas, isto é, *A* cede esforço e recebe fluxo de *B*, enquanto *C* cede fluxo e recebe esforço de *D*. Isto levanta uma outra característica de grande importância da técnica dos Grafos de Ligação que é a possibilidade de se representar, de

forma bem definida, a relação de causa e efeito entre as variáveis de potência, ou seja, a causalidade. Dependendo do tipo de equação associada aos elementos, estes podem apresentar em suas portas restrições causais. Existem quatro tipos de restrições causais possíveis: *causalidade fixa*, existente nos elementos fontes (*Se* e *Sf*), ou em elementos descritos por equações que não se pode inverter; *causalidade restritiva*, presente nos elementos *TF*, *GY*, junção-0 e junção-1, onde a causalidade numa porta em particular impõe a causalidade nas demais portas do elemento; *causalidade preferencial*, que determina, na descrição de um elemento armazenador, a ocorrência de uma integração ou de uma derivação em relação ao tempo, sendo a integração preferível sobre a derivação; e *causalidade indiferente*, associada a elementos resistores com relações constitutivas inversíveis, onde não importa qual variável é a de saída de uma porta. O entendimento desses conceitos, sobretudo em relação à causalidade preferencial, será muito útil nos capítulos seguintes, onde serão tratados alguns problemas da modelagem de sistemas pelo estudo de sinais nos quais inversões de causalidades se farão necessárias.

## 2.2 GENERALIZAÇÃO DOS ELEMENTOS BÁSICOS: CAMPOS MULTIPORTAS.

A técnica dos Grafos de Ligação foi originalmente desenvolvida para representar modelos de parâmetros concentrados, ou seja, aqueles nos quais as características dinâmicas são consideradas escalares, relacionando apenas uma variável de entrada com uma de saída, caracterizando elementos de uma porta.

Entretanto, existem inúmeros problemas de engenharia onde não se pode adotar a hipótese de parâmetros concentrados para se representar um certo fenômeno. Neste caso, as propriedades dinâmicas relacionam mais de uma variável de entrada com outras tantas de saída, caracterizando, para modelos lineares, uma relação constitutiva matricial, representada por elementos de mais de uma porta, ou multiportas.

Além disso, é sempre possível descrever um modelo desenvolvido com base em elementos de parâmetros concentrados em uma forma vetorial, pela simples organização das equações constitutivas na forma matricial.

Assim, de modo a representar em grafos de ligação esses casos (lineares) caracterizados por relações matriciais, aumentando a sua potencialidade e versatilidade, foi criada uma extensão dos elementos básicos da técnica, onde existem mais de uma ligação na entrada e na saída dos elementos. Estes elementos são os campos armazenadores e dissipadores, as junções vetoriais, os multitransformadores e multigiradores e a estrutura de junção, que na ver-

dade é a união dos elementos de junção e de acoplamento. A FIG. 2.3 compara os elementos básicos de uma porta com os multiportas e introduz a notação multiligação (BREEDVELD, 1984), (BREEDVELD, 1985a).

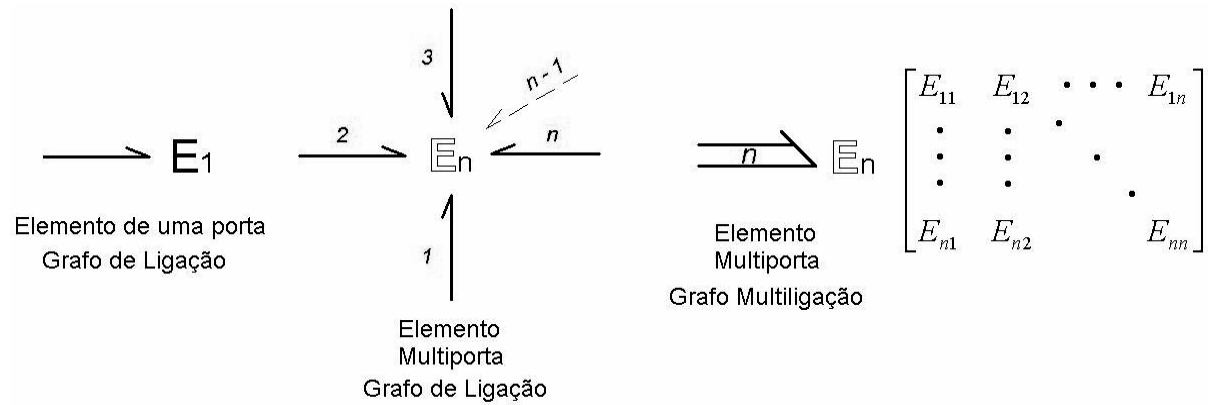


FIG. 2.3 Elementos multiportas.  $E_n$  é um campo qualquer da técnica.

Deve-se notar que estes elementos generalizados mantêm as mesmas características daqueles de uma porta, apenas possuem mais portas de entrada e saída e a equação constitutiva relaciona todas as variáveis envolvidas nas ligações. Na TAB. 2.3 são apresentadas as notações dos campos multiportas e dos elementos de junções vetoriais sem a atribuição das causalidades, visto que estas somente poderão ser atribuídas após o conhecimento de todo o sistema, tendo em vista que pode haver uma causalidade mista associada a uma determinada ligação, o que implicaria no particionamento da multiligação. As junções  $\mathbf{J}$  podem ser tanto uma junção  $\mathbf{0}$  quanto uma junção  $\mathbf{1}$ .



TAB. 2.3 Campos generalizados.

Elemento generalizado	Representação
Fonte de esforço	$Se \Rightarrow$
Fonte de fluxo	$Sf \Rightarrow$
Campo Resistivo	$R \diagdown$
Campo Capacitivo	$C \diagdown$
Campo Inércia	$I \diagdown$
Multitransformador	$\begin{matrix} : [N] \\ \Rightarrow \diagdown TF \Rightarrow \end{matrix}$
Multigirador	$\begin{matrix} : [N] \\ \Rightarrow \diagdown GY \Rightarrow \end{matrix}$
Junções vetoriais	$\begin{matrix} \Rightarrow \diagdown \underline{J} \Rightarrow \diagdown \\ \uparrow \uparrow \end{matrix}$

### 2.3 GRAFO MULTILIGAÇÃO.

Os grafos multiligação são uma representação ou notação compacta dos grafos de ligação, utilizada quando se trabalha com os campos ou elementos multiportas. Uma multiligação é a generalização vetorial de uma ligação simples, e foi proposta por BREEDVELD (1985a), que definiu a maioria de seus elementos e conceitos. Com a utilização de campos multiportas, mais de um par de variáveis de entrada e saída pode ser conduzido em uma ligação, de acordo com o esquema da FIG. 2.4, onde a ordem da multiligação corresponde ao número de ligações simples que ela representa. Esta forma vetorial e compacta de representação faz com que uma grande condensação na representação do modelo do sistema por grafos de ligação e, por conseguinte, por diagramas de blocos, seja obtida.

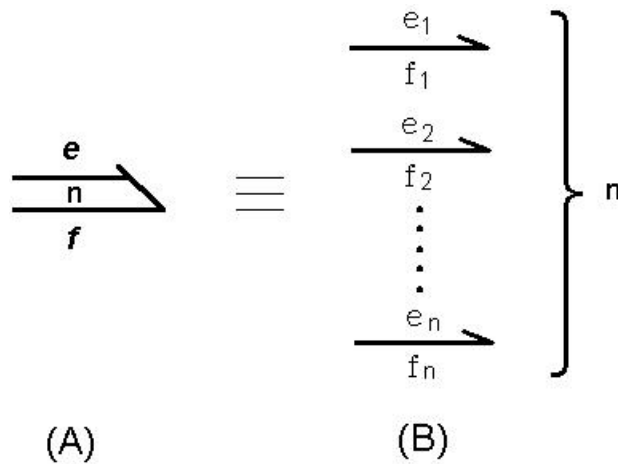


FIG. 2.4 Multiligação. (A) – representação de uma multiligação de ordem  $n$ .  
 (B) – Expansão em ligações simples.

No procedimento modular tratado neste trabalho, é definida a utilização da representação multiligação como sendo a forma preferencial para a construção de modelos, embora uma discussão com ligações simples e elementos escalares também seja considerada. Algumas notações especiais em grafos multiligações utilizadas adiante são apresentadas a seguir.

A representação das junções vetoriais é mostrada na FIG. 2.5, onde  $\underline{\mathbf{J}}$  pode ser a junção  $\underline{\mathbf{0}}$  ou  $\underline{\mathbf{1}}$ . Neste esquema,  $n$  conjuntos de junções com o mesmo número de ligações são condensadas em uma única junção vetorial com multiligações de ordem  $n$ .

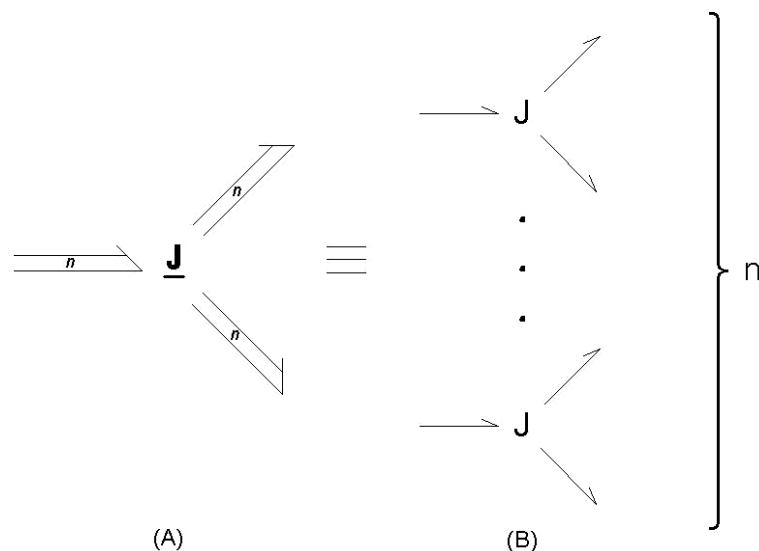


FIG. 2.5 Junção vetorial. (A) – representação de uma junção vetorial de ordem  $n$ .  
 (B) – equivalente em junções escalares.

Como foi dito na seção anterior, a causalidade de uma multiligação só pode ser definida após o desenvolvimento do grafo completo do sistema. Caso haja pelo menos uma ligação simples com causalidade diferente das demais, o campo multiportas correspondente será misto, ou seja, a multiligação associada a ele será particionada, como mostrado na FIG. 2.6, com  $n_1$  ligações simples com causalidade integral e  $n_2$  ligações simples com causalidade diferencial.

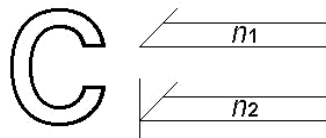


FIG. 2.6 Representação de um campo capacitivo misto.

Por último, são apresentadas as operações de composição, decomposição e reordenação de ligações, simples ou multiligações, representadas graficamente na forma de uma barra perpendicular às ligações, como na FIG. 2.7. No exemplo, primeiramente é feita uma composição entre ligações simples em uma multiligação na mesma ordem de entrada, visto que a matriz de composição é uma matriz identidade, podendo mesmo ser omitida na representação. A multiligação assim formada é então decomposta em uma ligação simples e uma multiligação, com reordenação denotada pela matriz de cruzamento  $K$ .

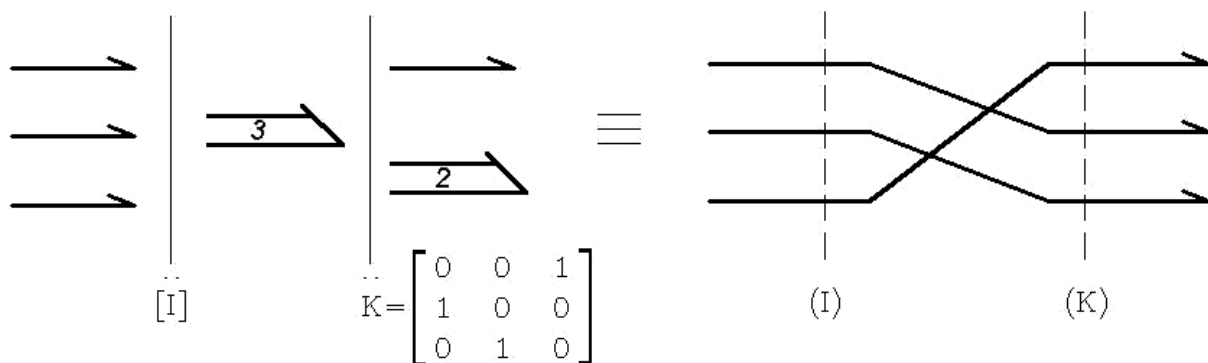


FIG. 2.7 Exemplo de composições entre ligações.

A extensão dessas operações na representação por diagrama de blocos é feita, em *Simulink*®, pela utilização de blocos especiais de composição de sinais vetoriais, e sua utilização será tratada com exemplos mais adiante neste trabalho.

## 2.4 ESTRUTURA DE JUNÇÃO.

A estrutura de junção é um elemento generalizado multiporta, que se caracteriza pela reunião dos elementos  $0$ ,  $1$ ,  $TF$ ,  $GY$ ,  $MTF$  e  $MGY$ . Assim como seus componentes, ela conserva potência. A estrutura de junção representa a relação topológica entre as portas dos campos num grafo multiligação. De acordo com os trabalhos de ROSENBERG (1971) e KARNOPP *et al.* (1990), todo grafo de ligação pode ser representado esquematicamente como mostrado na FIG. 2.8, onde são mostrados os campos característicos *armazenadores dependentes e independentes*, o campo *dissipador*, o campo de *fontes* e a *estrutura de junção*, assim como os vetores associados às suas principais variáveis.

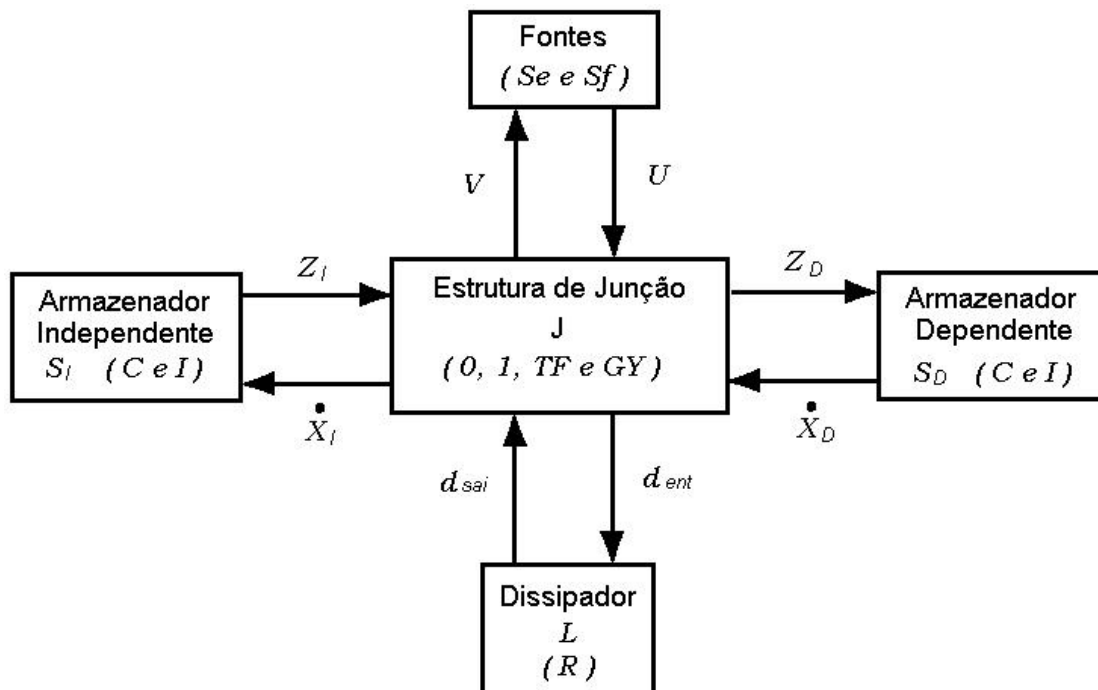


FIG. 2.8 Elementos multiportas.

O particionamento do grafo de ligação nos campos descritos acima é útil para a obtenção das equações de estado de um sistema automaticamente por meio de um algoritmo (ROSENBERG, 1972). A metodologia de equacionamento faz uso das equações constitutivas que descrevem os campos característicos e a estrutura de junção. Para o campo armazenador independente, que engloba todas as inércias e capacitores com causalidade integral, tem-se:

$$Z_I = S_I X_I \quad (2.4)$$

onde  $X_I$  é o vetor de energia,  $Z_I$  é o vetor de co-energia e  $S_I$  é uma matriz quadrada que caracteriza o campo. Para o campo armazenador dependente, que engloba todas as inércias e capacitores com causalidade diferencial, tem-se:

$$X_D = S_D^{-1} Z_D \quad (2.5)$$

onde  $X_D$  é o vetor de energia,  $Z_D$  é o vetor de co-energia e  $S_D$  é uma matriz quadrada que caracteriza o campo. Finalmente, para o campo dissipador, que engloba todos os elementos dissipadores, com qualquer causalidade, tem-se:

$$d_{sai} = L d_{ent} \quad (2.6)$$

onde  $d_{sai}$  é o vetor de saída,  $d_{ent}$  é o vetor de entrada e  $L$  é a matriz quadrada que caracteriza o campo. Com essas definições, e com o equacionamento da estrutura de junção segundo esta topologia, é possível descrever um sistema na forma da EQ. 2.7

$$\begin{Bmatrix} V \\ X_I \\ Z_D \\ d_{ent} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{UU} & J_{UI} & J_{UD} & J_{UL} \\ J_{IU} & J_{II} & J_{ID} & J_{IL} \\ J_{DU} & J_{DI} & J_{DD} & J_{DL} \\ J_{LU} & J_{LI} & J_{LD} & J_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ Z_I \\ X_D \\ d_{sai} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

que caracteriza a chamada *matriz estrutura de junção* [J].  $U$  é o vetor de entrada e  $V$  é o vetor complementar de potência. Mais adiante neste trabalho, será discutida a expansão de grafos de ligação em diagramas de blocos pela formulação sintetizada na EQ. 2.7, com a matriz estrutura de junção construída manualmente, embora sua obtenção automática também seja possível baseado na metodologia apresentada acima.

## CAPÍTULO 3

### O PROCEDIMENTO GENERALIZADO DE MODELAGEM MODULAR PARA SISTEMAS MECÂNICOS

#### 3.1 INTRODUÇÃO.

Neste capítulo serão apresentadas e discutidas as bases do procedimento de modelagem modular de sistemas dinâmicos, com destaque para sistemas mecânicos, baseado em grafos de ligação. Como se sabe, os grafos de ligação podem ser processados de maneira padronizada para se produzir equações de estado, diagramas de blocos, funções de transferência e códigos computacionais para análise e simulação dos sistemas. Como foi dito no Capítulo 1, no procedimento proposto emprega-se diagramas de blocos para obter a resposta dos sistemas descritos por grafos de ligação. A seguir são comentados alguns conceitos importantes para a compreensão dos tópicos subseqüentes deste capítulo.

##### 3.1.1 MODELOS DE SISTEMAS.

Uma idéia central envolvida no estudo do comportamento dinâmico de um sistema real é a de um modelo do sistema. Modelos são construções simplificadas e abstratas usadas para prever o comportamento de sistemas de interesse. No estudo de um sistema real, geralmente o primeiro passo é a construção de um modelo físico, que é uma versão simplificada do sistema real baseada em hipóteses sobre a sua estrutura e seus elementos, de modo que se possa obter a partir daí o modelo matemático. É preciso que o engenheiro ou pesquisador tenha em vista as características de interesse do sistema, de acordo com os fenômenos que pretende estudar, devendo procurar uma estrutura suficientemente simples, mas que ao mesmo tempo seja a mais representativa possível para se obter respostas confiáveis, dentro de certa tolerância, para cada fenômeno.

Para fechar o modelo de um sistema, o engenheiro deve ainda montar o seu modelo matemático, o que é por vezes feito concomitantemente com a construção do modelo físico. Primeiramente as relações constitutivas, que caracterizam o comportamento dos elementos do sistema, são definidas (analítica ou experimentalmente). Por último, são introduzidas as relações de compatibilidade e de continuidade para que se tenha o modelo do sistema completo.

Esta fase, pela proposta deste trabalho, é realizada pela construção do diagrama de blocos baseado no grafo de ligação.

### 3.1.2 CRITÉRIOS PARA A HIERARQUIZAÇÃO DE SISTEMAS NO PROCEDIMENTO MODULAR.

Para se modelar um sistema é, às vezes, necessário primeiramente dividi-lo em partes menores que podem ser representadas e mesmo estudadas separadamente, uma a uma, para então obter o modelo global desse sistema a partir da conexão de suas partes. Em muitos casos, o particionamento do sistema é convenientemente realizado em vários níveis, sendo que esta divisão não é necessariamente a melhor do ponto de vista do modelamento, e sim a que melhor representa o sistema físico. Não devem fazer parte de um sistema as fontes de energia e os possíveis dispositivos de saída de dados, sendo estes considerados a parte.

Neste trabalho, as partes maiores de um sistema são chamadas de *subsistemas* e as porções mais primitivas são chamadas *componentes*. Tendo em vista este particionamento, dois aspectos fundamentais devem ser observados: 1 – a hierarquia de componentes, subsistemas e sistema nunca é absoluta, pois mesmo as partes mais primitivas de um sistema podem vir a serem modeladas com tal nível de detalhamento que as caracterize como complexos subsistemas; 2 – os modelos dos componentes e subsistemas escolhidos como partes do modelo de um sistema devem sempre manter um significado físico ou tecnológico claro, de maneira que a correlação destes com as correspondentes partes do sistema real o qual representam seja imediata. Este entendimento de um sistema como sendo montagem de várias partes trás uma série de vantagens, tais como: facilitar o modelamento de sistemas complexos, devido ao fato de em geral ser mais fácil descrever as parte do que todo um sistema; permitir a obtenção e modelos mais acurados devido à mencionada facilidade em se aumentar o conhecimento sobre cada componentes de um sistema; e possibilitar a sofisticação do processo de modelagem com a criação de bibliotecas de componentes e subsistemas técnicos (ver Apêndice 2).

### 3.2 DEFINIÇÃO DO PROCEDIMENTO DE MODELAGEM MODULAR PARA SISTEMAS COM ELEMENTOS ESCALARES.

A idéia principal por trás do emprego dos grafos de ligação para a modelagem de sistemas dinâmicos é a possibilidade de se utilizar uma pequena coleção de nove elementos básicos a partir dos quais teoricamente todos os sistemas de engenharia podem ser modelados. O acoplamento entre vários desses elementos é facilmente obtido pela transferência de potência entre eles através das portas de cada elemento, representada por uma ligação.

Na abordagem por fluxo de sinais são utilizados blocos conectados entre si via portas. Em cada porta existe um fluxo de informação em apenas uma direção, que pode ser um único valor ou um vetor de valores. Esta é a maneira usual para a descrição dos sistemas de controle, porém é também utilizada para simulação de sistemas dinâmicos, caracterizados pelo fluxo de potência.

Existe uma quantidade razoável de programas para análise e simulação, que são largamente utilizados para avaliação de sistemas de engenharia, como o *ACSL*®, o *XMaths*®, o *Easy 5*®, e outros (LEBRUN e RICHARDS, 1997). Destaca-se neste trabalho o programa *Matlab*® e sua ferramenta *Simulink*® (MATHWORKS, 2000). Este último utiliza uma interface gráfica com o usuário para a construção dos modelos a partir de diagramas de blocos de maneira muito fácil (por meio de clique-e-arraste), dispondo de uma vasta biblioteca matemática de funções e blocos.

A proposta neste capítulo é a de descrever o procedimento de modelagem, demonstrando a utilização do diagrama de blocos, que não se restringe a uma mera ferramenta de simulação de grafos, mais engloba uma parte significativa da fase de modelamento, quando se tem a possibilidade de utilizar blocos de componentes tecnológicos baseados em blocos dos elementos físicos (massa, rigidez, amortecimento) da técnica dos grafos de ligação.

#### 3.2.1 ELEMENTOS DA EXPANSÃO EM DIAGRAMA DE BLOCOS.

Os diagramas de blocos indicam as quantidades de entrada e saída para cada bloco por meio de relações inerentemente causais. Como mostrado por BREEDVELD (2003), a partir de um grafo de ligação com a causalidade atribuída, sempre é possível expandir sua representação para a forma de fluxo de sinais dos diagramas de blocos. Cada ligação do grafo tem o caráter multiporta, ou seja, representa o transporte de potência denotado pela interação causal entre as variáveis de esforço e de fluxo, que podem ser separadas cada uma em um



sal entre as variáveis de esforço e de fluxo, que podem ser separadas cada uma em um sinal simples como na FIG. 3.1.

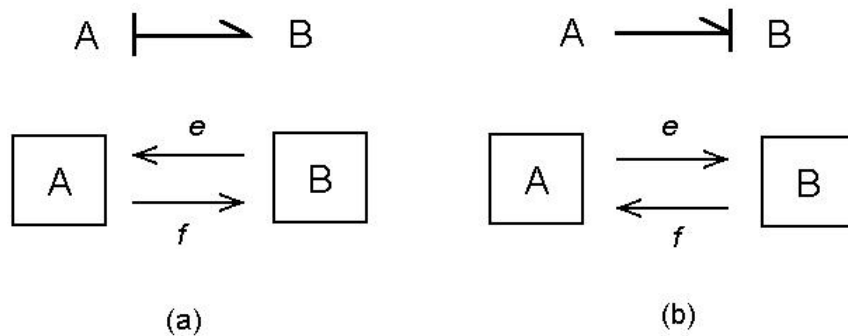


FIG. 3.1 Expansão da representação multiporta em fluxo de sinais.

O componente  $B$  está conectado ao componente  $A$  por meio de um par de sinais que representam as variáveis de potência. Se a potência transmitida entre os componentes for desprezível, significa que uma das variáveis de potência influi muito pouco ou nada no componente, tendo-se então uma ligação ativa, que é representada por apenas um sinal. No caso em que haja um fluxo de potência finito entre os componentes, cada ligação em notação multiporta, com a causalidade atribuída, fornece uma base para que se possam construir linhas de fluxo de sinais, componente a componente, até que todo o sistema seja expandido mantendo-se a topologia do grafo de ligação original.

A construção efetiva de um diagrama de blocos a partir da expansão das ligações multiportas, no entanto, passa pela conversão dos elementos básicos da técnica dos grafos de ligação em blocos, com suas relações constitutivas bem definidas. Esta fase pode ser realizada antes da expansão das ligações, o que facilita bastante a construção do diagrama. Na TAB. 2.2 foram listadas as relações constitutivas dos elementos básicos da técnica para todos os casos possíveis de causalidade que possam ser atribuídos a eles. Dessa forma, são montados os blocos para os elementos de uma porta, mostrados na FIG. 3.2.

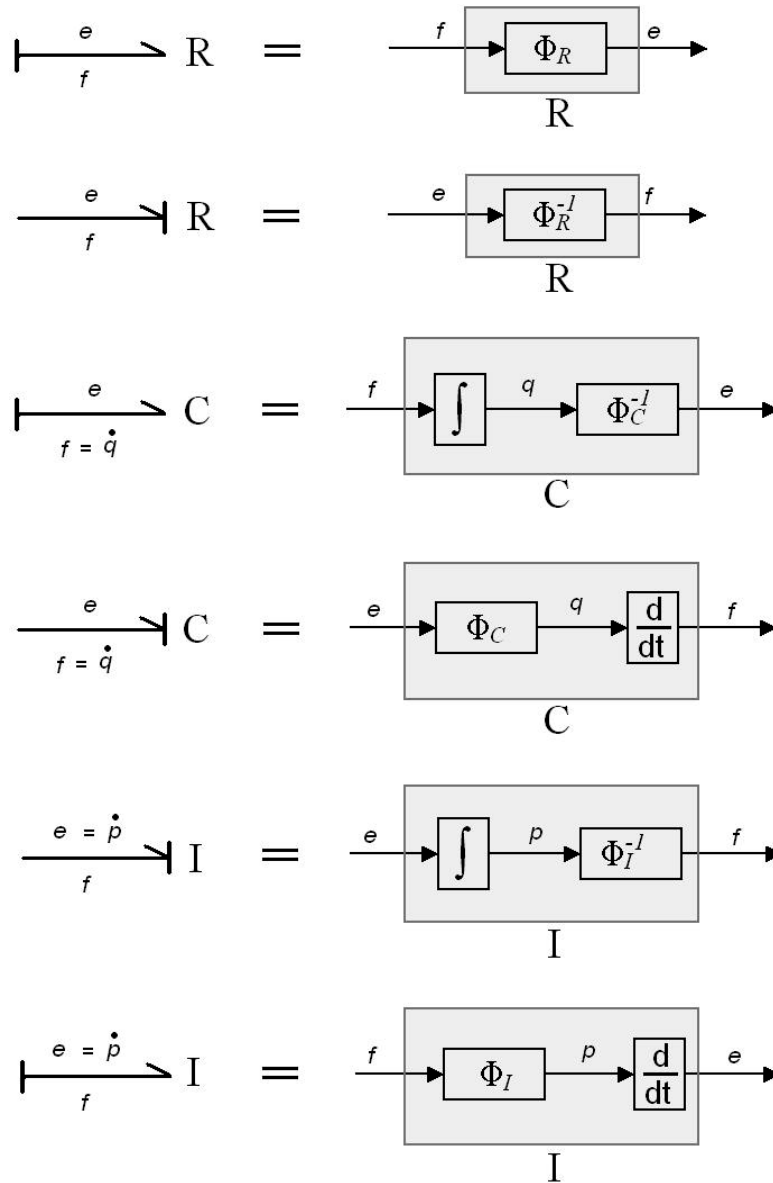


FIG. 3.2 Representação dos elementos de uma porta em diagrama de blocos.

Nestes blocos, as relações constitutivas dos elementos de uma porta são montadas de acordo com a causalidade atribuída ao elemento. Utilizando-se os blocos disponíveis na biblioteca dos programas de desenvolvimento de sistemas fica possível trabalhar com uma gama enorme de relações constitutivas, lineares, não-lineares, lógicas, tabela de pontos, aquisição de dados, combinações de blocos, etc. Este aspecto e outros relativos à sofisticação do procedimento são discutidos no Apêndice 2.

Na FIG. 3.3 são mostrados os blocos relativos aos elementos básicos de duas portas com as causalidades possíveis. Este esquema é aplicável também quando os módulos desses elementos não são constantes (no caso dos *MTF* e *MGY*).

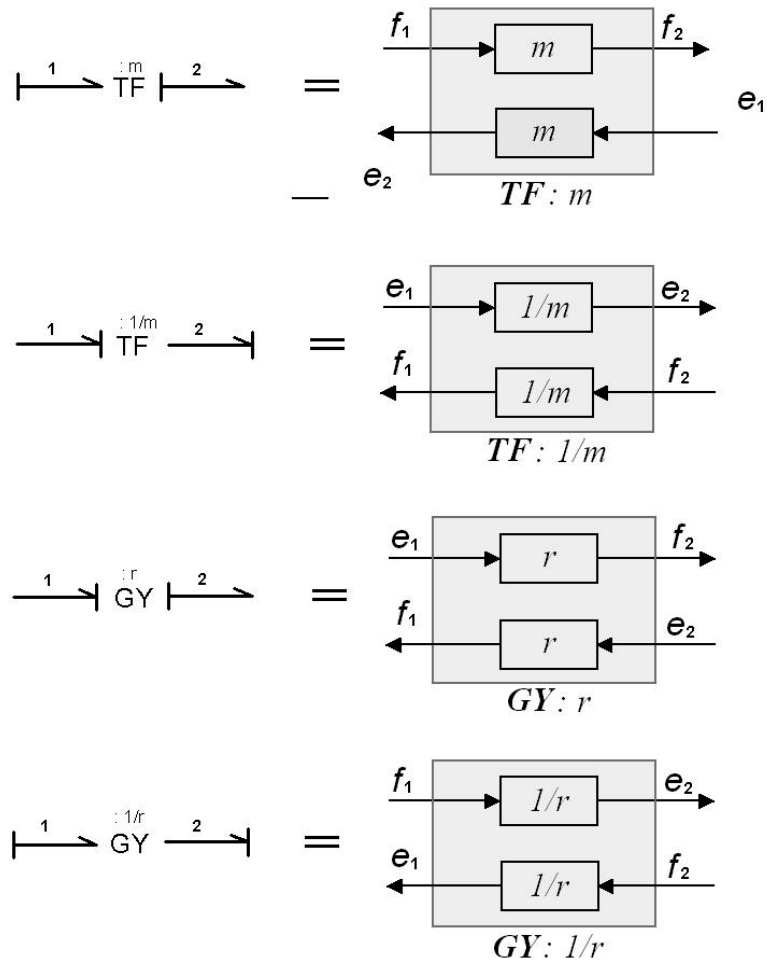


FIG. 3.3 Representação dos elementos de duas portas em diagrama de blocos.

Já na FIG. 3.4 é esquematizada a expansão das junções  $-0$  e  $-1$  conforme as relações mostradas na TAB. 2.2, resultante da atribuição de causalidade escolhida.

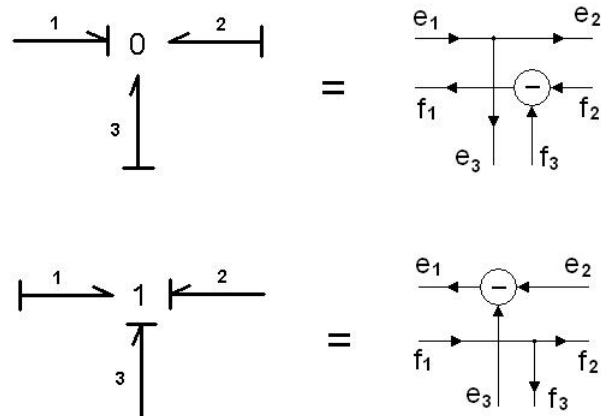


FIG. 3.4 Representação dos elementos de três portas em diagrama de blocos.

Tendo sido montados os blocos representativos dos elementos de um sistema, e a separação das ligações multiportas em ligações simples, parte-se para a montagem do diagrama de blocos do sistema. Para isso, são empregados os símbolos básicos apresentados na FIG. 3.5.

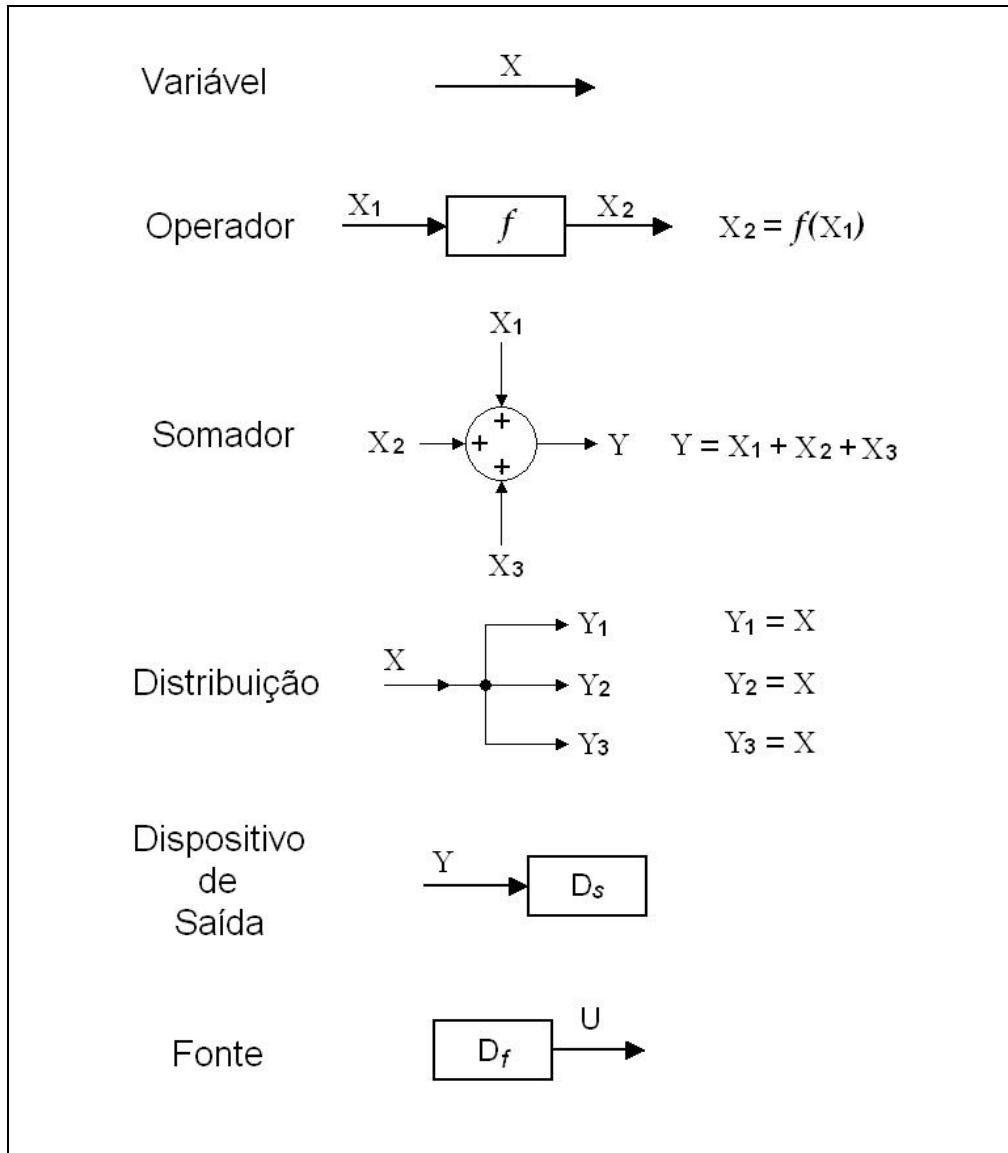


FIG. 3.5 Elementos básicos para a construção de diagramas de blocos de sistemas dinâmicos.

Cada linha orientada (ou sinal) representa o transporte de uma variável do sistema (podendo também representar a entrada de sinais de controle, constantes ou não, geralmente externos ao sistema). As operações envolvendo essas variáveis são feitas através dos blocos

operadores, que podem ser componentes ou subsistemas, onde cada bloco apresenta um tipo particular de relação constitutiva entre suas variáveis de entrada e de saída, e através de somadores. Quando uma variável é requerida por mais de um bloco, utiliza-se uma distribuição ou tomada de variável, representada por um nó de onde partem vários sinais iguais. Além desses símbolos, é comum se utilizar os blocos fonte, que contabiliza a entrada de energia no sistema, e os dispositivos de saída. Quando se trabalha com a notação vetorial dos grafos multiligação, são ainda utilizados, em adição aos elementos apresentados na FIG. 3.5, os elementos de composição e de distribuição de sinais (blocos multiplexadores) e os blocos seletores de sinais. O emprego de todos esses símbolos será visto nas próximas seções.

O modelo de um sistema dinâmico em diagrama de blocos consiste, portanto, de três partes: fontes, o sistema a ser modelado e dispositivos de saída – como no esquema da FIG. 3.6.

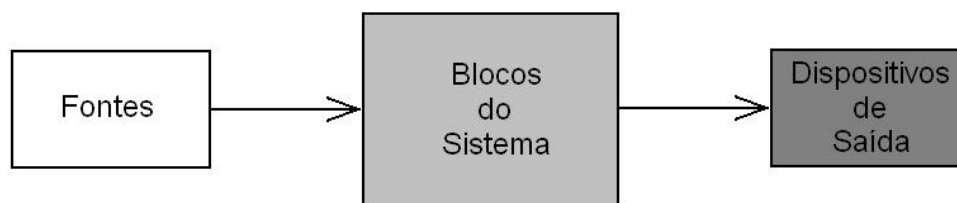


FIG. 3.6 Elementos de um modelo em diagrama de blocos.

O elemento central, o *sistema*, é a representação em diagrama de blocos de um sistema dinâmico a ser modelado. As *fontes* são as entradas aplicadas ao sistema dinâmico. Podem incluir constantes, geradores de funções como senóides ou degrau, ou ainda sinais personalizados pelo programador. A saída do sistema é entregue aos dispositivos de saída, que conferem meios de se visualizar e/ ou armazenar as variáveis de interesse de cada simulação.

Por vezes, em modelos em diagramas de blocos, um ou mais desses três elementos pode faltar. Por exemplo, pode-se desejar modelar o comportamento na ausência de forças de um sistema inicialmente fora de sua condição de equilíbrio. Tal modelo não deve ter entradas, mas deve conter blocos de sistema e, provavelmente, dispositivos de saída. Também é possível construir modelos que possuem fontes e dispositivos de saída, mas nenhum bloco de sistema. Por exemplo, se se necessita de um sinal que seja composto pela soma de vários outros sinais. Tais sinais podem ser facilmente gerados usando-se blocos de fontes e armazenados em arquivos para uso posterior (DABNEY e HARMAN, 2003).

Tendo sido montados os blocos relativos aos elementos básicos dos grafos, e conectados pelo fluxo de sinais, buscaram-se então possíveis condensações no diagrama e formas apropriadas de representação.

### 3.2.2 CONSIDERAÇÕES ACERCA DA FORMA DE SE REPRESENTAR O DIAGRAMA DE BLOCOS.

O diagrama de blocos, obtido como discutido na seção anterior, pode ser representado de pelo menos quatro maneiras equivalentes: (i) por meio de um bloco condensado equivalente do sistema; (ii) por blocos representativos dos elementos do grafo do sistema; (iii) por blocos representativos dos elementos do grafo com blocos das junções e (iv) utilizando blocos de campos de estrutura de junção. Na opção (i) seria possível obter tal nível de condensação empregando-se funções de transferência ou a técnica denominada álgebra dos diagramas de blocos, como é discutido amplamente na bibliografia básica deste trabalho (CANNON, Jr., 1967), (ROSENBERG e KARNOPP, 1983) e (KARNOPP *et al.*, 1990). A vantagem seria a redução de um diagrama extenso em um único bloco com uma entrada e uma saída. Este procedimento, embora possa ser usado, não é incentivado neste trabalho, pois elimina o sentido físico dos elementos do grafo expressos pelos blocos. Ao invés disso, é desejável agrupar alguns componentes e subsistemas em subsistemas maiores que possam ser identificados com os respectivos componentes físicos do sistema que se esteja modelando.

A seguir, apresentam-se as formas de representação de diagramas de blocos por meio de um exemplo, que serve também para se demonstrar os aspectos do procedimento discutidos até aqui. Para isso é considerado o sistema mecânico rotativo da FIG. 3.7, que consiste em três engrenagens montadas em eixos e apoiadas em mancais (não mostrados).

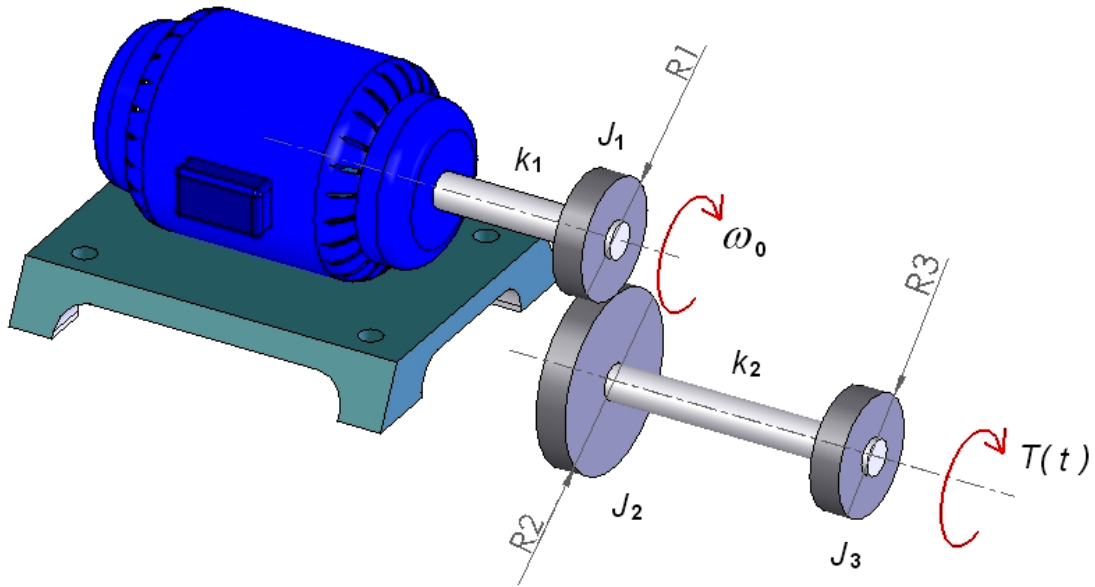


FIG. 3.7 Sistema mecânico rotativo.

Os efeitos de flexibilidade dos eixos e do atrito nos mancais são considerados como sendo grandes o suficiente para não serem desprezados sendo, portanto, incluídos na formulação. Existe ainda um torque externo atuante na Engrenagem 3 em sentido contrário ao da rotação desta. Para este exemplo, o motor é tratado como sendo uma fonte de energia ao sistema e não como um subsistema. O grafo de ligação desse sistema é montado como na FIG. 3.8, baseado no esquema mostrado.

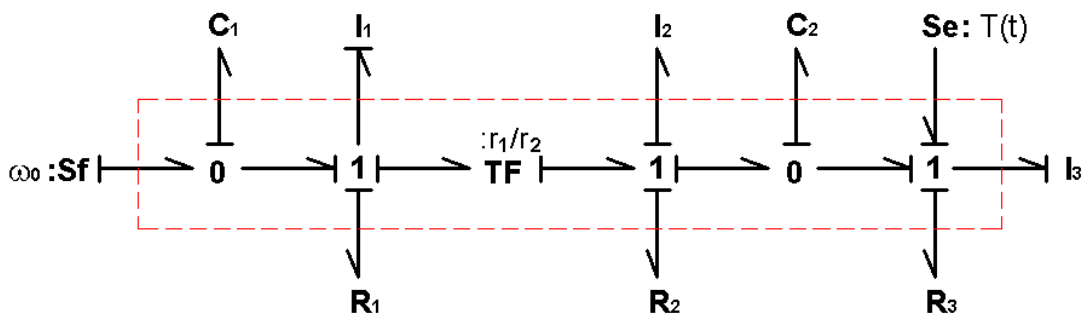


FIG. 3.8 Grafo de ligação do sistema mecânico rotativo.

A montagem do diagrama de blocos feita a partir de blocos representativos dos elementos do grafo da FIG. 3.8 é realizada diretamente pela reposição dos elementos do grafo pelos seus correspondentes em diagrama de blocos como mostrado na TAB. 3.2, TAB. 3.3 e TAB. 3.4. A FIG. 3.9 exhibe o diagrama assim montado.

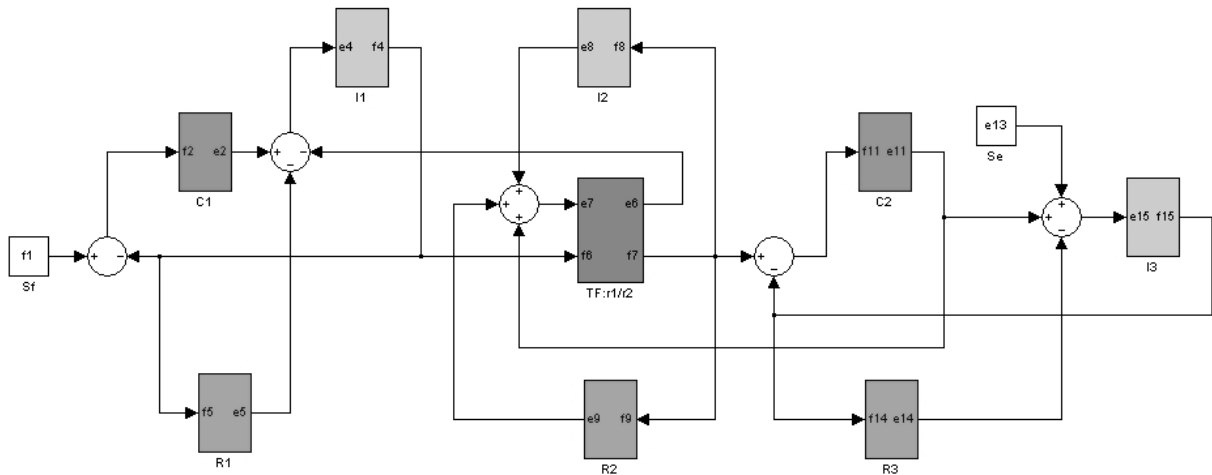


FIG. 3.9 Diagrama com blocos representativos dos elementos do grafo do sistema.

É de se notar que, embora não fique muito claro nesta representação, este diagrama preserva todas as relações causais do grafo original. Uma outra forma representativa é caracterizada pelo emprego dos blocos correspondentes aos elementos do grafo, incluindo os das junções, como na FIG. 3.10.

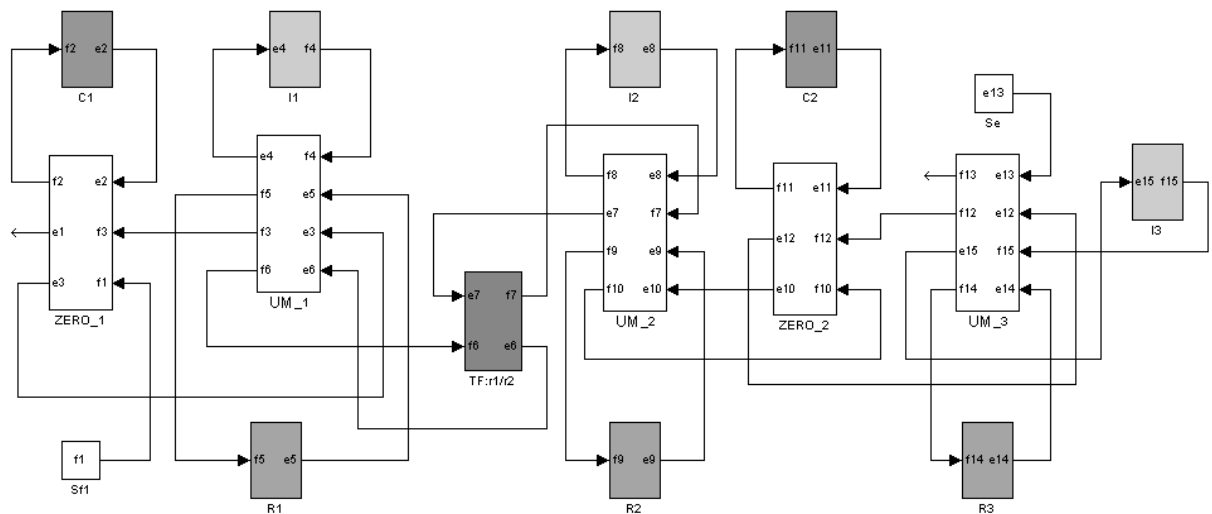


FIGURA 3.10 Diagrama com blocos representativos dos elementos do grafo com junções.

Nesta forma de representação, onde são construídos blocos para todos os elementos do grafo, é possível se obter maior organização na montagem e na aparência do diagrama, porém com a necessidade de se construir uma quantidade maior de blocos. Na verdade, pouco importa se o diagrama de blocos se assemelha ou não com o grafo original, tendo em vista que neste procedimento procura-se buscar uma representação mais próxima dos componentes



físicos de engenharia do que dos elementos físicos básicos do grafo. Os blocos de elementos de junções são montados por meio de somadores e distribuições, tendo-se em vista as relações causais das variáveis de esforço e de fluxo para cada elemento de junção do grafo. Na FIG. 3.11 têm-se amostras para um bloco de junção – 0 e de junção – 1 do grafo do sistema.

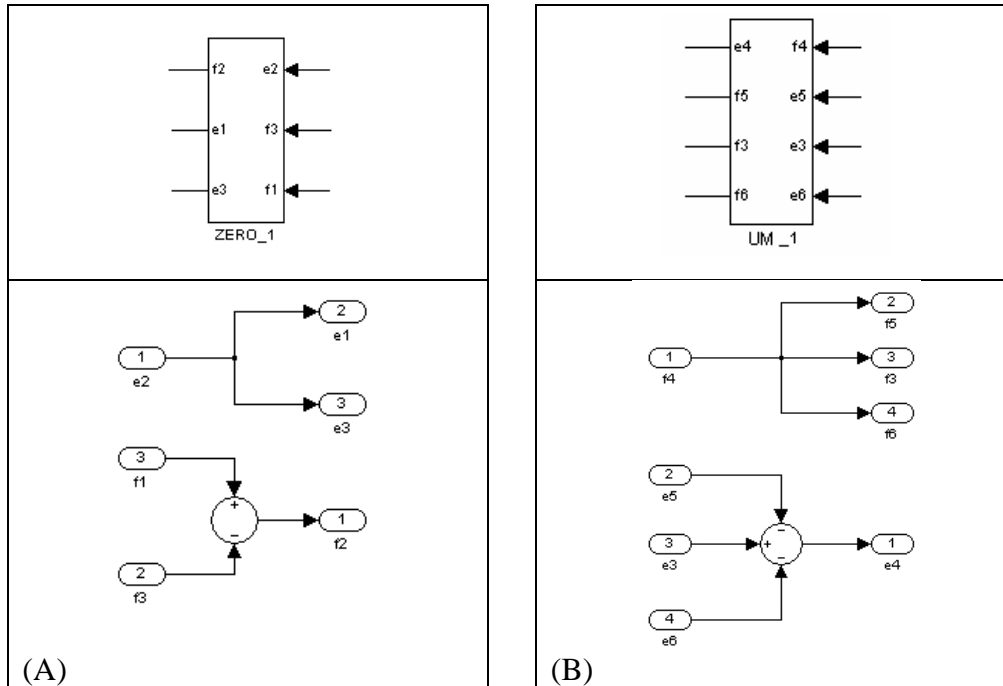


FIG. 3.11 Exemplos de blocos de elementos de junção. (A) junção – 0. (B) junção – 1.

Ainda é possível organizar os elementos do grafo de ligação do sistema de acordo com a forma descrita por ROSENBERG (1971) com o emprego de blocos de campos de estrutura de junção. Nesta abordagem, são construídos blocos que relacionam os blocos fontes de energia, os blocos dissipativos, os blocos armazenadores dependentes e os blocos armazenadores independentes. A estrutura de junção do grafo, delimitada pela área pontilhada na FIG. 3.8, é descrita na forma da matriz de estrutura de junção, como esquematizado na FIG. 3.12 (ver Apêndice A para detalhe das matrizes). Esta representação permite que se visualize melhor a topologia do sistema, e também confere uma grande condensação à representação, por ser possível se descrever qualquer sistema com até cinco blocos apenas. A carga computacional em simulações realizadas por esta abordagem tende a ser menor em relação às outras duas, pois uma parte do equacionamento é feita previamente pelo programador no ato da construção da matriz de estrutura de junção. Observa-se, entretanto, que o diagrama montado desta forma não permite grupamentos entre os elementos físicos básico do grafo para que se obtenha uma representação mais geral e tecnológica para os elementos do sistema físico.

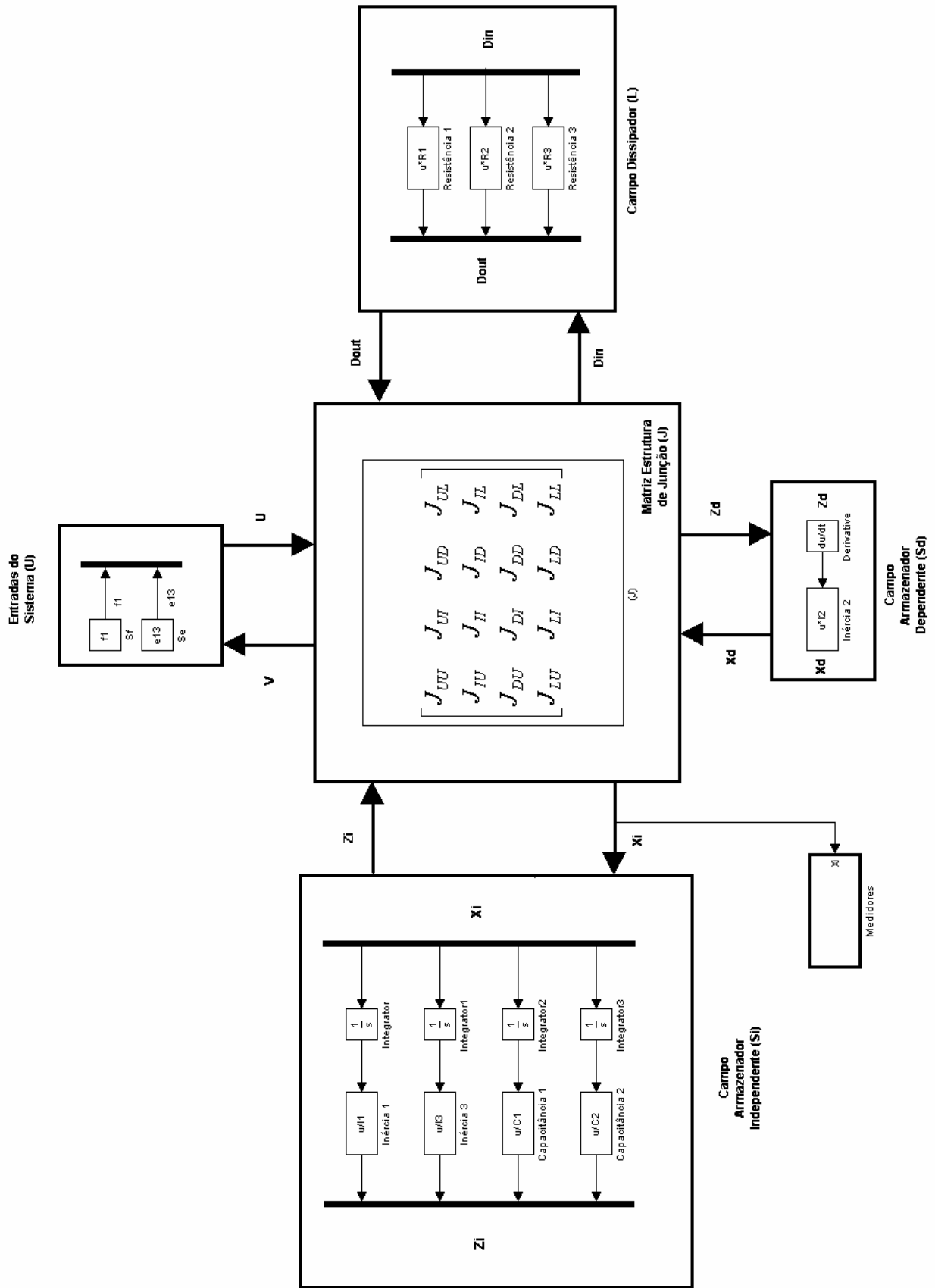


FIG. 3.12 Diagrama com blocos de campos de estrutura de junção.

A simulação direta de qualquer uma das formas de diagramas apresentadas leva necessariamente aos mesmos resultados, pois se tratam de representações equivalentes obtidas a partir do mesmo grafo. A seguir são mostrados alguns resultados para a simulação do sistema, considerando-se uma velocidade angular do motor de 1.200rpm e torque aplicado de 0,055Nm. Na FIG. 3.13 (A) é mostrada a velocidade angular da Engrenagem 1 e, na Figura 3.13 (B) são mostrados os torques inerciais resultantes nas Engrenagens 1 e 3.

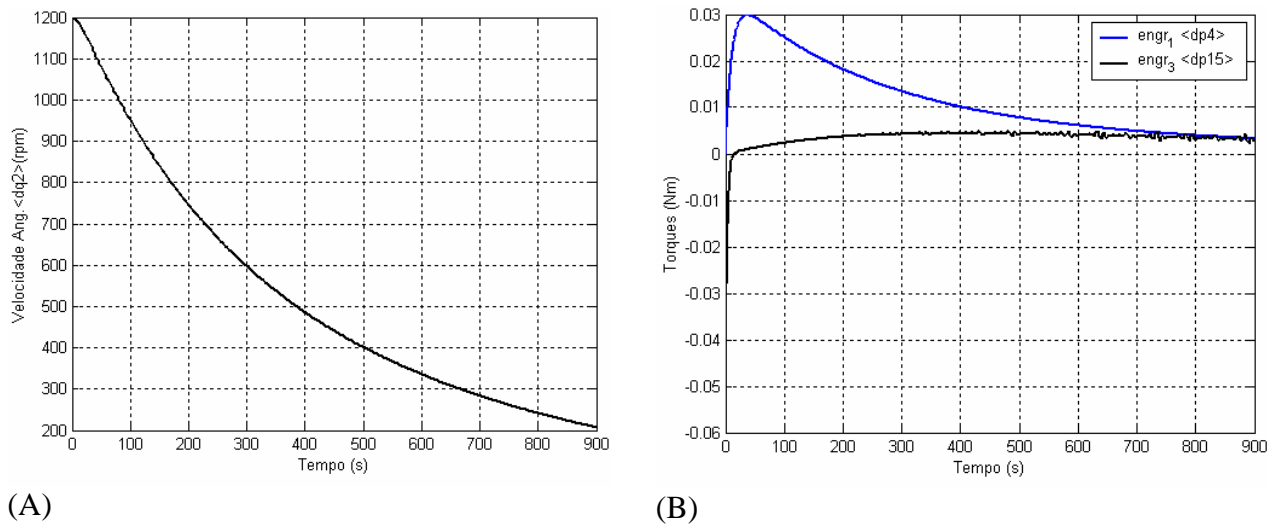


FIG. 3.13 Respostas do sistema. (A) – Velocidade angular da Engrenagem 1.

(B) – Torques resultantes nas engrenagens 1 e 3.

Este exemplo expõe bem a facilidade para se realizar simulações de sistemas dinâmicos a partir de diagramas de blocos sem a necessidade de equacionamento. Entretanto, na medida em que se passa a considerar sistemas cada vez maiores, alguns problemas podem começar a ocorrer, tais como (a) a presença de muitas linhas de sinais, (b) a necessidade de se construir muitos blocos, (c) o fato de o diagrama não se assemelhar em nada com o sistema que representa e (d) ineficiência no tratamento de problemas com parâmetros distribuídos. No modelo estudado não foi utilizado o artifício de agrupamento de componentes em subsistemas, uma vez que os elementos físicos presentes no sistema (motor, engrenagens, eixos e mancais) puderam cada um ser representado por apenas um elemento da técnica dos grafos de ligação. No entanto, de maneira geral os problemas levantados em (a), (b) e (c) podem ser parcial ou totalmente contornados de duas maneiras: buscando-se a representação do diagrama na forma de campos de estrutura de junção como aquele mostrado na FIG. 3.12 ou, fazendo-se o agrupamento de componentes em subsistemas, que equivalem aos sistemas físicos ou

tecnológicos do modelo real, num nível em que os blocos e, portanto os modelos dos subsistemas que representam, sejam os mais reutilizáveis possíveis (LEBRUN e RICHARDS, 1997).

Já o problema apontado em (d) requer a utilização dos grafos multiligação para a sua correta descrição, dado o particionamento de domínios, sob pena de se ter que utilizar desnecessariamente uma quantidade muito grande de blocos para a representação de um subsistema. Ainda, o problema da quantidade de blocos apontado em (b) pode ser contornado também com o emprego da notação multiligação, sem o impedimento a possíveis agrupamentos subsequentes de blocos. A partir do grafo multiligação também é possível se construir diagramas de blocos para a simulação de sistemas mecânicos, como será visto no próximo item.

### 3.3 DEFINIÇÃO DO PROCEDIMENTO DE MODELAGEM MODULAR PARA SISTEMAS COM ELEMENTOS MULTIPORTAS.

A extensão multiporta dos campos de um grafo de ligação confere os meios para se tratar problemas com parâmetros distribuídos na técnica, como por exemplo, problemas de dinâmica de estruturas. Na verdade inúmeros problemas de engenharia – como aqueles de sistemas multicorpos, de dinâmica veicular ou de descrição de manipuladores robóticos, dentre outros – ainda que passíveis de serem descritos em parâmetros concentrados, podem ser melhor representados com a utilização de campos multiportas. Em síntese, sistemas mecânicos mais extensos (complexos) sempre podem ser descritos pela notação vetorial dos grafos de ligação pela simples organização das equações constitutivas na forma matricial, e então resolvidos com a construção de diagramas de blocos baseados em grafos multiligação, de maneira semelhante à utilizada anteriormente com ligações simples. Este procedimento confere grande condensação à representação em diagrama de blocos. Observa-se também que o emprego da notação vetorial para a construção de um diagrama de blocos não elimina a possibilidade de se utilizar o recurso do agrupamento, que pode ou não ser feito desde que se mantenha o significado físico dos blocos resultantes. Objetivando-se a descrição do procedimento de modelagem modular com elementos multiportas, serão discutidos a seguir alguns casos relacionados à dinâmica de estruturas.

Na abordagem de sistemas estruturais, é comum associar as formulações dos grafos de ligação com a os elementos finitos, tirando vantagem da característica dos grafos de permitir facilmente o acoplamento entre subsistemas contínuos e discretos, e também ao fato

de as matrizes estruturais do MEF serem campos explícitos para a técnica dos grafos de ligação.

A metodologia empregada neste trabalho faz uso da representação de sistemas estruturais proposta por Da SILVA e SPERANZA NETO (1993), onde o modelo estrutural gerado pelo MEF é inteiramente aproveitado na técnica dos grafos de ligação. Em tal representação, as matrizes de massa  $[M]$ , rigidez  $[K]$  e amortecimento  $[B]$  do MEF são relacionadas diretamente com as matrizes dos campos inercial  $[I]$ , capacitivo  $[C]$  e resistivo  $[R]$  dos grafos, como mostrado na FIG. 3.14.

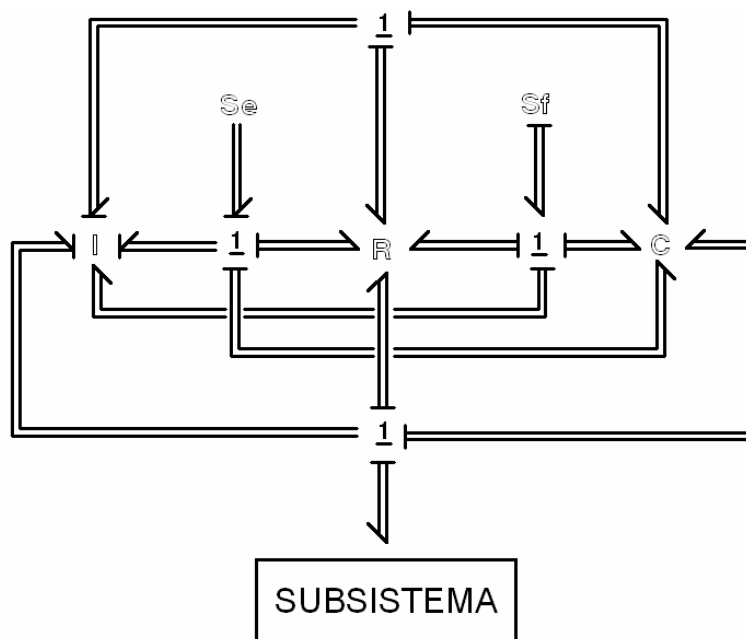


FIG. 3.14 Grafo multiligação genérico de estruturas.

No grafo multiligação da FIG. 3.14 os graus de liberdade da estrutura são divididos em quatro tipos, associados a cada uma das junções vectoriais  $\underline{1}$ , as quais são identificadas por  $V_i$  quando relacionadas com os graus de liberdade internos;  $V_s$  quando relacionadas com os graus de liberdade que interagem com subsistemas externos;  $V_e$  quando relacionadas com os graus de liberdade que recebem esforço externo; e  $V_f$  quando relacionadas com os graus de liberdade que recebem fluxo prescrito (Da SILVA, 1994).

Essa divisão dos graus de liberdade de estrutura requer um particionamento de cada uma das matrizes dos campos  $[I]$ ,  $[C]$  e  $[R]$  em quatro linhas de submatrizes  $S_{ij}$  de acordo com a topologia indicada pela EQ. 3.1, para que as transformações de potência nos campos sejam corretamente descritas para todos os graus de liberdade do sistema.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} & \mathbf{S}_{14} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} & \mathbf{S}_{24} \\ \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{S}_{33} & \mathbf{S}_{34} \\ \mathbf{S}_{41} & \mathbf{S}_{42} & \mathbf{S}_{43} & \mathbf{S}_{44} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Onde:

$\mathbf{S}_{1j}$  – Submatrizes referentes aos graus de liberdade internos;

$\mathbf{S}_{2j}$  – Submatrizes referentes aos graus de liberdade que interagem com subsistemas externos;

$\mathbf{S}_{3j}$  – Submatrizes referentes aos graus de liberdade que recebem esforço externo;

$\mathbf{S}_{4j}$  – Submatrizes referentes aos graus de liberdade que recebem fluxo prescrito.

### 3.3.1 MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE PROBLEMAS DE CARGA MÓVEL SOBRE VIGA.

A seguir são considerados alguns modelos para auxiliar na descrição do procedimento modular com elementos multiportas em diagrama de blocos. Primeiramente são estudados três problemas de carga móvel sobre viga, partindo-se de um modelo com carregamento constante depois, estendendo para um modelo onde o carregamento provém de um oscilador e por último considerando o deslocamento de um veículo plano com dois graus de liberdade. Nesses estudos especificamente são construídos também os modelos de estados de maneira semelhante àquela feita por ANDRADE (1995) e BESSA (2000), com o objetivo de se realizar uma comparação entre os resultados obtidos via fluxo de sinais no *Simulink*® e via equacionamento clássico dos grafos, e também uma comparação entre as duas abordagens.

Nos modelos tem-se uma viga bi-apoiada composta por quatro elementos de viga de Euler-Bernoulli, totalizando oito graus de liberdade globais, com as características mostradas na TAB. 3.1.

TAB. 3.1 Dados da viga.

Característica	Valor
Módulo de Elasticidade [GPa]	507
Momento de inércia ( $I_z$ ) [ $m^4$ ]	$9,50 \times 10^{-7}$
Área da seção transversal [ $m^2$ ]	$1,25 \times 10^{-3}$
Massa linear [kg/m]	9,75
Comprimento [m]	1,0

O método de construção da matriz de amortecimento estrutural  $[B]$  utilizado aqui é o proposto por Rayleigh, que é feito através de uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez, na forma apresentada na EQUAÇÃO 3.2 (BIGGS, 1964):

$$[B] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (3.2)$$

onde os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  são funções de amortecimentos críticos e de frequências naturais circulares para dois modos normais quaisquer da estrutura. São considerados para este estudo os valores 5% e 1% respectivamente.

Nos exemplos que se seguem, a carga móvel tem uma velocidade de 1m/s e inicia o deslocamento a partir do repouso em  $t_0 = 0$  e  $S_0 = -0,25m$  continuando até um ponto já fora da viga. Considera-se primeiramente um carregamento constante, equivalente ao peso gerado por uma massa de 20kg, como mostrado na FIG. 3.15.

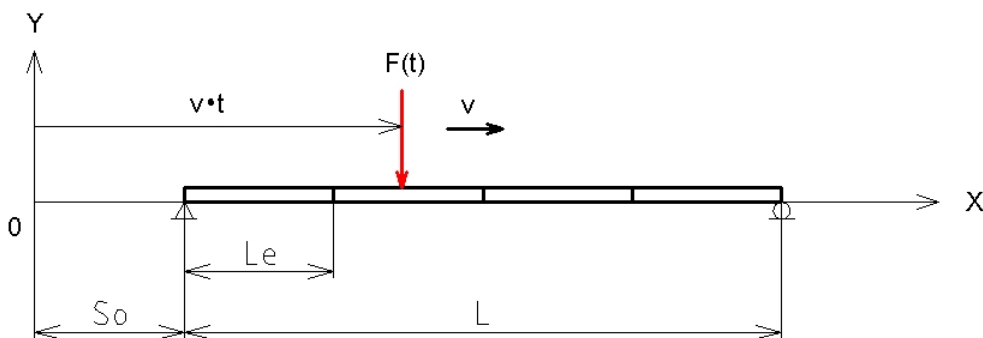


FIG. 3.15 Viga bi-apoiada submetida a uma carga móvel de módulo constante.

Partindo desse modelo, constrói-se o grafo de ligação que o representa baseado no grafo multiligação de estruturas, conforme apresentado na FIG. 3.16.

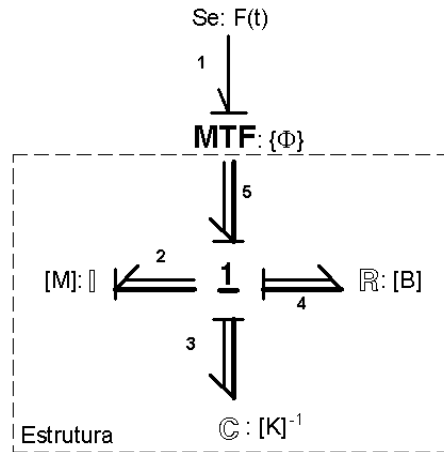


FIG. 3.16 Grafo de ligação do modelo de carga constante móvel sobre viga.

O efeito de deslocamento da carga é dado no grafo pelo multitransformador modulado (**MTF**), constituído pelo vetor  $\Phi$  com dimensão igual ao número de graus de liberdade do sistema. Tal vetor é modulado pela posição  $\bar{x}_e$  da carga sobre a viga dada por:

$$\bar{x}_e = vt - (n_e - 1)L_e \quad (3.3)$$

onde  $v$  é a velocidade da carga,  $n_e$  é o número do elemento em que se encontra a carga e  $L_e$  é o comprimento deste elemento. O multitransformador, então, faz com que a carga móvel seja considerada somente nos graus de liberdade do elemento em que se encontre, usando também as funções de interpolação do elemento para se contabilizar a sua influência nesses graus de liberdade, para qualquer posição desta sobre o elemento.

O modelo de estado associado a este grafo pode se expresso como na EQ. 3.4, sendo o vetor de estado, conforme o grafo do modelo, dado pelos momentos lineares e os deslocamentos nodais da viga, como na EQ. 3.5:

$$\dot{X} = AX + \bar{B}U \quad (3.4)$$

$$X = [p_2 \quad q_3]^T \quad (3.5)$$

Chegando-se, pelo equacionamento do grafo, à forma matricial das equações de estado do modelo, mostrada na EQ. 3.6. Detalhes da obtenção deste e dos outros modelos matemáticos podem ser encontrados no Apêndice 1.



$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\mathbf{q}}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[B][M]^{-1} & -[K] \\ [M]^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\Phi\} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \{e_1\} \quad (3.6)$$

O mesmo modelo de estado do sistema pode ser construído em diagrama de blocos diretamente do grafo da FIG. 3.16 sem a necessidade de se montar equações, à semelhança do procedimento exposto na seção anterior. A FIG. 3.17 mostra o diagrama de blocos do sistema, construído no *Simulink*®.

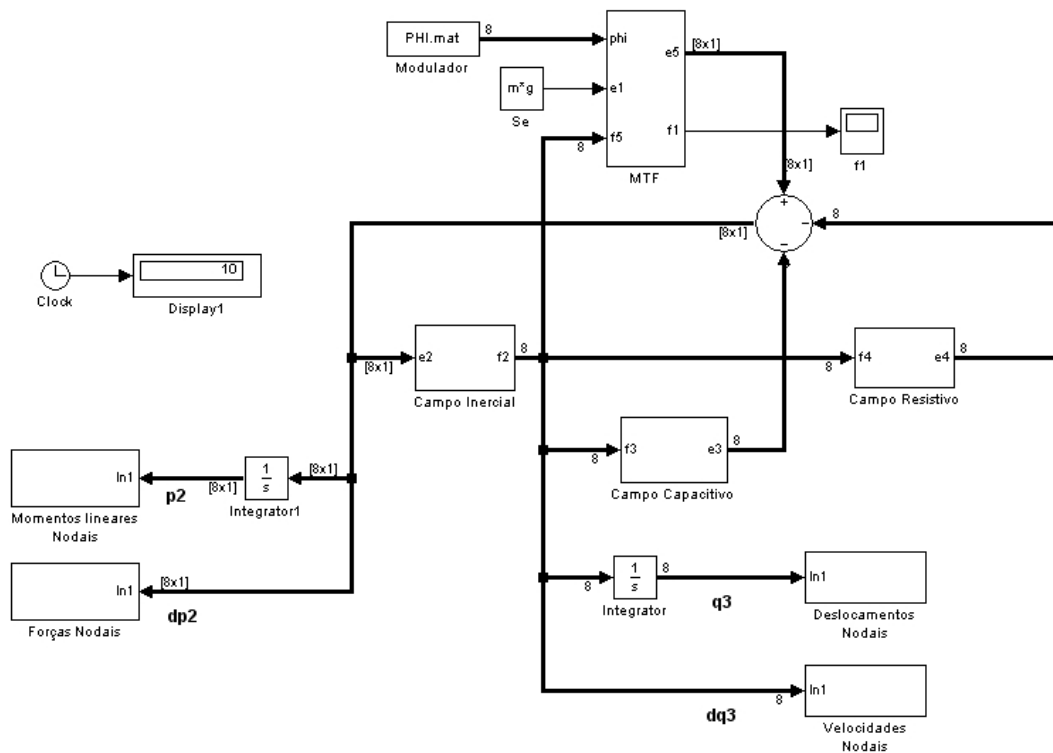


FIG. 3.17 Diagrama de blocos do modelo de carga constante móvel sobre viga.

Os campos neste modelo são descritos do modo indicado na FIG. 3.2, sendo as suas relações constitutivas dadas neste caso pelas matrizes do MEF. Tais relações matriciais implicam a transferência de sinais vetoriais entre os componentes, caracterizados pelas linhas mais espessas (com dimensão indicada pelo número próximo da linha). O valor e a dimensão do sinal de saída de cada bloco são dados pelo produto vetorial entre o sinal de entrada e a matriz do campo. Em adição aos blocos do sistema, utilizam-se também alguns blocos de saídas para o armazenamento das variáveis de interesse.

Vários resultados podem ser extraídos desta simulação, sendo os principais aqueles relacionados aos estados e armazenados nos blocos de saída. O deslocamento e a velocidade do centro da viga, por exemplo, são mostrados na FIG. 3.18.

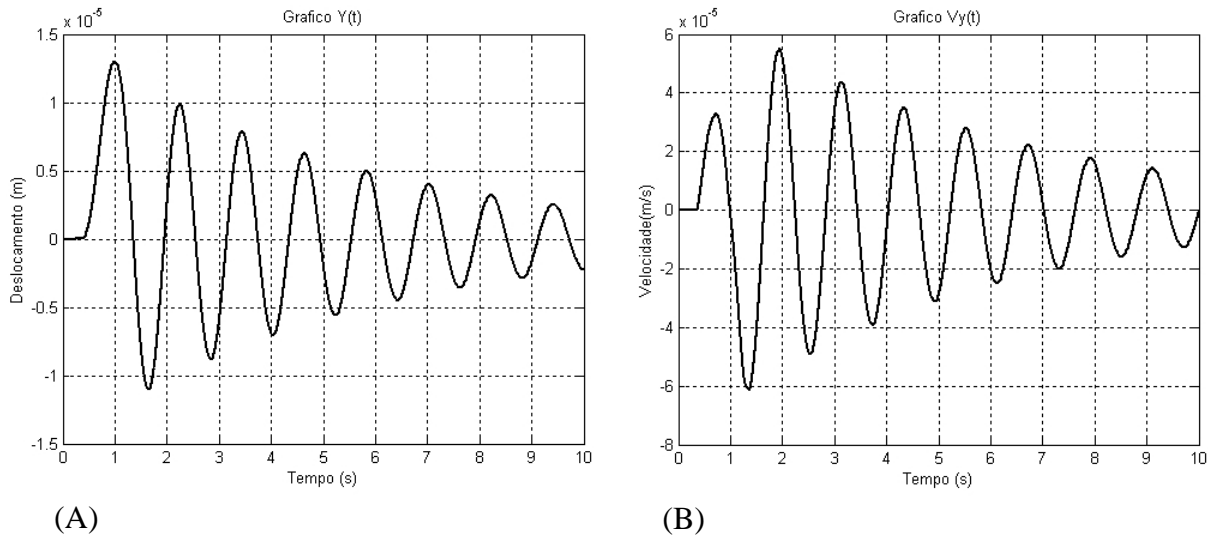


FIG. 3.18 Respostas do sistema. (A) – Deslocamento vertical do centro da viga.  
(B) – Velocidade do centro da viga.

Continuando a discussão do problema de carga móvel sobre viga, é considerado agora um oscilador simples constituído de um bloco ligado a um conjunto mola-amortecedor em paralelo como esquematizado pela FIG. 3.19. Neste exemplo ocorre a interação entre um subsistema com parâmetro concentrado (sinais escalares) e um subsistema com parâmetro distribuído (sinais vetoriais).

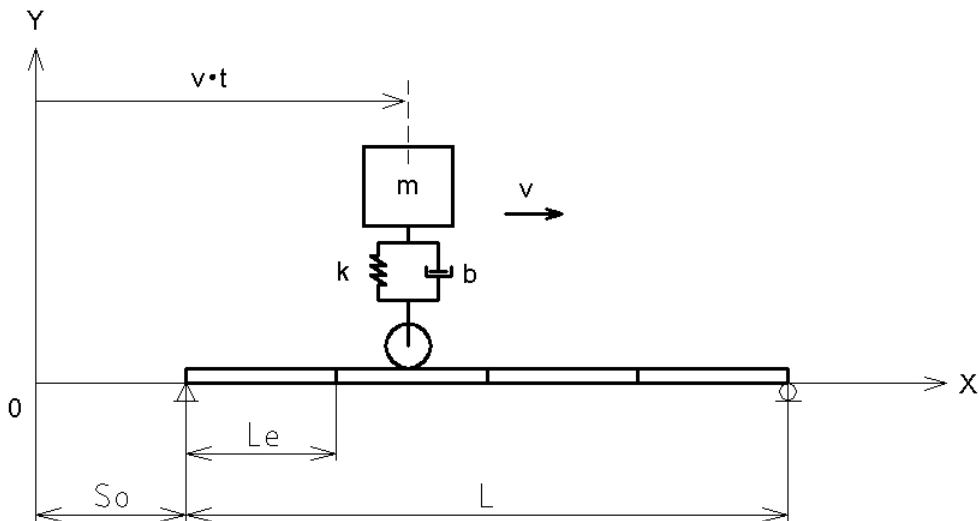


FIG. 3.19 Viga bi-apoiada submetida ao deslocamento de um oscilador.

O passo seguinte, a montagem do grafo do sistema, é feito com base no modelo esquematizado. Na FIG. 3.20 tem-se o grafo do sistema com a indicação dos dois subsistemas que o compõe, onde  $Se$  contabiliza o peso do bloco, a massa  $m$  do bloco é 20kg, o coeficiente de rigidez  $k$  e o coeficiente de amortecimento  $b$  do oscilador são respectivamente iguais a 20.000N/m e a 300Ns/m.

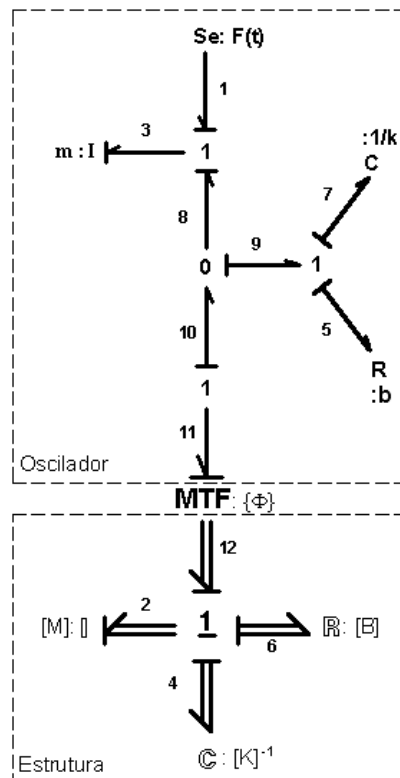


FIG. 3.20 Grafo de ligação do modelo de oscilador móvel sobre viga.

Os estados deste modelo como apresentado na EQ. 3.7 são os momentos lineares e os deslocamentos nodais e do oscilador.

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{p}_2 \ p_3 \ \mathbf{q}_4 \ q_7\}^T \quad (3.7)$$

As equações de estados são formuladas de acordo com o procedimento padrão dos grafos, sendo mostradas na forma matricial na EQ. 3.8.

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\mathbf{p}}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_4 \\ \dot{\mathbf{q}}_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -([B] + \{\Phi\}b\{\Phi\}^T)[M]^{-1} & \{\Phi\}\frac{b}{m} & -[K] & -\{\Phi\}k \\ b\{\Phi\}^T[M]^{-1} & -\frac{b}{m} & 0 & k \\ [M]^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \{\Phi\}^T[M]^{-1} & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{q}_4 \\ \mathbf{q}_5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} [\mathbf{e}_i] \quad (3.8)$$

O diagrama de blocos do sistema, construído com base em sua representação em grafos de ligação é mostrado na FIG. 3.21, onde a viga é idêntica àquela do modelo anterior.

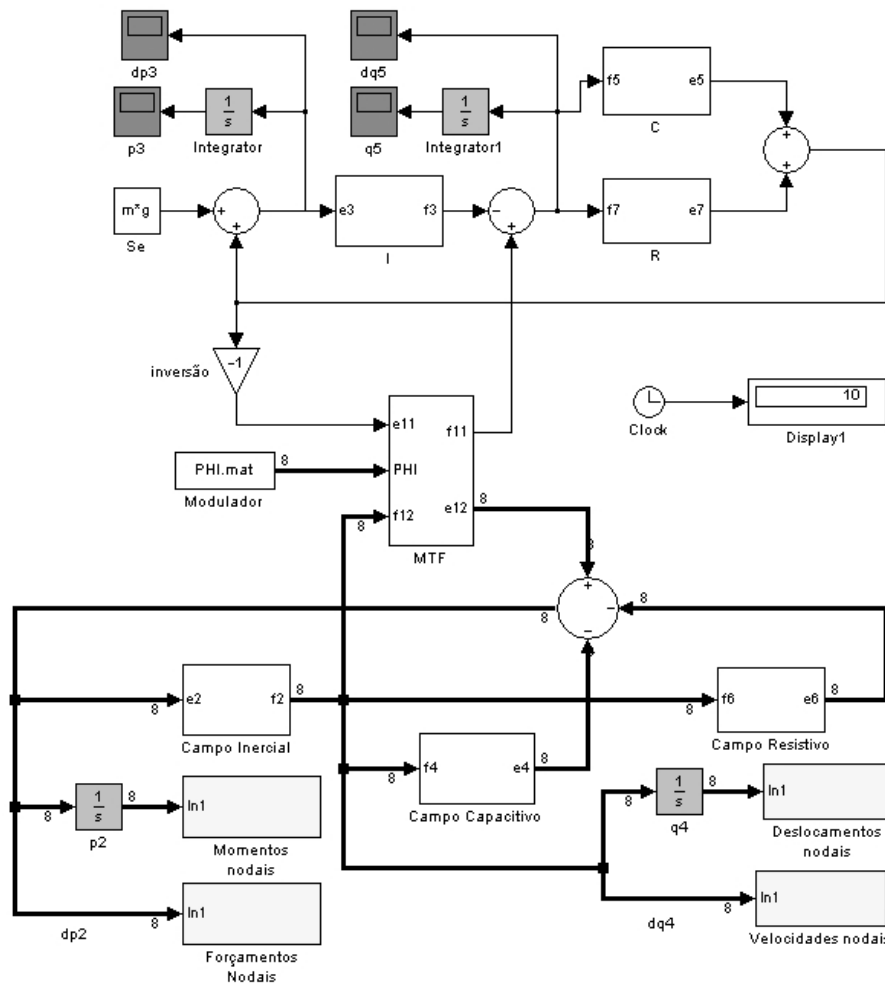
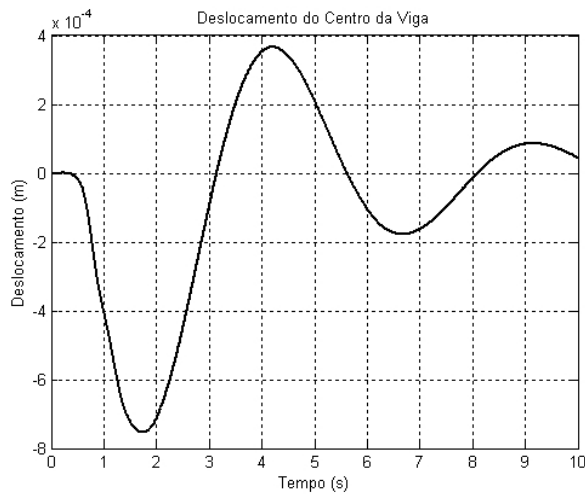


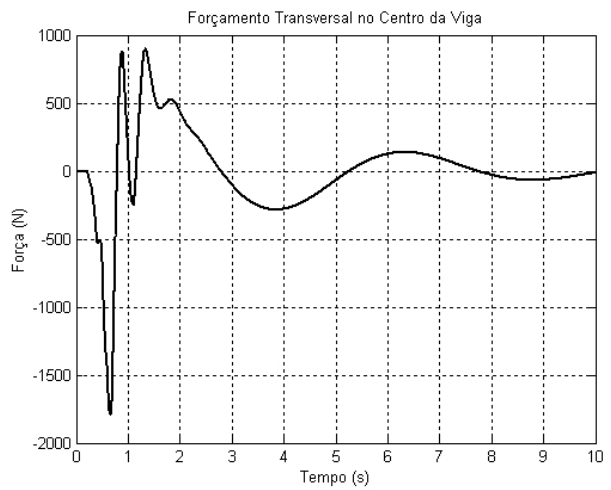
FIG. 3.21 Diagrama de blocos do modelo de oscilador móvel sobre viga.

A interação entre os subsistemas mais uma vez é feita por intermédio do multi-transformador modulado que faz o acoplamento entre o oscilador descrito por sinais escalares e a viga com sinais vetoriais.

Em seguida à construção do diagrama de blocos efetua-se a simulação para se obter as respostas do sistema para as variáveis armazenadas nos dispositivos de saída. A FIG. 3.22 e a FIG. 3.23 mostram gráficos relativos à viga e ao oscilador respectivamente.



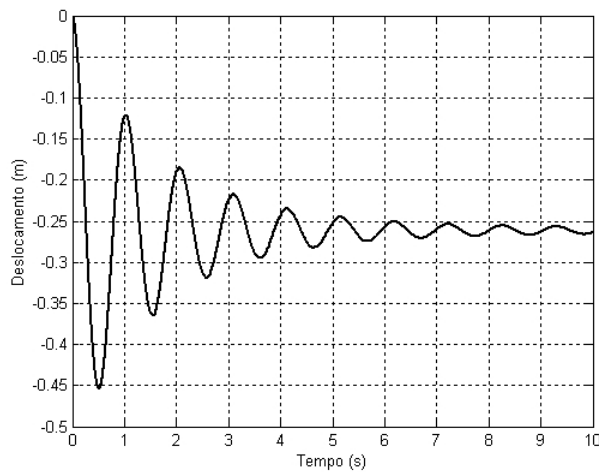
(A)



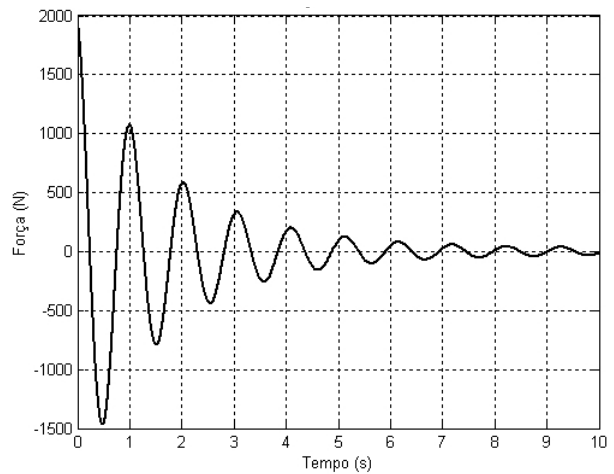
(B)

FIG. 3.22 Respostas do sistema. (A) – Deslocamento vertical do centro da viga.

(B) – Força transversal no nó central da viga.



(A)



(B)

FIG. 3.23 Respostas do oscilador. (A) – Deslocamento vertical do bloco.

(B) – Força resultante no bloco.

Por fim, será analisado um caso de interação entre um sistema estrutural, constituído pela viga, e um veículo plano com dois graus de liberdade como mostrado na FIG. 3.24.

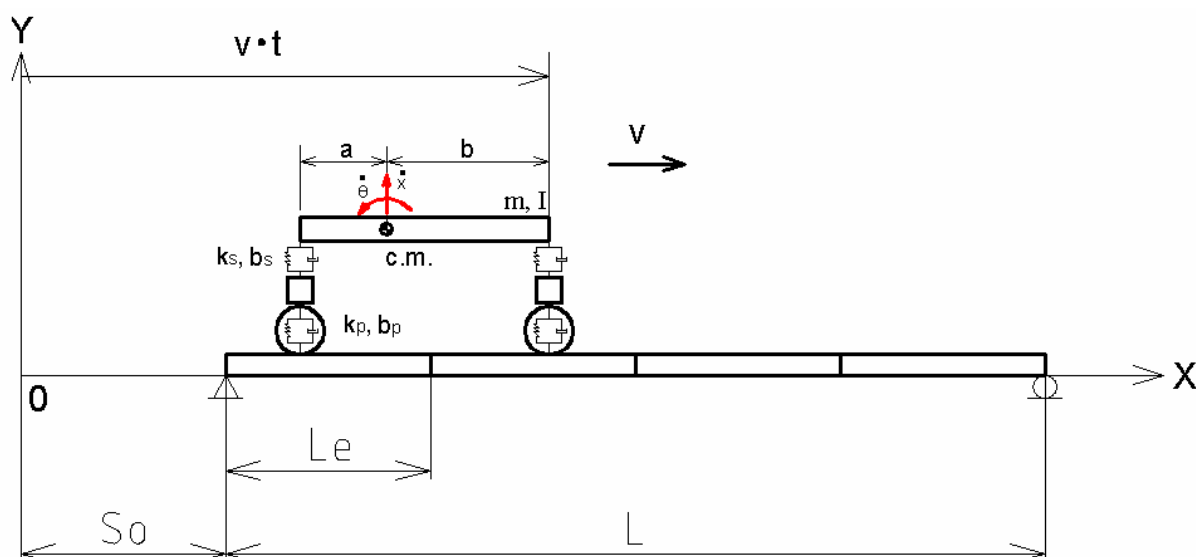


FIG. 3.24 Viga bi-apoiada submetida ao deslocamento de um veículo plano.

O modelo em grafo de ligação é construído de maneira similar àquela feita nos exemplos anteriores, porém neste caso o veículo – descrito com parâmetros concentrados – ainda pode ser representado de forma mais compacta com o emprego da notação multiligação, mostrado na FIG. 3.25. A TAB. 3.2 lista os parâmetros do modelo do veículo.

TAB. 3.2 Parâmetros de simulação do veículo.

Parâmetros	Valores
<i>Veículo</i>	
Distância CM ao eixo traseiro ( $a$ )	0,083 m
Distância CM ao eixo dianteiro ( $b$ )	0,167 m
Comprimento $L = a + b$	0,250 m
Massa suspensa ( $m$ )	1.000 kg
Momento de inércia eixo z ( $I$ )	250 kg m <sup>2</sup>
<i>Suspensões</i>	
Rigidez equivalente ( $k_s$ )	40.000 / 55.000 N/m <sup>(1)</sup>
Coefficiente de amortecimento ( $b_s$ )	3.000 Ns/m <sup>(2)</sup>
<i>Pneus</i>	
Massa não-suspensa ( $m_R$ )	15 kg <sup>(2)</sup>
Rigidez ( $k_p$ )	900.000 / 950.000 N/m <sup>(1)</sup>
Coefficiente de amortecimento ( $b_p$ )	1.000 / 1.200 Ns/m <sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup>: Valor relativo ao componente dianteiro / traseiro.

<sup>(2)</sup>: Valor de cada componente.

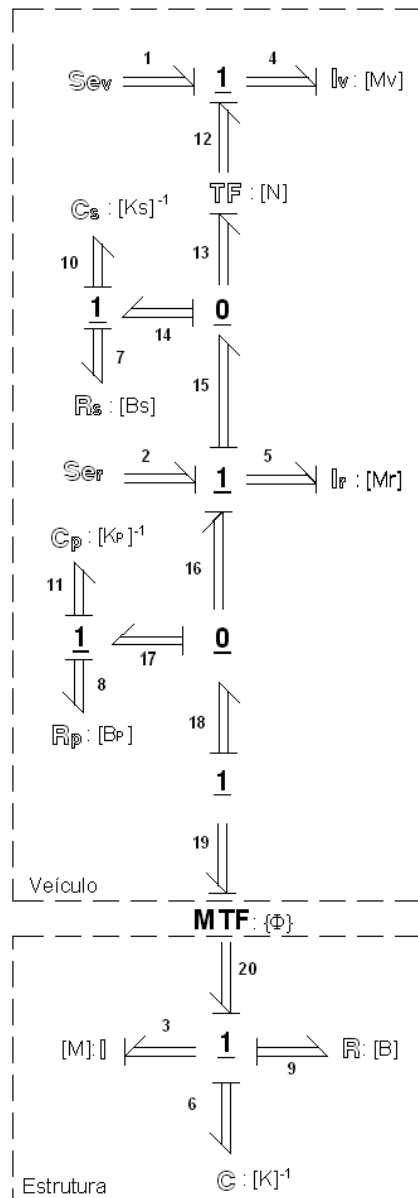


FIG. 3.25 Grafo de ligação do modelo do veículo plano deslocando-se sobre viga.

O modelo do sistema assim montado possui seis variáveis de estados, listadas no vetor da EQ. 3.9, que são relacionadas com os deslocamentos e os momentos lineares relativos aos nós e às massas suspensa e não-suspensa.

$$X = [p_3 \ p_4 \ p_5 \ q_6 \ q_{10} \ q_{11}]^T \quad (3.9)$$

As matrizes de estado do sistema, apresentadas nas EQ. 3.10 e EQ. 3.11, contabiliza todas as matrizes de campos e dos transformadores, obtida pelo equacionamento clássico da técnica dos grafos.



$$A = \begin{bmatrix} -([B] + [\Phi][B_P][\Phi]^T)[M]^{-1} & \mathbf{0} & [\Phi][B_R][M_R]^{-1} & -[K] & \mathbf{0} & [\Phi][K_P] \\ \mathbf{0} & -[N][B_S][N]^T[M_V]^{-1} & [N][B_S][M_R]^{-1} & \mathbf{0} & [N][K_S] & \mathbf{0} \\ [B_P][\Phi]^T[M]^{-1} & [B_S][N]^T[M_V]^{-1} & -([B_P] + [B_S])[M_R]^{-1} & \mathbf{0} & -[K_S] & [K_P] \\ [M]^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -[N]^T[M_V]^{-1} & [M_R]^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ [\Phi]^T[M]^{-1} & \mathbf{0} & -[M_R]^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \quad (3.11)$$

O vetor  $U$  das entradas do sistema (ou seja, o peso suspenso do veículo e o peso das suspensões) é mostrado na EQ. 3.12.

$$U = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]^T \quad (3.12)$$

Da EQ. 3.13 à EQ. 3.18 estão as matrizes diagonais características do veículo (massa suspensa), das suspensões e dos pneus.

$$M_V = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$M_R = \begin{bmatrix} m_{R_t} & 0 \\ 0 & m_{R_d} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$B_S = \begin{bmatrix} b_{s_d} & 0 \\ 0 & b_{s_t} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$K_S = \begin{bmatrix} k_{s_d} & 0 \\ 0 & k_{s_t} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$B_P = \begin{bmatrix} b_{p_d} & 0 \\ 0 & b_{p_t} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$K_P = \begin{bmatrix} k_{p_d} & 0 \\ 0 & k_{p_t} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Já a matriz do transformador é dada pela expressão mostrada na EQ. 3.19.

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Ainda, a matriz do multitransformador neste caso é composta por dois vetores modulados pela posição  $x$  de cada roda, dianteira e traseira, sobre a viga.

$$[\Phi] = [\{\Phi_d\} \quad \{\Phi_t\}] \quad (3.20)$$

O diagrama de blocos para simulação do sistema é apresentado na FIG. 3.26.

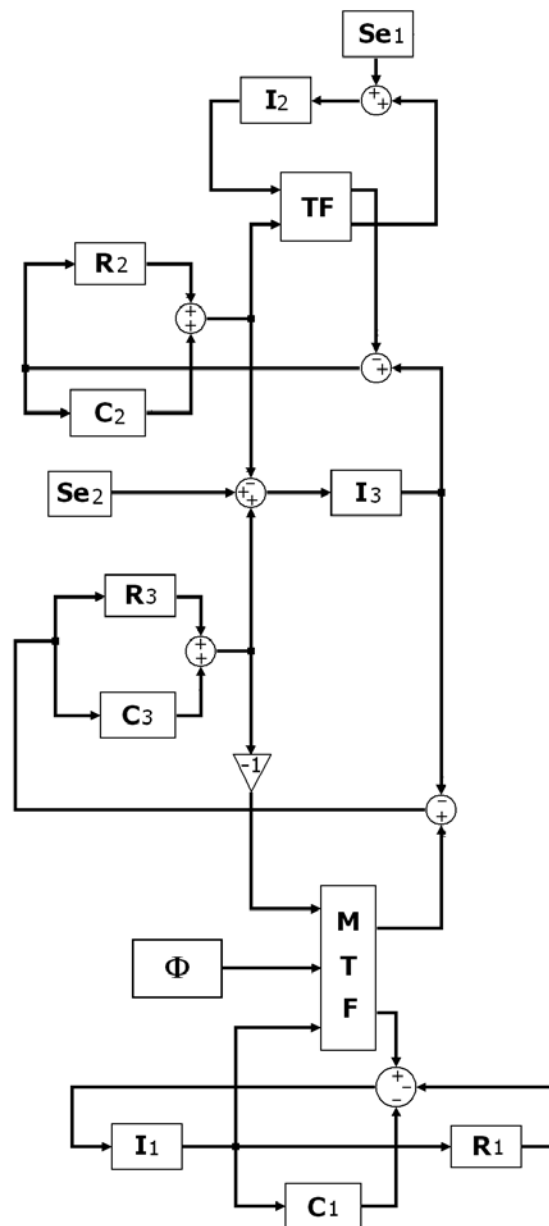


FIG. 3.26 Diagrama de blocos do modelo do veículo plano deslocando-se sobre viga.

A partir do diagrama de blocos do sistema, montado no ambiente *Simulink*®, é possível obter e armazenar facilmente uma série de respostas do sistema. Como exemplo, dois gráficos relativos à viga são mostrados na FIG. 3.27.

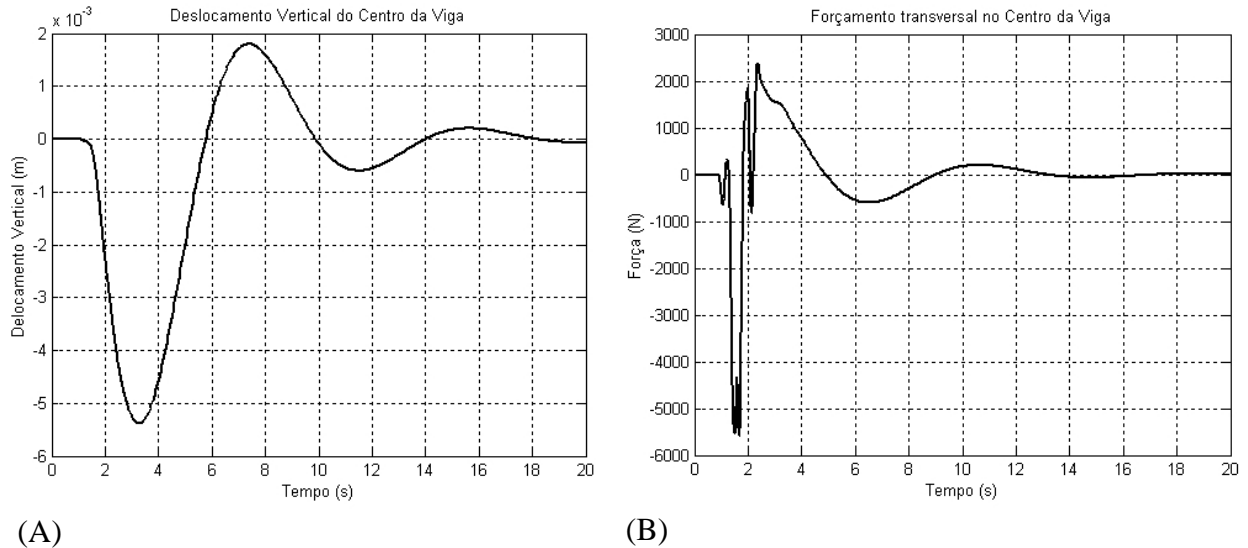


FIG. 3.27 Respostas da viga à carga móvel. (A) – Deslocamento vertical no centro da viga.  
(B) – Forçamento transversal no centro da viga.

Tem-se ainda na FIG. 3.28 uma resposta armazenada para o subsistema veicular: o movimento vertical, ou “*bounce*”, do centro de massa do veículo.

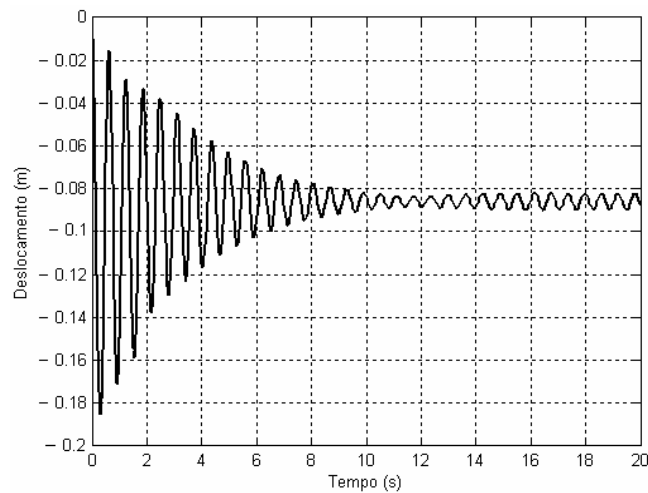


FIG. 3.28 Deslocamento vertical do CM do veículo.

Nota-se por este último caso que a construção de modelos complexos pelo procedimento modular proposto tende a se tornar mais rápida e prática em relação à escolha pelo equacionamento e codificação do problema, pois é feita de maneira direta trabalhando-se predominantemente com representações gráficas (esquema do modelo → grafo de ligação → diagrama de blocos → gráficos das respostas). Pequeno trabalho adicional é feito quando se emprega a notação multiligação, quer seja pela montagem das matrizes constitutivas dos campos (geralmente simples matrizes diagonais), quer seja pela montagem e particionamento das matrizes do MEF (feitos por rotinas simples e padronizadas).

O processo de obtenção de respostas em si também pode ser feito facilmente identificando-se nos sinais entre componentes e subsistemas as variáveis de interesse e adicionando ali um dispositivo de saída, o que facilita também a realização de vários estudos.

Observando-se os três casos analisados, é possível identificar pelo menos duas características importantes do procedimento: o modelamento no nível físico dos sistemas (orientado ao objeto), e a modularidade na modelagem, permitindo se trabalhar com módulos representativos dos componentes de um sistema – com a possibilidade de testar cada módulo separadamente para verificar seu funcionamento – e depois armazená-los para posterior reuso em outros sistemas. Tais características sugerem a viabilidade do uso do procedimento modular em aplicações industriais com sistemas de qualquer complexidade.

### 3.3.2 MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE UM PROBLEMA DE DINÂMICA VERTICAL PARA UM VEÍCULO COM CHASSI FLEXÍVEL.

Nesta seção é feita uma discussão acerca do modelamento da dinâmica vertical de um veículo com chassi flexível. A intenção aqui é demonstrar uma aplicação do procedimento modular apresentado anteriormente em um caso mais complexo e que encontra grande aplicação nas indústrias automotivas. O veículo proposto corresponde em suas características a um microônibus com motorização dianteira e o modelo se propõe simular o comportamento dinâmico do veículo devido a excitações de base e a interações com alguns subsistemas.

O modelo físico é constituído, além do chassi flexível, por três subsistemas descritos como massa-mola-amortecedor representando dois assentos com passageiros e o motor, e também por quatro subsistemas representando as quatro suspensões. O modelo físico assim descrito é mostrado na FIG. 3.29.

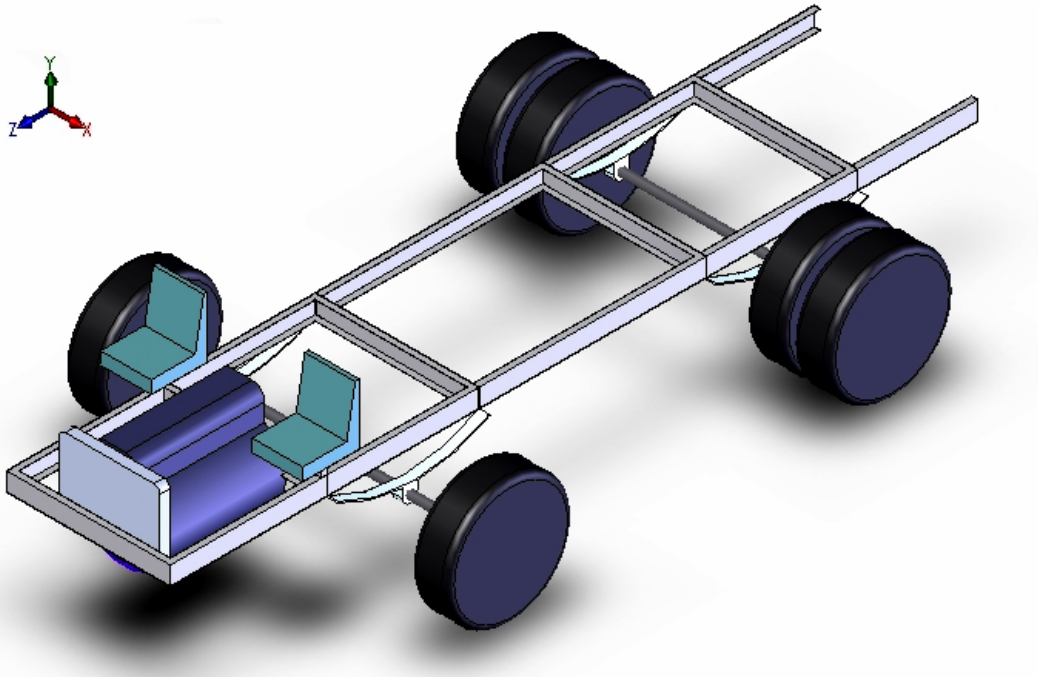


FIG. 3.29 Modelo físico do veículo e seus subsistemas.

O chassi é o único subsistema estrutural deste modelo, sendo todos os outros subsistemas anexados a ele. Sua forma é escolhida para ser similar a de alguns microônibus comerciais: do tipo “escada”, construído com longarinas rebitadas de perfil “U” com módulo de elasticidade igual a 200MPa e densidade igual a  $7860\text{kg/m}^3$ . Ele é convenientemente dividido em 30 elementos tipo “grelha” como o da FIG. 3.30, de comprimentos iguais e com seis graus de liberdade cada, que são relacionados com deslocamento vertical e rotações nos eixos contido no plano do chassi por cada nó, o que totaliza 81 graus de liberdade globais.



FIG. 3.30 Elemento de grelha, com a numeração dos GDL para o problema.

As matrizes de massa e de rigidez deste elemento são dadas pela EQ. 3.21 e pela EQ. 3.22, respectivamente.

$$Me = \frac{\rho A L e}{420} \begin{bmatrix} 140 J/A & 0 & 0 & 70 J/A & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22Le & 0 & 54 & -13Le \\ 0 & 22Le & 4Le^2 & 0 & 13Le & -3Le^2 \\ 70 J/A & 0 & 0 & 140 J/A & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13Le & 0 & 156 & -22Le \\ 0 & -13Le & -3Le^2 & 0 & -22Le & 4Le^2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$Ke = \begin{bmatrix} GJ/Le & 0 & 0 & -GJ/Le & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/Le^3 & 6EI/Le^2 & 0 & -12EI/Le^3 & 6EI/Le^2 \\ 0 & 6EI/Le^2 & 4EI/Le & 0 & -6EI/Le^2 & 2EI/Le \\ -GJ/Le & 0 & 0 & GJ/Le & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/Le^3 & -6EI/Le^2 & 0 & 12EI/Le^3 & -6EI/Le^2 \\ 0 & 6EI/Le^2 & 2EI/Le & 0 & -6EI/Le^2 & 4EI/Le \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

A FIG. 3.31 apresenta um esquema do modelo global do chassi, onde a frente está para a esquerda e o plano horizontal do modelo coincide com o plano da folha.

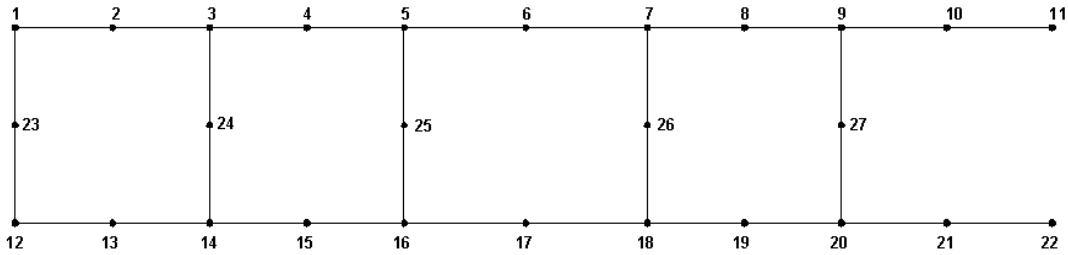


FIG. 3.31 Modelo discretizado do chassi, com a numeração dos nós.

Para os três subsistemas massa-mola-amortecedor, que representam os assentos com passageiros e o motor, tem-se  $m = 100\text{kg}$ ,  $k = 19.620\text{N/m}$  e  $b = 1.400\text{Ns/m}$  para cada um dos subsistemas assentos; e  $m = 500\text{kg}$ ,  $k = 122.625\text{N/m}$  e  $b = 24.761\text{Ns/m}$  para o subsistema motor.

O modelo físico do subsistema suspensão é formado por um feixe de molas e um amortecedor com os seguintes parâmetros:  $k = 193.256\text{N/m}$ ,  $b = 12.872\text{Ns/m}$  (dianteiro);  $k = 313.595\text{N/m}$ ,  $b = 19.828\text{Ns/m}$  (traseiro). Na TAB. 3.3 são apresentadas as massas das principais partes do veículo que está para ser simulado na condição de carga máxima. Os carregamentos críticos são mostrados na TAB. 3.4.

TAB. 3.3 Massa dos subsistemas do veículo.

Subsistema	Massa (kg)
Passageiros e assentos	200
Motor	500
Massa não-suspensa dianteira	1.600
Massa não-suspensa traseira	940
Chassi	950
Massa total líquida	7.700
Massa crítica	10.500

TAB. 3.4 Carga por eixo e carga crítica.

Descrição	Carga (N)
Carga máxima do eixo dianteiro <sup>(1)</sup>	16.215,9
Carga máxima do eixo traseiro <sup>(1)</sup>	26.457,6
Carga crítica	85.347,0

<sup>(1)</sup>: Calculada para cada roda.

O grafo multiligação do sistema inteiro é construído por partes (ou módulos) que são montadas como na FIG. 3.32, de modo similar ao descrito por Da ROCHA (1998). Nota-se que o grafo multiligação estrutural do chassi se difere do grafo genérico pela ausência de fluxo prescrito nos nós, o que neste caso elimina a multiligação com causalidade diferencial associada ao campo inercial.

A parte inferior esquerda do grafo representa os subsistemas anexos ao chassi. A parte inferior direita representa as quatro suspensões em notação multiporta, onde o módulo do transformador (*TF*) relaciona a distância do eixo da roda com cada ponto de fixação do feixe de molas. A linha horizontal significa uma composição (e não uma soma) dos vetores contidos nas três multiligação provenientes dos subsistemas (numerados por 19, 20 e 21) nos vetores (esforço e fluxo) contidos na multiligação número 18 da estrutura.

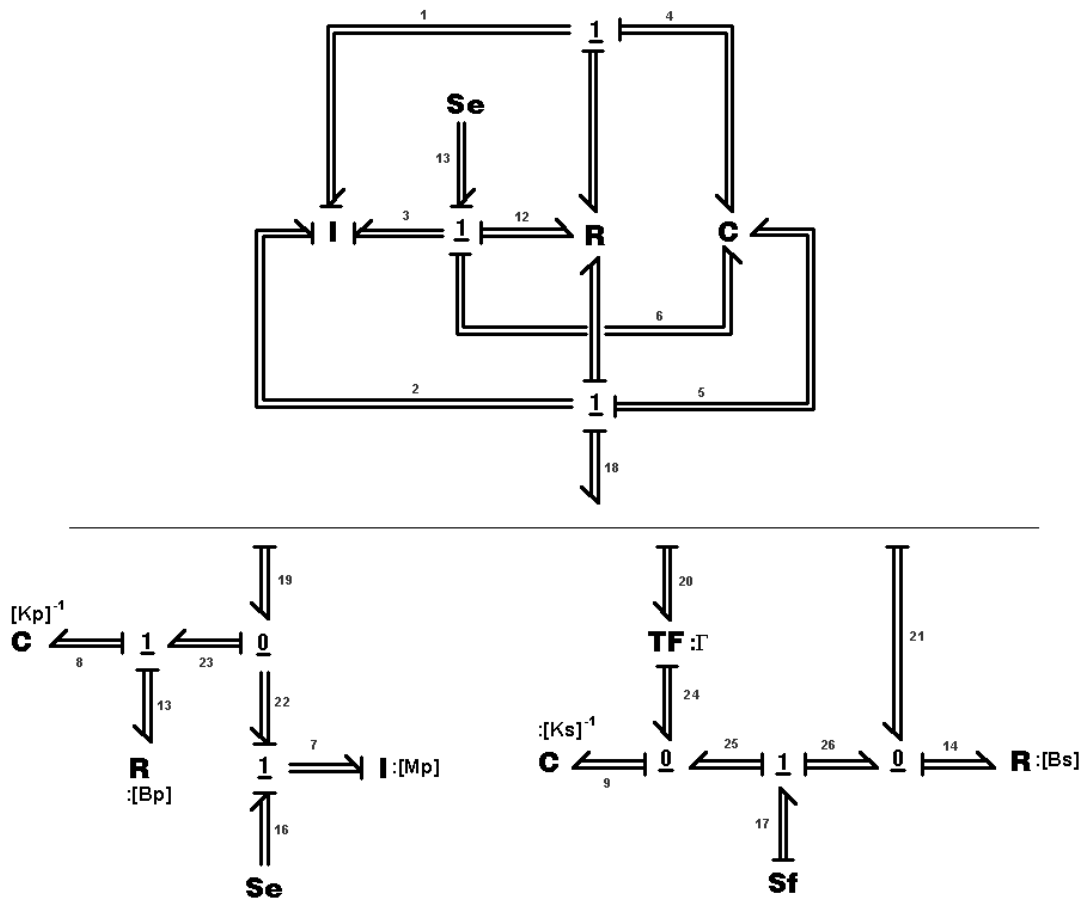


FIG. 3.32 Grafo multiligação do sistema global com a numeração das ligações.

Esta representação multiportas é satisfatória para o modelo veicular, e também para a posterior simulação em diagrama de blocos, exatamente pela condensação que ela proporciona e pela sua característica modular.

Em seguida, de acordo com a metodologia proposta, o diagrama de blocos do sistema é construído como na FIG. 3.33, a partir da representação do sistema em grafo multiligação apresentada na FIG. 3.32.



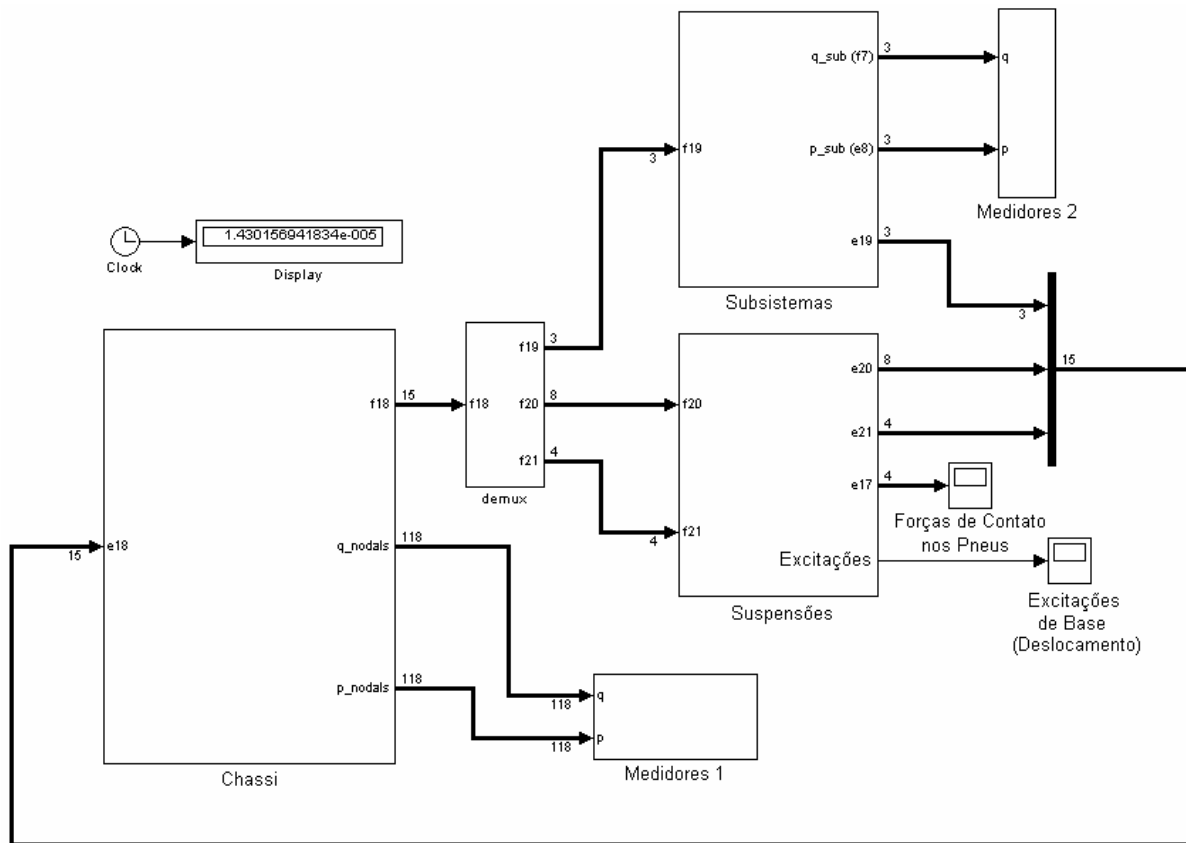


FIG. 3.33 Diagrama de blocos do sistema veicular completo.

A FIG. 3.33 destaca o diagrama de blocos do sistema veicular, com seus subsistemas grupados em três subsistemas: o chassi estrutural, os subsistemas anexados e as suspensões. Os blocos multiplexadores do *Simulink*® são empregados para composição e separação de sinais vetoriais e escalares, sendo equivalente no grafo da FIG. 3.32 à linha horizontal. Em adição aos blocos do sistema utilizam-se blocos de saídas para armazenamento das respostas do sistema.

O subsistema estrutural do chassi, mostrado na FIG. 3.34, é composto pela fonte de esforço  $\mathbb{S}e$  que contabiliza os carregamentos nodais devidos à massa suspensa do veículo sobre o chassi ao lado dos campos inercial  $[\mathbb{I}]$ , capacitivo  $[\mathbb{C}]$  e resistivo  $[\mathbb{R}]$ .

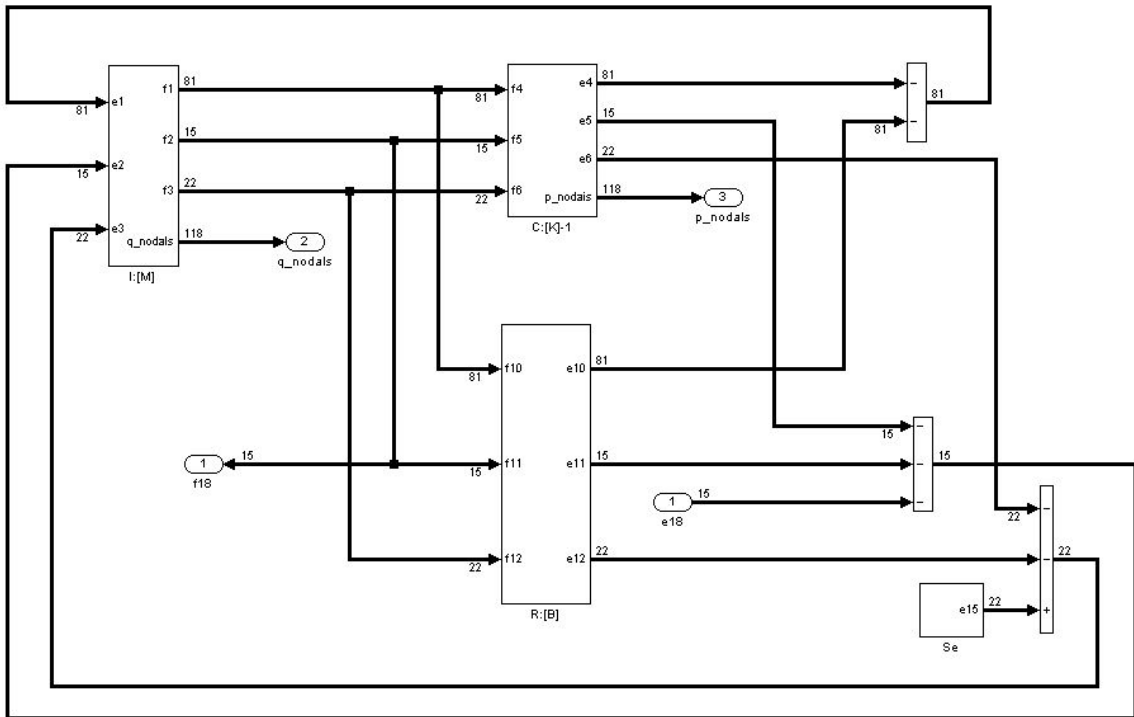


FIG. 3.34 Detalhe do subsistema chassi.

Na FIG. 3.35 é mostrado o conteúdo do bloco representativo dos três subsistemas anexados ao chassi, onde campos são descritos por matrizes diagonais contendo as propriedades físicas dos elementos ordenadas segundo a topologia do grafo.

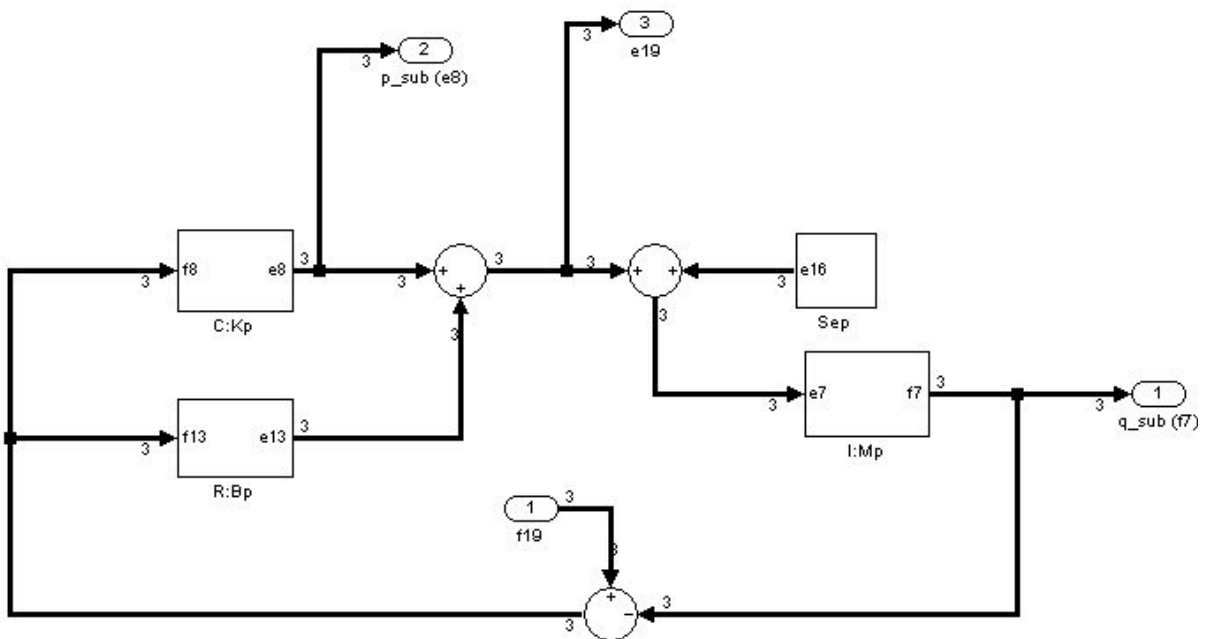


FIG. 3.35 Detalhe dos subsistemas acoplados: passageiros e motor.

O bloco de excitação de base devida ao terreno, aplicado ao subsistema “suspensões” na FIG. 3.36 é modelado como uma senóide com 0,1m de amplitude a uma frequência de  $80\pi$ rad/s com  $\pi$ rad de atraso do eixo dianteiro para o traseiro.

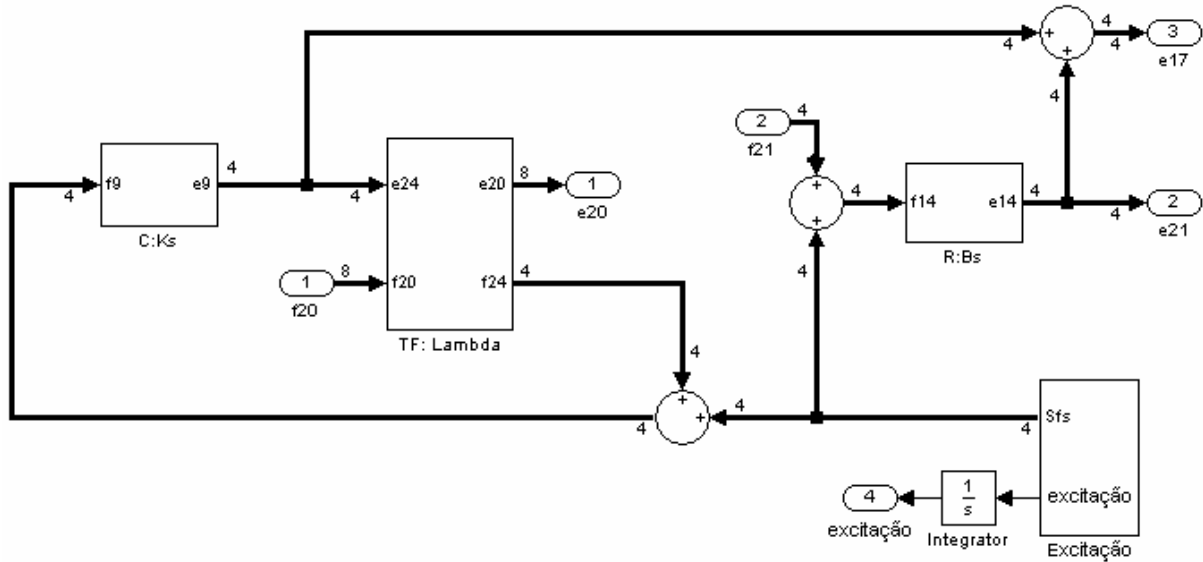


FIG. 3.36 Detalhe do subsistema suspensões.

E possível notar que esses elementos e subsistemas descritos anteriormente são suscetíveis a serem padronizados para serem utilizados por engenheiros, compondo sua biblioteca técnica para posteriores reutilizações.

Alguns resultados obtidos a partir da simulação do diagrama de blocos do sistema da FIG. 3.33 são apresentados a seguir. A simulação é considerada para a fase de regime permanente, com as condições iniciais calculadas pela estática. A FIG. 3.37 mostra o deslocamento vertical do centro da longarina direita, e na FIG. 3.38, um exemplo de resposta de um subsistema é mostrado: o deslocamento vertical de um dos assentos do veículo.

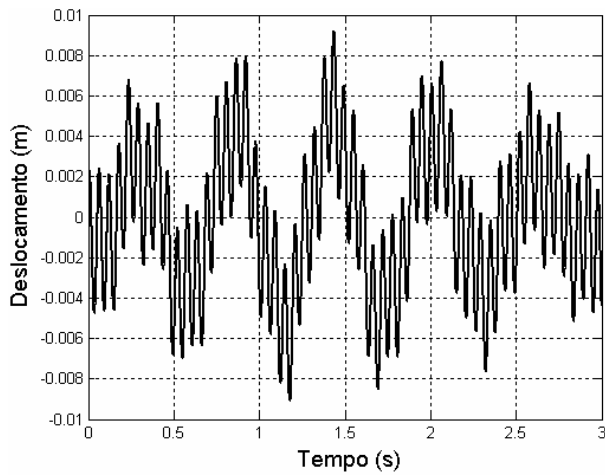


FIG. 3.37 Deslocamento do nó 6.

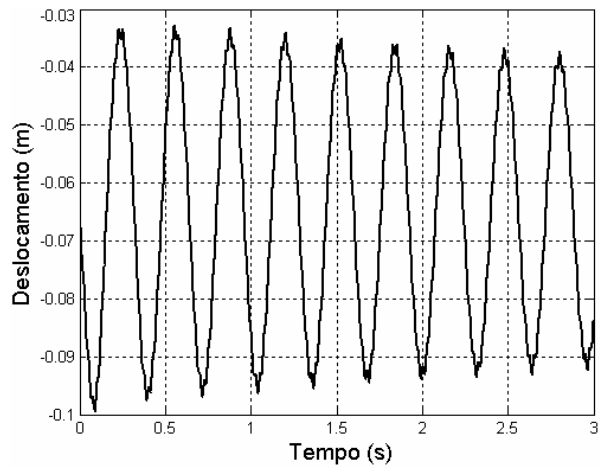


FIG. 3.38 Deslocamento do assento.

Os gráficos da FIG. 3.39 e da FIG. 3.40 apresentam os resultados para o deslocamento vertical das suspensões traseira e dianteira, respectivamente.

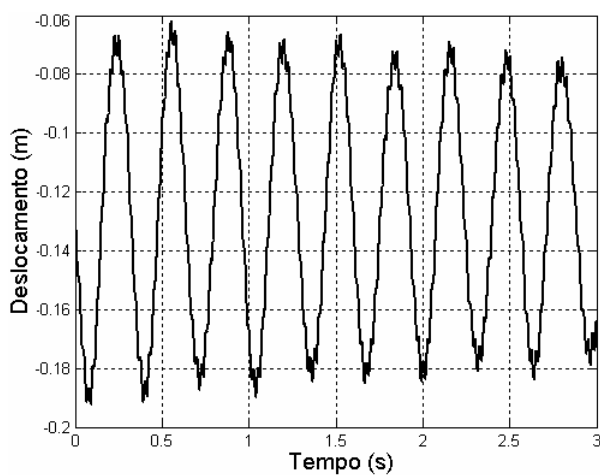


FIG. 3.39 Deslocamento de uma das suspensões traseira.

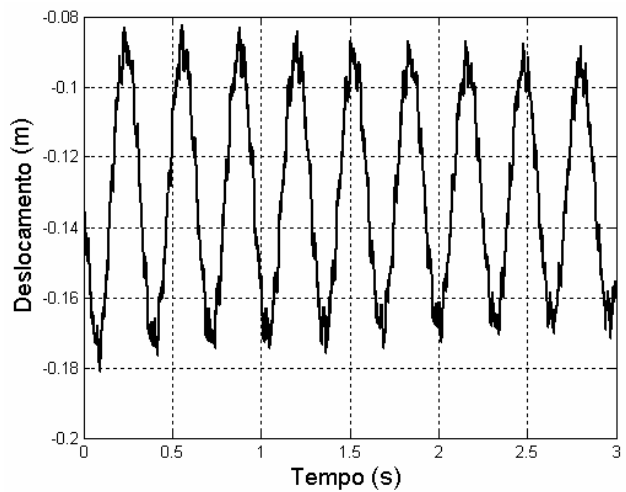


FIG. 3.40 Deslocamento de uma das suspensões dianteira.

Na FIG. 3.41 outro resultado da simulação é apresentado, que é o carregamento suportado por um pneu traseiro durante a trajetória do veículo.

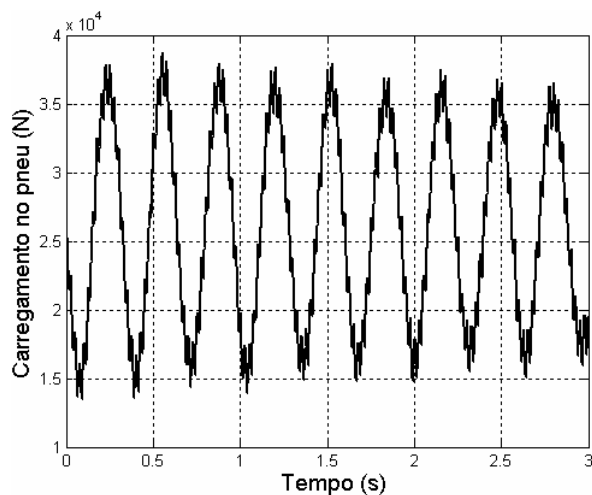


FIG. 3.41 Carregamento resultante em cada pneu traseiro.

Tal metodologia, portanto, pode trazer muitas vantagens para o projetista como a possibilidade de implementação da simulação do sistema em pacotes gerais de modelagem por fluxo de sinais, razoável ganho de tempo na medida em que se trabalha com modelos de maiores complexidades, isto devido a não ser necessário se construir diretamente equações ou escrever códigos computacionais para se resolver o sistema, a manutenção do entendimento físico dos elementos do sistema real característico da técnica dos grafos e fácil adaptabilidade às necessidades de engenheiros e de empresas. Em adição, grande condensação do diagrama de blocos pode ser obtida ao se utilizar a notação multiligação dos grafos, pois os campos multiportas podem representar vários elementos similares da técnica dos grafos em apenas um bloco.

Finalmente, através do modelo discutido, uma aplicação pertinente nas indústrias automotivas foi usada para demonstrar as potenciais vantagens da metodologia, que se mostrou muito suscetível ao modelamento do comportamento dinâmico de sistemas (automotivos) modulares com interação entre vários componentes descritos por parâmetros concentrados e distribuídos.

Dando prosseguimento a formulação do procedimento modular, ainda é necessário analisar alguns aspectos específicos da técnica dos grafo para a descrição em diagramas de blocos, tais como a descrição de campos com causalidade mista, não-lineares e modulados. Nos próximos tópicos são apresentadas propostas de tratamentos desses casos no procedimento modular.

### 3.4 DESCRIÇÃO DE CAMPOS COM CAUSALIDADE MISTA EM DIAGRAMA DE BLOCOS.

Um campo multiportas [I], [C] ou [R] com causalidade mista ocorre quando pelo menos uma das ligações simples que incide sobre ele possui causalidade diferente das demais, sendo então a multiligação associada a ele é particionada em duas, cada uma com um tipo de causalidade de entrada. A montagem de um campo independe da sua natureza, mas apenas das relações entre as entradas e os elementos de junções assimilado em sua constituição. No caso dos campos armazenadores, no entanto, é preciso se observar a causalidade associada aos seus elementos para se saber da necessidade ou não de se empregar blocos de integração ou de derivação nos sinais de entradas, para se produzir saídas coerentes com a descrição de cada elemento do campo.

Para o desenvolvimento do estudo desta seção apenas o caso de campo capacitivo é discutido, por se tratar da mesma idéia para o campo inercial e para o resistivo, sendo que neste último não há a necessidade de se operar as entradas. Um campo multiportas pode ser formado a partir das ligações simples como mostrado na FIG. 3.42, que considera uma coleção de elementos equivalentes sem composição com elementos de junção, descrito geralmente por uma matriz diagonal.



FIG. 3.42 Campos capacitivos com 4 portas e 4 relações constitutiva.

Há também a possibilidade de se construir um campo tomando-se um trecho da estrutura de junção de um grafo para compor as ligações que fornecem as variáveis de potência do elemento, como na FIG. 3.43. A forma em diagrama de blocos para estes campos é a equivalente das mostradas na FIG. 3.2 em multiligação.

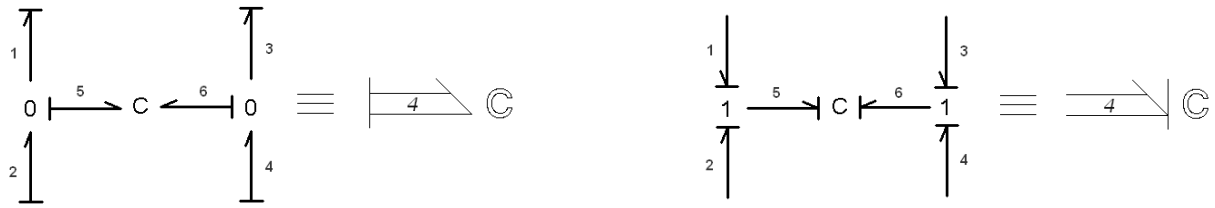


FIG. 3.43 Campos capacitivos com 4 portas e uma relação constitutiva.

A discussão, entretanto, está em formalizar uma metodologia de construção de blocos para os campos com causalidade mista, que leve em conta as relações entre os sinais de saída e os de entradas, adequando estes últimos de acordo com a matriz de um campo qualquer previamente montado. Seja o campo capacitivo com causalidade mista da FIG. 3.44, sua relação constitutiva matricial pode ser facilmente montada como na EQ. 3.23, em que é indicado o operador do sinal de entrada, quando é o caso, para facilitar o entendimento.

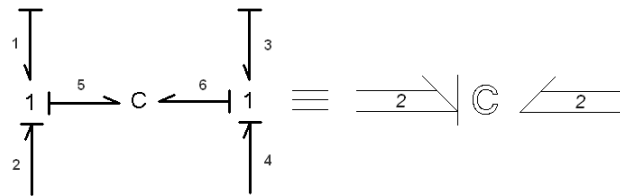


FIG. 3.44 Campo capacitivo misto com causalidade integral no capacitor.

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ f_2 \\ e_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \int dt & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} \int dt & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ e_2 \\ f_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Como se trata de um campo com causalidade mista, a matriz de campo na EQ. 3.23 relaciona variáveis de entradas tanto em fluxos quanto em esforços, onde nem todas essas requerem integração. No cálculo das saídas em esforço, uma integração dos sinais de entrada em fluxo é necessária, porém no cálculo das saídas em fluxos nenhuma integração desses sinais é requerida. Isto ocorre porque a relação entre os fluxos de entrada e de saída é direta devido às junções 1, mas os esforços são calculados para a causalidade integral. Em casos como este, procede-se à integração do sinal de entrada em fluxo com a posterior derivação do sinal de saída em fluxo para compatibilização, conforme mostrado na FIG. 3.45.

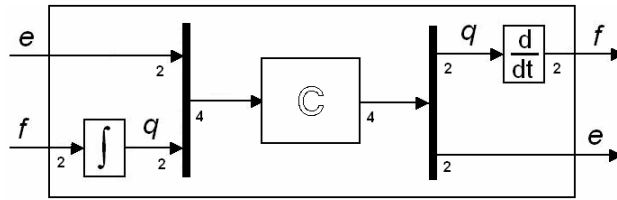


FIG. 3.45 Bloco de campo capacitivo com causalidade mista e com relação constitutiva integral.

O caso mostrado pela FIG. 3.46 é semelhante àquele da FIG. 3.44, sendo agora os esforços de saída diretamente relacionados aos de entrada pelas junções  $\mathbf{0}$  e os fluxos associados a causalidades diferenciais.

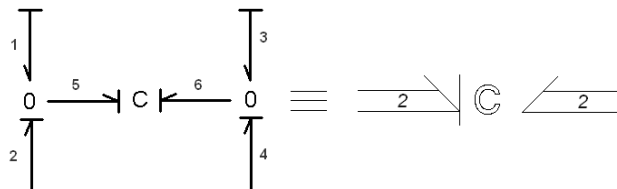


FIG. 3.46 Campo capacitivo misto com causalidade diferencial no capacitor.

Este campo com causalidade mista agora requer derivação do sinal de entrada em esforço no cálculo da saída em fluxo como indicado pelos operadores de derivação adicionados à matriz do campo da EQ. 3.24.

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ f_2 \\ e_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & C \frac{d}{dt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & C \frac{d}{dt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ e_2 \\ f_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

A derivação é também realizada no cálculo dos esforços como consequência, devendo, portanto, este sinal ser integrado a fim de se compatibilizar essas saídas em esforço, como demonstrado no bloco do campo na FIG. 3.47.



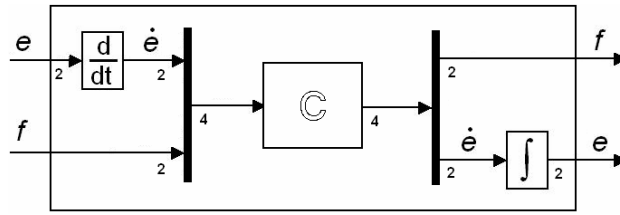


FIG. 3.47 Bloco de campo capacitivo com causalidade mista e com relação constitutiva diferencial.

Considera-se agora o caso de um campo capacitivo com causalidade mista formado pela composição de quatro elementos de uma porta com causalidades integral e diferencial, na forma apresentada pela FIG. 3.48, considerando-se somente as portas ligadas diretamente aos elementos.

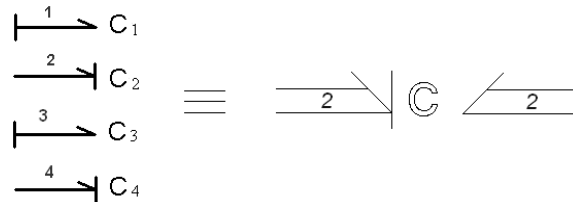


FIG. 3.48 Campo capacitivo misto com 4 relações constitutivas.

Para se compatibilizar as saídas do campo de acordo com as relações constitutivas de seus elementos, no caso de a matriz deste campo ser diagonal, basta integrar as entradas em fluxo e derivar as entradas em esforço, como indicado na EQ. 3.25.

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ f_2 \\ e_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \int dt & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 \frac{d}{dt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \int dt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \frac{d}{dt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ e_2 \\ f_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

O bloco correspondente a este campo é mostrado na FIG. 3.49, onde se observa a aplicação dos blocos de integração e de derivação.

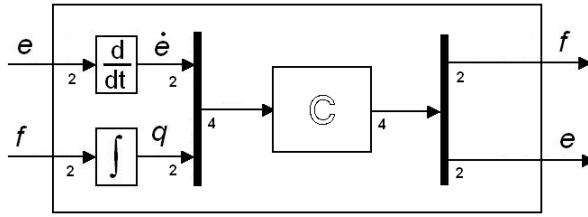


FIG. 3.49 Bloco de campo capacitivo com causalidade mista e com relações constitutivas integrais e diferenciais.

A matriz de campo, em alguns casos, poderia também ser cheia como na EQ.3.26. Nestes casos a matriz do campo com causalidade mista pode ser montada invertendo-se as colunas que multiplicam as entradas com causalidade diferencial nos campos armazenadores, ou as colunas relativas às entradas em esforços no caso do campo resistivo.

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

As inversões para a obtenção da matriz do campo misto pode ser feita de seguinte forma: seja por exemplo um campo capacitivo onde as ligações 2 e 4 na FIG. 3.50 possuem causalidade diferencial, o que significa que apenas a segunda e a quarta coluna devem ser invertida.

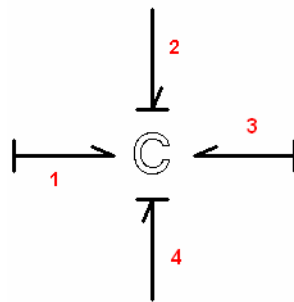


FIG. 3.50 Campo capacitivo misto.

Para isso, toma-se a matriz do campo e uma matriz identidade de mesma dimensão, e troca-se as colunas a serem invertidas entre elas, com sinal negativo. Depois se inverte

a matriz identidade com colunas trocadas e pré-multiplica com a matriz do campo resultante como indicado pela EQ. 3.27 (SAMANTARAY, 2001).

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ f_2 \\ e_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - k_{12} & 0 - k_{14} \\ 0 - k_{22} & 0 - k_{24} \\ 0 - k_{32} & 1 - k_{34} \\ 0 - k_{42} & 0 - k_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} & 0 \\ k_{21} & -1 & k_{23} & 0 \\ k_{31} & 0 & k_{33} & 0 \\ k_{41} & 0 & k_{43} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ \dot{e}_2 \\ q_3 \\ \dot{e}_4 \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Os campos assim obtidos são representados em forma de bloco da mesma maneira que a indicada na FIG. 3.47, com derivação das entradas e integração das saídas em esforço. Isso devido ao fato de nem todos os elementos de uma coluna relativa às entradas em esforço ou em fluxo requererem derivação ou integração respectivamente.

Por fim, no caso da descrição das matrizes de campos do método dos elementos finitos para estruturas pela abordagem de Da SILVA e SPERANZA NETO (1993), observa-se que o campo inercial é o único passível de possuir causalidade mista.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} & \mathbf{S}_{14} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} & \mathbf{S}_{24} \\ \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{S}_{33} & \mathbf{S}_{34} \\ \mathbf{S}_{41} & \mathbf{S}_{42} & \mathbf{S}_{43} & \mathbf{S}_{44} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Neste caso, tendo-se em vista a EQ. 3.28 que representa um campo de estrutura na técnica dos grafos de ligação, apenas a quarta coluna, que é a relativa aos graus de liberdade que recebem fluxo prescrito, deve ser invertida. Isto pode ser feito da maneira descrita anteriormente para a EQ. 3.27, ou também se tirando vantagem do fato de as matrizes de estrutura serem particionadas em submatrizes  $S_{ij}$ , bastando então que se inverta diretamente as submatrizes  $S_{i4}$ .

### 3.5. DESCRIÇÃO DE CAMPOS NÃO-LINEARES EM BLOCOS NO *SIMULINK*®.

Neste item será tratada a questão da modelagem e simulação de sistemas que contenham campos multiportas descritos por relações constitutivas não-lineares no contexto do procedimento modular. Em termos práticos, considera-se que um campo não-linear pode se apresentar de duas maneiras quanto à forma da sua relação constitutiva: (a) com elementos variáveis e (b) como tabela de pontos ou curva de sistema. A forma (a) diz respeito a campos onde pelo menos um de seus elementos é uma variável do sistema ou externas a ele, ou funções destas. Em síntese, basta que um dos elementos do campo seja não constante para que o campo apresente comportamento não-linear. Tais elementos podem se apresentar como funções lineares, trigonométricas, descontínuas (descritas por operadores lógicos), etc..

Para ilustrar o tratamento de um campo não-linear devido à presença de elementos não constantes, é considerado um modelo de veículo plano com dois graus de liberdade, como o apresentado na FIG. 3.24, com suspensões e pneus e orientação positiva para baixo. Considera-se também que o comportamento das molas das suspensões é dado pelo gráfico da FIG. 3.51, que indica a presença de batentes que limitam os cursos das molas.

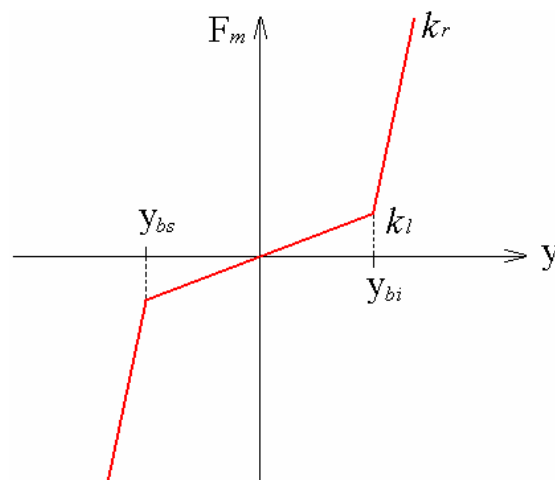


FIG. 3.51 Característica não-linear das molas das suspensões.

O coeficiente da rigidez das molas mudam de  $k_l = 2,5 \times 10^4 \text{N/m}$  na condição de molas livres para  $k_r = 2,5 \times 10^{10} \text{N/m}$  na condição rígida imposta pelo contato com os batentes, onde  $F_m$  é a força da mola e  $y_{bs}$  e  $y_{bi}$  são as posições dos batentes superior e inferior da suspensão, respectivamente.

A relação constitutiva do campo capacitivo é, portanto, a função descontínua dada pela EQ. 3.29, para cada uma das suspensões.

$$F_m = \begin{cases} k_l \cdot y, & y_{bs} < y < y_{bi} \\ k_r \cdot y, & y_{bs} > y > y_{bi} \end{cases} \quad (3.29)$$

Considerando os batentes colocados a uma distância  $y_d = 0,317\text{m}$  e  $y_t = 0,276\text{m}$  da posição de comprimento livre das molas dianteira e traseira, respectivamente, é possível então montar a relação constitutiva para o campo capacitivo das molas das suspensões. Para isso, uma opção é empregar a vasta biblioteca de blocos do *Simulink*® para construir o campo, como na FIG. 3.52, utilizando-se o bloco “switch” que alterna do coeficiente  $k_l$  para o  $k_r$  se a distância (módulo) em relação ao comprimento livre da mola for maior que  $y_d$  ou  $y_t$ .

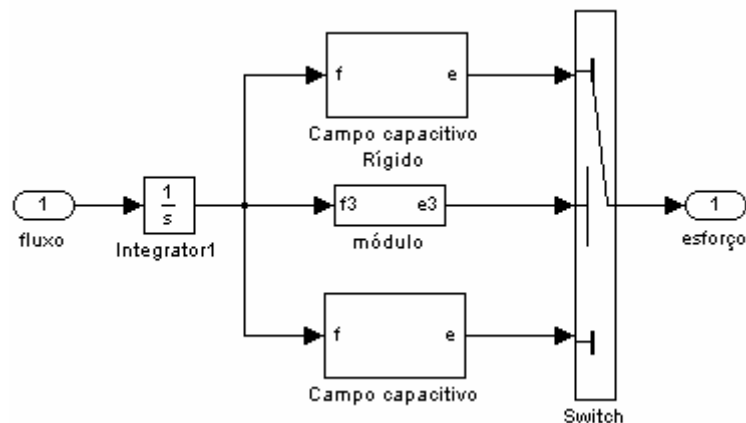


FIG. 3.52 Campo capacitivo não-linear montado com blocos do *Simulink*®.

A FIG. 3.53 indica o deslocamento das suspensões traseira e dianteira quando o veículo é solto da posição de comprimento livre das molas ( $y(0) = 0$ ) e recebendo as excitações. Para este exemplo, consideram-se as excitações de base dadas por dois pulsos de  $1\text{m/s}$ , um aplicado no pneu dianteiro no tempo  $3,3\text{s}$  e outro no pneu traseiro em  $4,3\text{s}$ .

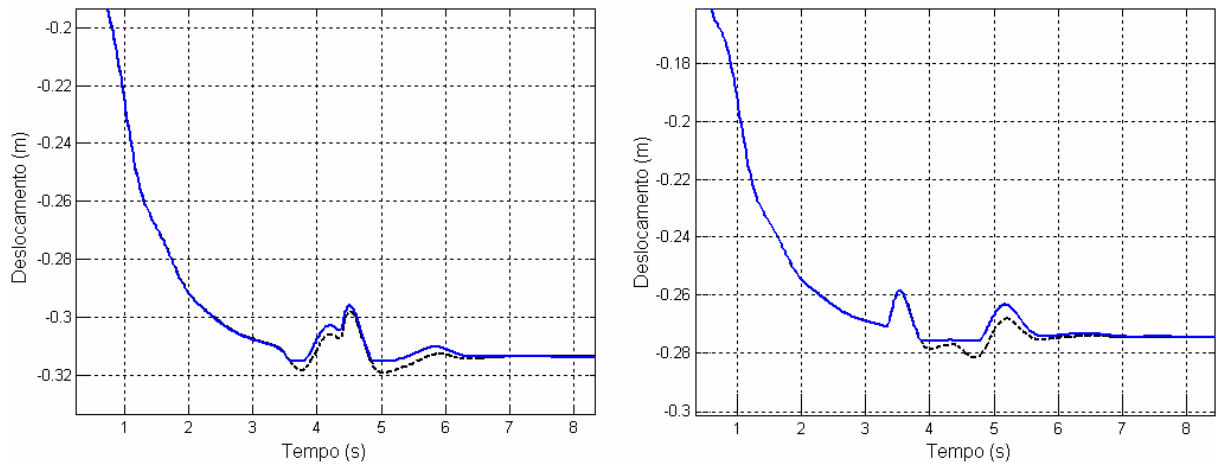


FIG. 3.53 Deformação da mola das suspensões traseira e dianteira. A linha tracejada indica a resposta na ausência dos batentes.

Cabe aqui fazer uma análise acerca da simulação deste tipo de sistema. Considerando-se que o modelo matemático do sistema não-linear explícito seja descrito por um conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas com as condições iniciais como apresentado pela EQ. 3.30, questiona-se então qual seria o melhor método de integração numérica para o problema posto.

$$\begin{aligned}\dot{X} &= f(X, U, t) \\ X(0) &= X_0\end{aligned}\tag{3.30}$$

Prosseguindo a discussão, parte-se para a linearização do sistema da EQ. 3.30, para a forma matricial da EQ. 3.31.

$$\dot{X} = AX + \bar{B}U\tag{3.31}$$

Onde  $A$  é a matriz Jacobiana da função  $f(X, U, t)$ , definida como na EQ. 3.32, onde  $a_{ij}$  são os elementos da matriz  $A$ . Sendo o sistema não-linear, a matriz Jacobiana  $A$  varia juntamente com os estados.

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(X, U, t)}{\partial X_j}\tag{3.32}$$

Em um instante particular ao longo da simulação a Jacobiana pode ser analisada para seus autovalores, que descrevem o comportamento local do sistema naquele instante. É de se perceber que quando a suspensão está a uma posição  $y$  na região entre  $y_{bs}$  e  $y_{bi}$  a frequência associada ao elemento é  $\omega_l = (k_l/m_s)^{1/2}$ , e quando  $y$  ultrapassa este limite a frequência do elemento passa a ser  $\omega_r = (k_r/m_s)^{1/2}$ . Como  $k_r = 10^6 k_l$ , então  $\omega_r = 1000 \omega_l$ . Portanto, o passo de integração deve ser reduzido por um fator de 1000 para se preservar a acuracidade na solução. Neste caso é mais razoável se optar por um método explícito de integração com passo variável, no *Matlab*® utiliza-se, por exemplo, o algoritmo *ODE45* que é uma implementação do método de *Runge-Kuta* de quarta ordem. Por outro lado, deve-se ter muito cuidado ao se optar por algoritmos *stiff* em casos como este, pois estes algoritmos são muito pouco eficientes em problemas com grandes autovalores no eixo imaginário. A TAB. 3.5 apresenta os tempos de simulação para o método *non-stiff* (*ODE45*) e para *Método de Gear* (no *Matlab*®, *ODE15s*), aplicável a problemas *stiff*. Considerando-se o modelo sem batentes (linear) e com batentes (não-linear).

TAB. 3.5 Tempo de simulação para o modelo com diferentes métodos de integração<sup>(1)</sup>.

<b>Método</b>	<b>Modelo linear</b>	<b>Modelo não-linear</b>
<b><i>ODE45</i></b>	18,4s	6h 53m 46s
<b><i>ODE15s</i></b>	7,2s	27h 49m 39s

<sup>(1)</sup>: Computador Pentium 4/ 1,5GHz, 512 MB RAM.

Enquanto a mola está na região “livre”, o sistema apresenta um comportamento típico *stiff*. Porém, na região restrita pelos batentes a parte altamente oscilatória introduzida ao modelo pela rigidez  $k_r$  requer passos de integração menores para que se mantenha a acuracidade, sendo resolvida com maior eficiência pelo método *non-stiff* Runge-Kutta, para a mesma tolerância absoluta ( $= 10^{-6}$ ). Para outras informações acerca de problemas como este, consulte o Apêndice 3.

Uma outra maneira pela qual um campo não-linear pode se apresentar é na forma de tabela de pontos ou curva de sistema, ou seja, quando a relação constitutiva do campo é dada por uma tabela que correlaciona com alguns pontos as variáveis de saída com as de entrada do bloco. Esta forma pode conferir maior sofisticação à simulação de sistemas na razão em que permite que se descreva o comportamento de um subsistema por meio de curvas ou tomadas de pontos realizadas experimentalmente, aproximando o modelo computacional ao

modelo real. No *Simulink*® esta correlação é facilmente feita através do bloco “*Table Look-up*”.

O bloco “*Look-up Table*” correlaciona as entradas com as saídas usando interpolação linear dos valores definidos nos parâmetros do bloco.

É possível se definir a tabela de dados especificando-se o vetor dos valores de entradas e o vetor dos valores de saída. O bloco produz um valor de saída comparando as entradas do bloco com os valores listados no vetor de entradas: se for encontrado um valor que concorda com a entrada do bloco, ele retorna o elemento correspondente do vetor de saída. Caso contrário, o programa realiza uma interpolação linear entre os dois elementos apropriados da tabela para determinar o valor da saída. Se a entrada é menor que o primeiro ou maior que o último elemento do vetor de entrada, o bloco extrapola o valor usando os dois primeiros ou os dois últimos pontos. O vetor dos valores de entrada contém os possíveis valores de entradas do bloco, e deve conter elementos monotonicamente crescentes. O vetor de saída do bloco deve ter a mesma dimensão do vetor de entradas. Observa-se que é possível se obter maior precisão com o emprego de mais pontos nos vetores de parâmetros do bloco. Em adição, outros métodos de interpolação como cúbica, *spline*, etc. podem ser empregados, através da função “*INTERP*” do *Matlab*®.

Por último, é destacada uma maneira alternativa ao uso de vários blocos para a montagem de um campo não-linear pelo emprego das chamadas *S-Functions*, que são formas sofisticadas de se introduzir ao sistema equações matemáticas codificadas por várias linguagens de programação diferentes na forma de bloco. É possível se utilizar uma *S-Function* para várias aplicações, como adicionar novos blocos básicos ao *Simulink*®, criar sofisticados blocos de componentes e subsistemas personalizados, incorporar códigos em várias linguagens (*Matlab*, *C*, *Fortran*, etc.) à simulação, descrever um subsistema como um conjunto de equações matemáticas (equações diferenciais e de espaço de estado, equações descontínuas, funções de probabilidade, etc.), dentre outras.



### 3.6 DESCRIÇÃO DOS CAMPOS MODULADOS EM BLOCOS NO *SIMULINK*®.

Um tipo particular de campo não-linear é o campo modulado, caracterizado por uma relação constitutiva matricial variável com o tempo, e diretamente dependente de uma variável denominada aqui de módulo do campo, ou elemento modulador do campo, que pode ser função de variáveis de estado ou de potência, formas integrais ou derivadas destas ou mesmo variáveis externas ao sistema, sem a transferência de potência para o campo. Os campos modulados podem ser classificados de acordo com o sinal do elemento modulador em pelo menos três tipos: (a) módulo constante, (b) módulo variável, e (c) sinal de comando. Os campos do tipo (a) não serão abordados aqui, pois o módulo constante leva a uma relação constitutiva linear, que dispensa discussão.

Para entender o conceito de um campo modulado, têm-se os subsistemas da FIG. 3.54, que representam uma válvula hidráulica e um sistema de embreagem. Cada um possui um elemento resistor modulado por funções no tempo por meio de ligações ativas.

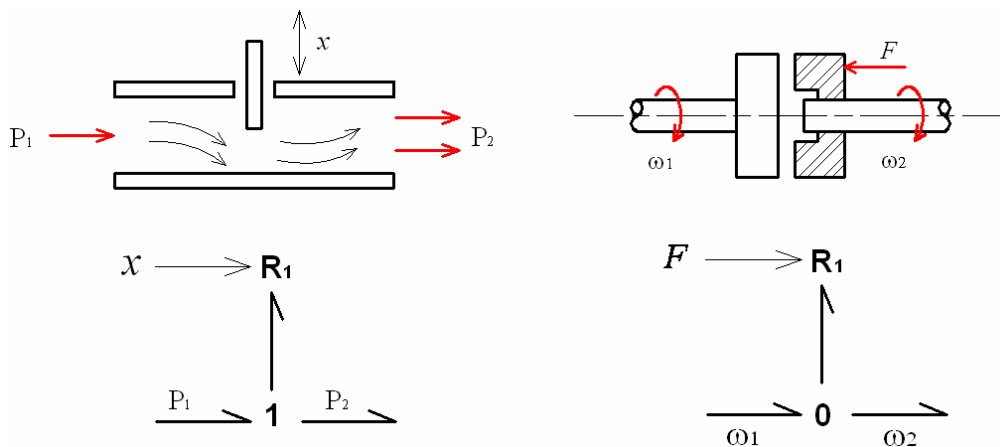


FIG. 3.54 Elementos resistores modulados (ROSENBERG e KARNOPP, 1983).

Um caso específico de um campo modulado pode ser derivado do exemplo de carga móvel sobre viga, dado pela FIG. 3.15. Quando se utiliza a forma de estrutura de junção como descrita pela EQ. 3.33.

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ e_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Phi^T & 0 & 0 \\ \Phi & 0 & -I_8 & -I_8 \\ 0 & I_8 & 0 & 0 \\ 0 & I_8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ f_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

O grafo do sistema assim é convertido em diagrama de blocos na forma da FIG. 3.55, onde o bloco de estrutura de junção é modulado pelo vetor  $\Phi$ , variável com o tempo.

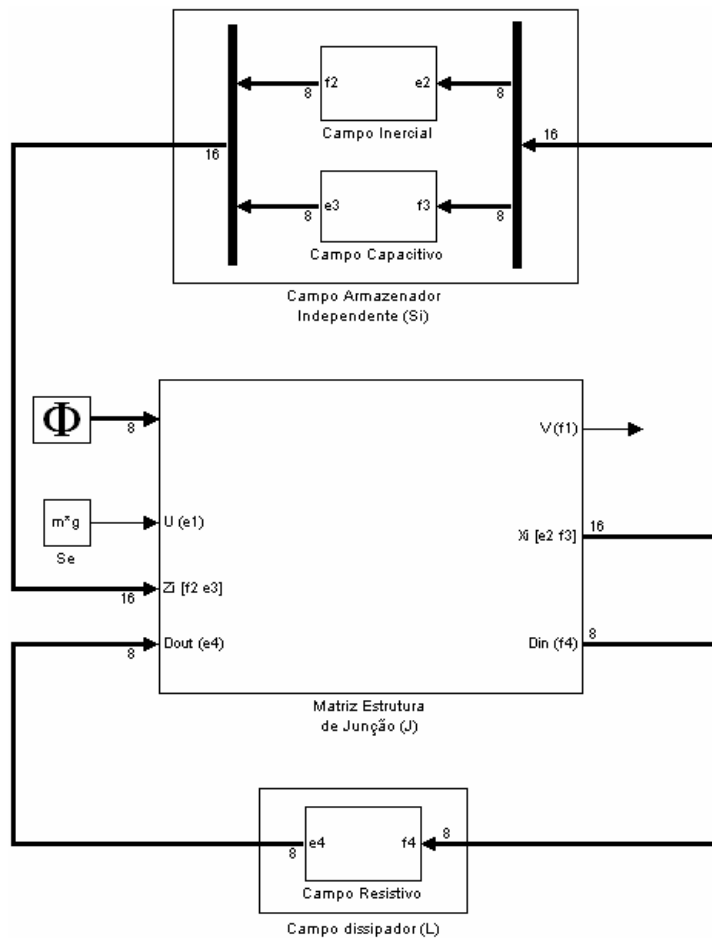


FIG. 3.55 Modelo de carga móvel na forma de estrutura de junção.

Em casos como este, em que o módulo do campo seja variável – como uma função do tempo, ou de uma variável externa ao sistema que seja uma função explícita do tempo – uma boa estratégia para a simulação em fluxo de sinais é salvar o arquivo gerador do módulo, conforme detalhado no Apêndice A, na forma de uma tabela de dados (“*double array*”) que descreve a variação do valor deste módulo com o tempo, sendo o valor do elemento variável

$\Phi$  da matriz do campo (neste caso a matriz de estrutura de junção) consultado na tabela de dados a cada passo integração. Esta forma de tratamento do campo modulado, no entanto, perde bastante de sua funcionalidade quando este módulo está acoplado a uma variável do sistema, o que impede o seu cálculo e armazenamento prévio.

Neste caso é preciso converter o arquivo normalmente utilizado para a construção do módulo em uma *S-Function*, o que permite descrever um bloco em função de equações matemáticas codificadas previamente no *Matlab*®, que permita entradas ( $X, U, t$ ) do sistema e fornece saídas para este. (HANSELMAN e LITTLEFIELD, 2004).

O módulo do campo pode ainda ser caracterizado por sinais de comando, que introduzem informação ao campo acerca da ativação de seus elementos variáveis. Esses sinais são normalmente funções do tempo e descritos por funções descontínuas, podendo representar o efeito desliga – liga (função “*step*”), encher (função “*rampa*”), carregar – descarregar (função “*dente-de-serra*”), dentre outros. A implementação de um sinal de comando a um campo modulado no *Simulink*® se faz de maneira mais simples que a descrita anteriormente, bastando se fazer uma multiplicação do sinal do módulo com o sinal de saída da dos elementos de interesse da matriz do campo.

## CAPÍTULO 4

### TRATAMENTO DE CASOS ESPECIAIS DA MANIPULAÇÃO DOS GRAFOS DE LIGAÇÕES NO PROCEDIMENTO MODULAR

#### 4.1 PROPOSTAS DE SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DECORRENTES DA EXISTÊNCIA DE CAMINHOS CAUSAIS DE ORDEM ZERO NO GRAFO DE LIGAÇÃO.

##### 4.1.1 INTRODUÇÃO.

Depois de concluída a atribuição das causalidades em um grafo, este passa a ser considerado uma representação compacta de um diagrama de blocos, e então podem ser identificadas as *malhas topológicas*, que são caminhos com causalidade voltada somente para um sentido. Analisando essas malhas topológicas observa-se que alguns problemas na atribuição de causalidade então podem vir a ocorrer. É possível aparecer dependências entre variáveis associadas a elementos armazenadores com causalidade integral e diferencial como na FIG. 4.1(a), onde a variável associada à causalidade diferencial é dependente das outras variáveis de estado. A presença de elementos resistores acoplados ao longo da estrutura de junção, como na FIG. 4.1(b), também leva a dependências entre variáveis de potência, agora devido à presença de uma *malha algébrica*, que são malhas topologias que não contém operação de integração, mas somente operações algébricas. Ainda, a presença de uma *malha causal* num grafo de ligação, como na FIG. 4.1(c), leva a um conjunto dependente ou mesmo insolúvel de equações de estado, sendo o seu aparecimento normalmente devido a atribuições imprópria de causalidade ao longo do grafo.

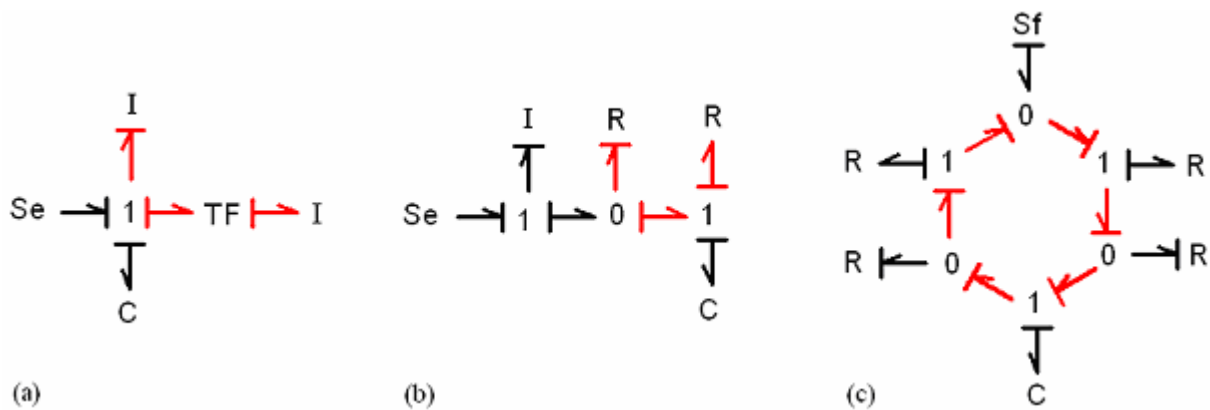


FIG. 4.1 Tipos de malhas topológicas associadas a dependências entre variáveis.

Qualquer um dos casos comentados anteriormente com relação a malha topológica implicam no aparecimento de *Caminhos Causais de Ordem Zero*, ou *ZCP* (do inglês *Zero-order Causal Path*), implicando em que o conjunto de equações de estado seja um conjunto implícito de equações diferenciais algébrica (*EDA*).

O aparecimento de caminho causal de ordem zero quer seja puramente algébrico, quer seja como resultado do acoplamento entre elementos armazenadores pode ser devido tanto a um modelo construído impropriamente ou a uma simplificação demasiada do sistema modelado. No entanto, em alguns casos é possível se aceitar a ocorrência de caminhos causais de ordem zero no equacionamento de modelos de sistemas físicos.

Para facilitar a discussão sobre a solução de sistemas com *ZCP* é utilizada a classificação para os *ZCP* introduzida por VAN DIJK e BREEDVELD (1991a). Tal classificação é feita com relação ao comportamento da solução numérica do método empregado para a solução das equações de estado, como se segue:

- Classe 1: malha topológica contendo elemento armazenador com causalidade diferencial;
- Classe 2: malha topológica contendo elementos dissipadores acoplados;
- Classes 3, 4 e 5: outros casos relacionados a malha causal (ciclo causal, ciclo causal não-essencial e malha causal).

#### 4.1.2 PROPOSTAS PARA SIMULAÇÃO DE SISTEMAS CONTENDO DEPENDÊNCIA ENTRE VARIÁVEIS.

De acordo com ROSENBERG (1971), equações de estado não-lineares derivadas dos grafos de ligações sem malha algébrica e sem elementos armazenadores dependentes com causalidade diferencial são escritas da forma da EQ. 4.1.

$$\begin{aligned}\dot{X} &= f(X, U, t) \\ X(0) &= X_0\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde  $X$  é o vetor de estado e  $U$  é o vetor das entradas do sistema. Em sistemas contendo *ZCP* classe 2, equações algébricas implícitas podem ser introduzidas (BARRETO e LEFÈVRE, 1985). Se as variáveis implícitas envolvidas com as equações algébricas são escrita como  $Z$ , então a equação de estado estendida é dada pelas EQ. 4.2 e EQ 4.3.

$$\dot{X} = f_1(X, Z, U, t) \quad (4.2)$$

$$0 = f_2(X, Z, U, t) \quad (4.3)$$

A EQ. 4.2 é chamada parte de estado e a EQ. 4.3 é a parte de semi-estado e  $Z$  é o vetor das variáveis de semi-estado.

Em sistemas que contenham *ZCP* classe 1, associado com elementos armazenadores dependentes no grafo, a equação de estado estendida é dada pelas EQ. 4.4 e EQ. 4.5.

$$\dot{X} = f_1(X, \dot{Y}, U, t) \quad (4.4)$$

$$Y = f_2(X, U, t) \quad (4.5)$$

Para toda porta relativa a um armazenador dependente, variáveis de semi-estado  $Y$ , dependentes do vetor de estado  $X$ , podem ser introduzidas como na EQ. 4.5. A derivação do vetor de semi-estado  $Y$  na EQ. 4.4 se deve ao fato de este estar relacionado a uma causalidade diferencial. Nota-se que as equações de estado estendida para os casos de sistemas com *ZCP* classes 1 e 2 são *EDA*.

Os sistemas que contenham *ZCP* classes 1 e 2 ainda podem ser descritos de outra forma com o emprego dos Multiplicadores de Lagrange como na EQ. 4.6.

$$\dot{X} = f_1(X, \lambda, U, t) \quad (4.6)$$

$$0 = f_2(X, U, t) \quad (4.7)$$

onde o vetor  $\lambda$  com os multiplicadores de Lagrange é adicionado ao sistema para se eliminar a dependência entre variáveis, e contém tantos elementos quantas forem as dependências presentes. Para cada  $\lambda$  é adicionada uma *equação de restrição*, como a EQ. 4.7.

Os sistemas que contenham *ZCP* de classes 3, 4 e 5 não representam dificuldade para a simulação em fluxo de sinais, embora nos casos em que ocorram malhas causais seja prudente se realizar uma análise mais cuidadosa do modelo, pois geralmente estão associados a uma má interpretação da física do sistema.

Na literatura, vários métodos para se evitar problemas numéricos devidos a presença de *ZCP* têm sido formulados. Eles em geral podem ser divididos em duas categorias: aqueles que procuram resolver o conjunto implícito de equações por meios numéricos e aqueles que eliminam o *ZCP* por meio de alteração do modelo. Na solução de modelos com *ZCP* classe 2, BARRETO e LEFÈVRE (1985) propõem que se transforme o trecho do grafo contendo os resistores equivalentes (malha algébrica) em um campo dissipativo, eliminando-se assim a dependência entre as variáveis no equacionamento. GAWTHROP e SMITH (1992) propõem a adição de “fontes residuais” controladas de esforço ou de fluxo (conforme a necessidade de cada caso) para inversão das causalidades de elementos resistores. Já LORENZ e WOLPER (1985) e CACHO, FELEZ e VERA (2000) utilizam o chamado “método de abertura de *ZCP*”, onde é feita a quebra das variáveis dependentes com o conseqüente desaparecimento da malha algébrica, porém com a adição de equações de restrições associadas a cada variável “quebrada”. A importância deste método está na aplicabilidade em processos automáticos de construção e simulação de grafos de ligação.

Na solução de modelos com *ZCP* classe 1, destaca-se o trabalho de VAN DIJK e BREEDVELD (1991b) onde é proposta a solução de sistemas de *EDA*, causada pela presença de elementos armazenadores com causalidade diferencial, por meio de técnicas explícitas de solução de *EDO* normalmente aplicadas a problemas rígidos. Em adição, são considerados também o aqui chamado *Método de Elemento Rígido* (KARNOPP e MARGOLIS, 1979), em que é adicionado um elemento capacitivo, associado a um alto coeficiente de rigidez, para cada elemento armazenador com causalidade diferencial; outra opção é o método dos *Multiplificadores de Lagrange* (TIERNEGO e BOS, 1985), (KARNOPP, 1997), muito útil na descrição de restrições cinemáticas em sistemas mecânicos, onde os multiplicadores são utilizados na forma de fontes controladas de esforço, da mesma forma que a abordada em outros trabalhos (BORUTZKY e CELLIER, 1996), (BORUTZKY, 1999), porém com o emprego de “sorvedouros residuais” (“*residual sinks*”) de esforço ou de fluxo, para a inversão de causalidade dos elementos armazenadores com causalidade diferencial; o *Método de Elemento Parasítico* que é uma extensão do Método de Elemento Rígido consiste na adição de elementos capacitivos e dissipativos em paralelo no grafo para cada elemento armazenador com causalidade diferencial; e por fim, o *Método de Transferência de Inércia (ou Capacitor) Dependente*, que consiste na eliminação do elemento armazenador com causalidade diferencial fazendo-se massa (ou rigidez) equivalente. Estas últimas quatro abordagens são caracterizadas pela quebra do *ZCP* por meio de modificações no grafo de ligação do sistema.

Tendo-se em vista a modelagem e a simulação de sistemas dinâmicos em diagramas de blocos pelo fluxo de sinais, nota-se que aqueles contendo *ZCP* classe 2 de maneira nenhuma representam problemas, pois a dependência entre variáveis de potência sendo puramente algébrica é automaticamente contornada em pacotes de simulação de sistemas, como o *Simulink*®, ou facilmente eliminada com o emprego de bloco de atraso de sinal (*delay*). Já o caso de sistemas contendo *ZCP* classe 1 precisa ser verificado, pois este demanda operação de derivação, o que gera dependência envolvendo variáveis de estados. Para efeito de simulação em fluxo de sinais, é necessário saber se a derivação pode introduzir erro à resposta do sistema inclusive na presença de descontinuidades. Testes em um sistema contendo elementos armazenadores com causalidade diferencial são realizados na próxima seção, para o estudo do melhor procedimento para tratar sistemas com *ZCP* classe 1.

#### 4.1.3. ESTUDO DA SIMULAÇÃO DE SISTEMAS COM *ZCP* CLASSE 1 EM DIAGRAMAS DE BLOCOS.

Como já foi dito anteriormente, um caminho causal de ordem zero de classe 1 é aquele entre um elemento armazenador com causalidade diferencial e outro com causalidade integral. Esta classe de *ZCP* freqüentemente aparece em grafos de ligação de modelos de sistemas mecânicos com restrições cinemáticas. Exemplos clássicos desse tipo de sistemas mecânicos são os sistemas multicorpos, onde o número de graus de liberdade é prescrito pela natureza das conexões cinemáticas (restrições) entre os corpos.

VAN DIJK e BREEDVELD (1991b) demonstraram a viabilidade de se utilizar rotinas explícitas para problemas *stiff* na solução de sistemas de equações implícitas em modelos com *ZCP* classe 1. A simulação de tais sistemas em fluxo de sinais, no entanto, deve ser verificada para se assegurar que aspectos da simulação em diagramas de blocos como a dependência entre sinais, caracterizada por blocos realimentados como em controle, e a operação de derivação de variáveis de potência não comprometam a resposta do sistema. Em adição à simulação de sistemas sem quebra de *ZCP*, outros métodos para tratamento de sistemas com *ZCP* classe 1 já mencionados serão estudados com o objetivo de se fazer uma comparação entre as abordagens. Quatro métodos são considerados: o método de Elemento Rígido, o método de Elemento Parasítico, o método dos Multiplicadores de Lagrange e o método de Transferência de Inércia Dependente. Tais métodos são caracterizados por alteração no modelo para a quebra de dependências entre variáveis. Os elementos adicionados promovem o “alívio” das



restrições cinemáticas, que passam a ser consideradas explicitamente. Tais elementos podem ser identificados com alguma característica física que ainda não tenha sido considerada do modelo, e mesmo que não se tenha ou não se saiba a interpretação física relacionada ao método empregado, isso não afetará seu funcionamento, pois as modificações estão de acordo com a formulação dos grafos de ligação. As abordagens aqui discutidas são listadas na TAB. 4.1, bem como suas principais características.

TAB. 4.1 Características dos métodos para solução de sistemas com ZCP.

Métodos	Equações de Estado	Aumento de Ordem do Sistema <sup>(1)</sup>	Modificação no Modelo
Sem Quebra de ZCP	$\dot{X} = f_1(X, \dot{Y}, U, t)$ $Y = f_2(X, U, t)$	1	Não
Elemento Rígido	$\dot{X} = f(X, U, t)$	2	Adição de elemento capacitivo
Elemento Parasítico	$\dot{X} = f(X, U, t)$	2	Adição de elemento capacitivo e resistivo em paralelo
Multiplicador de Lagrange	$\dot{X} = f_1(X, \lambda, U, t)$ $0 = f_2(X, U, t)$	2	Adição de fonte controlada
Transferência de Inércia Dependente	$\dot{X} = f(X, U, t)$	0	Massa equivalente

<sup>(1)</sup>: Número de variáveis de estado em cada caminho causal considerado nos métodos.

Considera-se para o estudo o modelo simplificado de um elevador mostrado na FIG. 4.2, que consiste em dois blocos, com massas  $m_1 = 10\text{kg}$  e  $m_2 = 5\text{kg}$ , unidos por um cabo, que passa por um sistema de roldanas com relação  $m = -1$ , suportadas por mancais sem atrito. O bloco 1 está em contato com uma mola com flexibilidade  $c = 0,05 \text{ m/N}$  no início da simulação, quando inicia seu movimento a partir do repouso, e está submetido a atrito associado um coeficiente  $b = 20\text{Ns/m}$ .

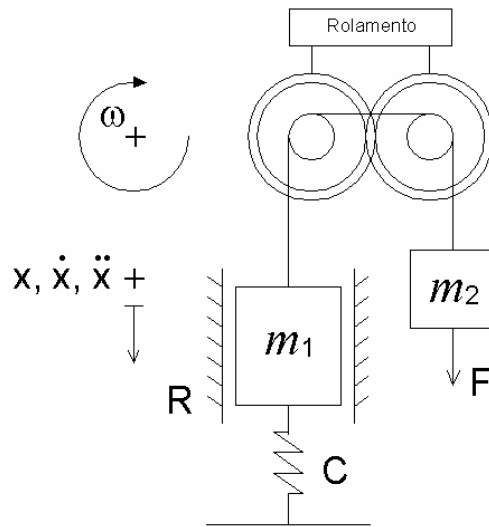


FIG. 4.2 Modelo de um elevador.

Na FIG. 4.3, é mostrado o grafo de ligação do sistema, indicado por (A), bem como as suas versões modificadas de acordo com os quatro métodos de quebra de ZCP.

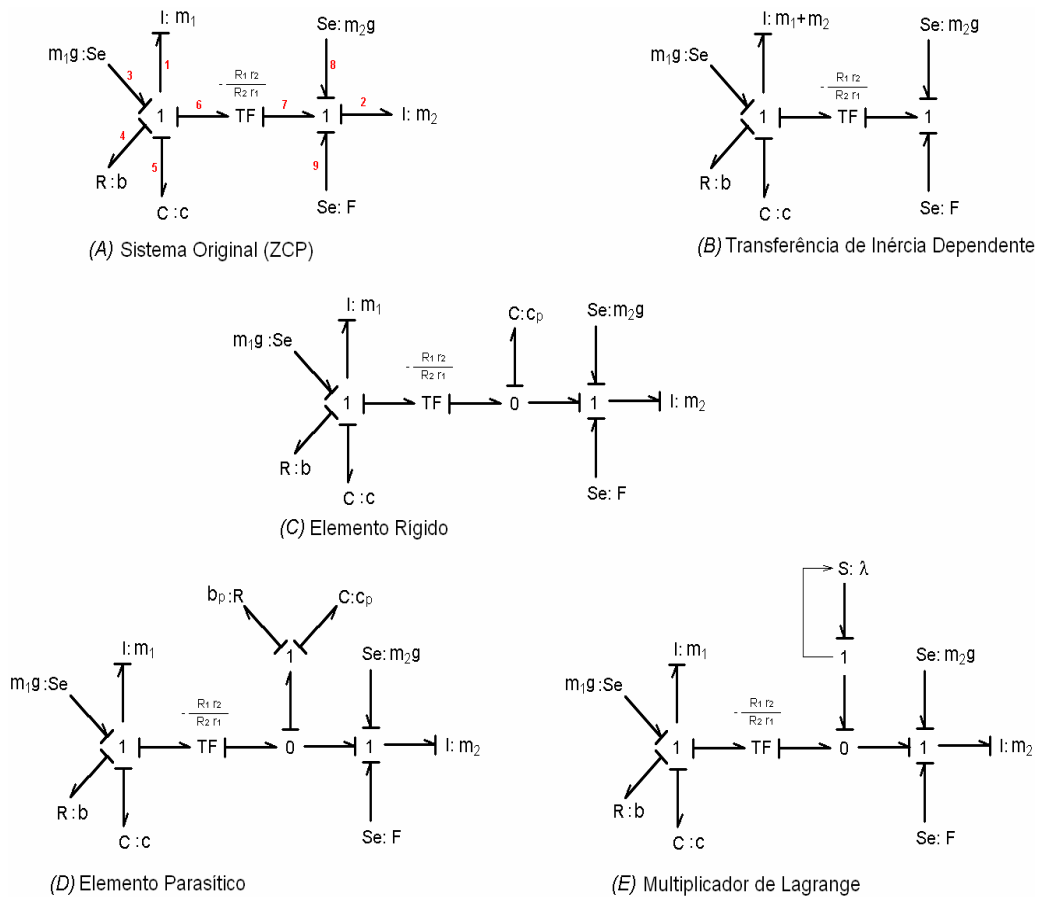


FIG. 4.3 Grafos de ligações para solução do modelo com ZCP classe 1.

A força  $F$  é aplicada ao bloco 2 como indicado na EQ. 4.8, onde  $t_s$  é o tempo de simulação considerado.

$$F = \begin{cases} 0, & t \leq t_s/2 \\ 10, & t > t_s/2 \end{cases} \quad (4.8)$$

Ainda na FIG. 4.3, o grafo (B) indica a aplicação do método de Transferência de Inércia Dependente, quando se têm duas ou mais inércias no mesmo caminho causal, sendo uma delas com causalidade integral, somando-se as outras a esta. O grafo (C) indica a adição de um elemento capacitivo, com  $c_p = 0,0004\text{m/N}$ , no método de Elemento Rígido, com a consequente inversão da causalidade diferencial. Como é fisicamente justificável que o cabo que liga os blocos não é infinitamente rígido, este método resulta em um modelo realístico. A adição do elemento capacitivo aumenta a ordem do sistema em duas para cada restrição cinemática aliviada, e também introduz altas frequências ao sistema, aumentando o esforço computacional para a solução do problema. No grafo (D), relativo ao método de Elemento Parasítico, observa-se a adição de um elemento capacitivo e um resistivo, com coeficiente  $b_p = 110\text{Ns/m}$ , que é uma extensão do método anterior considerando o amortecimento inerente do cabo. Nesta abordagem também há um aumento de ordem na razão de duas por restrição aliviada, porém as altas frequências são artificialmente amortecidas pelo elemento resistivo. Finalmente no grafo (E) a restrição cinemática do modelo é descrita por meio do Multiplicador de Lagrange, que no grafo aparece como uma fonte controlada de esforço, onde a força de restrição é calculada a cada instante de modo que a diferença de velocidades entre os blocos é zerada.

Na seqüência deste estudo, é montado o diagrama de bloco do sistema. O da FIG. 4.4 é empregado para na simulação do sistema sem modificação e daquele com transferência de inércia, bastando apenas acionar o interruptor (“*manual switch*”) para cada caso.

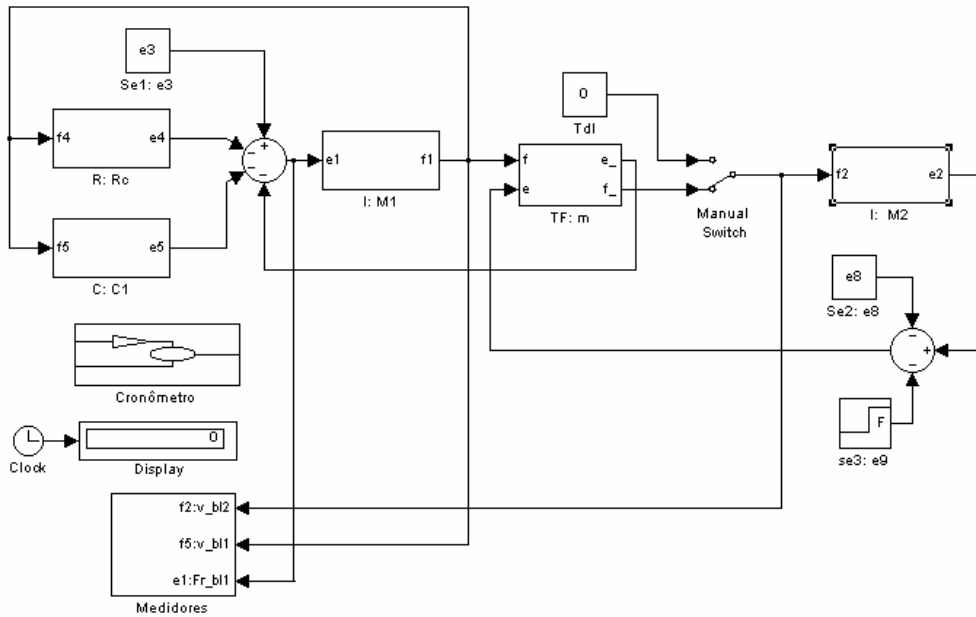


FIG. 4.4 Diagrama de blocos do sistema.

O diagrama de blocos da FIG. 4.5 é utilizado na simulação do sistema para os demais métodos, sendo os elementos de cada abordagem escolhidos no bloco “elemento relaxador de restrição”.

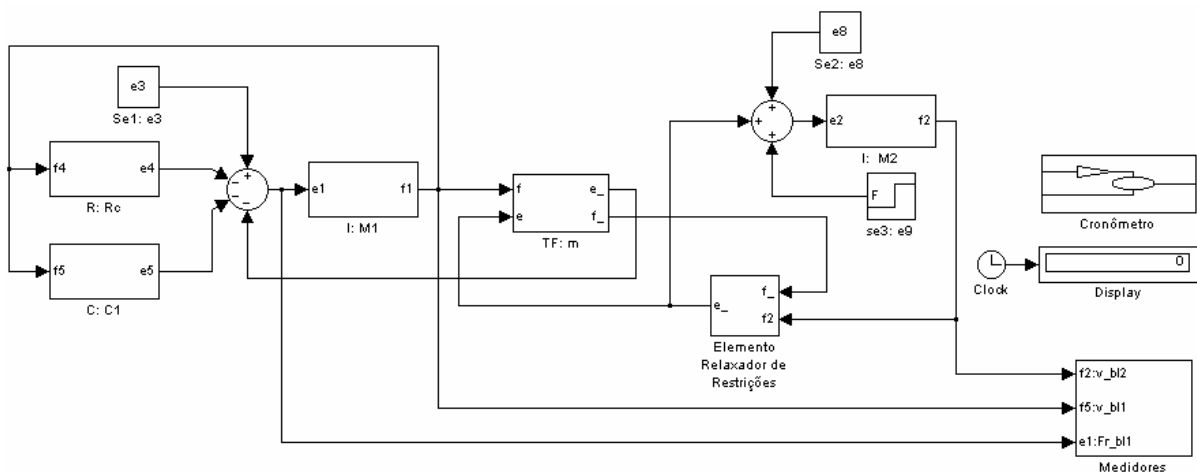


FIG. 4.5 Diagrama de blocos do sistema. Abordagens de simulação.

Para efeito de validação das respostas obtidas em cada simulação, é feita a simulação das equações de estado do sistema. Conforme apresentado na EQ. 4.9, utiliza-se a forma explicitada das equações de estado, onde a matriz de massa do sistema é igual à identidade.

$$\begin{Bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{q}_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{m_1 a} & \frac{1}{c a} \\ \frac{1}{m_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ q_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{m}{a} & \frac{m}{a} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_3 \\ e_8 \\ e_9 \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

A valor da constante  $a$  é calculado algebricamente como na EQ. 4.10 para explicitar a variável de estado  $p_1$ , onde  $m$  é o módulo do transformador.

$$a = \left( 1 + m^2 \frac{m_2}{m_1} \right) \quad (4.10)$$

A seguir são mostradas algumas respostas do sistema obtidas pela solução analítica do sistema com equações explícitas. Estas respostas são comparadas àquelas obtidas via diagrama de blocos pelos métodos estudados. O gráfico da FIG. 4.6 mostra o deslocamento do bloco 1, lembrando que a orientação positiva é no sentido descendente do modelo.

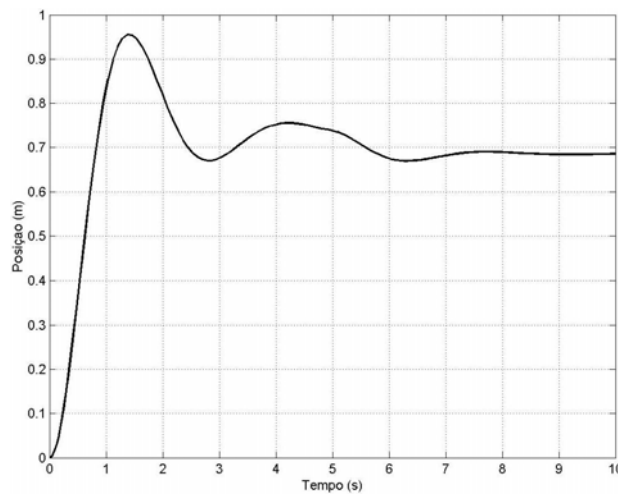


FIG. 4.6 Posição do bloco 1.

Na FIG. 4.7 são plotadas as velocidades dos blocos, evidenciando o acoplamento físico entre eles, por meio da restrição cinemática dada pelo cabo.

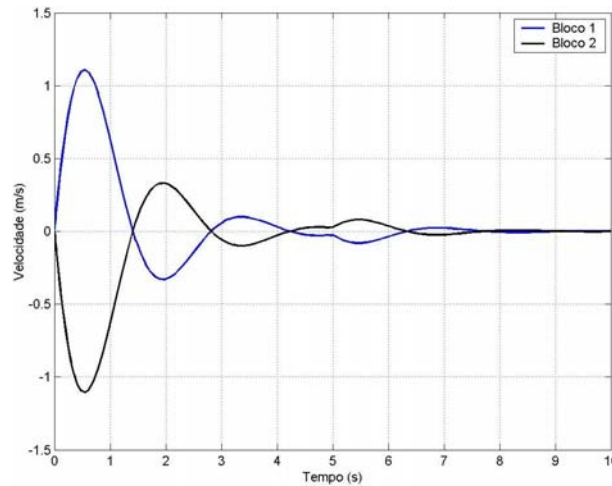


FIG. 4.7 Velocidades dos blocos.

A variação da força resultante no bloco 1 é mostrada no gráfico da FIG. 4.8, onde é possível se identificar o efeito da força  $F$ , subitamente aplicada ao sistema no instante igual a 5 segundos, gerando uma descontinuidade na simulação.

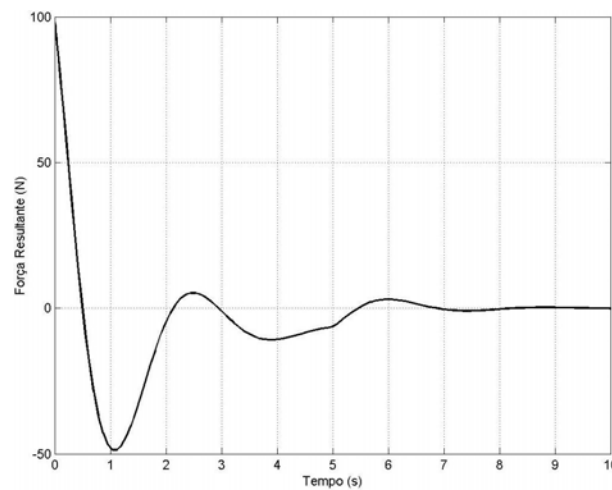


FIG. 4.8 Força resultante no bloco 1.

As cinco abordagens equivalentes, simuladas por meio dos cinco modelos propostos, se mostraram satisfatórias para a simulação de sistemas com *ZCP* classe 1, conforme demonstrado pela comparação dos seus resultados feita acima. Concentrando-se agora na carga computacional requerida por cada um dos modelos, alguma diferença entre os métodos pode ser verificada. Na TAB. 4.2 e na TAB. 4.3 estão relacionados os tempos de simulação dos cinco modelos em diagrama de blocos para cada uma das abordagens, assim como para o mo-

delo de comparação analítico, considerando-se a força  $F$  constante e como degrau, respectivamente. A mesma tolerância absoluta é utilizada em todas as simulações. Três métodos numéricos de solução de equações diferenciais são empregados: o Método Runge-Kutta de quarta ordem e passo variável, identificado no *Matlab*® como *ODE45*, aplicável a sistemas explícitos; o Método de Gear, com passo variável e ordem variável, identificado no *Matlab*® como *ODE15s* (com a opção “*BDF*” ativada), utilizado em sistemas implícitos ou rígidos; e o algoritmo *ODE23tb*, com um primeiro estágio dado pela regra dos trapézios e um segundo passo que é uma *BDF* de ordem fixa e igual a 2, que pode ser mais eficiente que o *ODE15s* em problemas com tolerância absoluta muito severa.

TAB. 4.2 Tempo de simulação em segundos<sup>(1)</sup>.

	<b>Analítico</b>	<b>ZCP</b>	<b>Elemento Rígido</b>	<b>Elemento Parasítico</b>	<b>Multiplicador de Lagrange</b>	<b>Transferência de Inércia Dependente</b>
<i>ODE45</i>	0,98	0,77	12,74	3,46	1,15	0,88
<i>ODE15s</i>	1,37	1,21	24,16	1,10	1,31	0,82
<i>ODE23tb</i>	2,58	2,68	41,85	1,48	2,08	0,68

<sup>(1)</sup>: Computador AMD K6 – II/ 500MHz, 128 MB RAM.

TAB. 4.3 Tempo de Simulação com degrau defasado, em segundos<sup>(1)</sup>.

	<b>Analítico</b>	<b>ZCP</b>	<b>Elemento Rígido</b>	<b>Elemento Parasítico</b>	<b>Multiplicador de Lagrange</b>	<b>Transferência de Inércia Dependente</b>
<i>ODE45</i>	0,72	0,88	11,31	3,85	1,21	0,88
<i>ODE15s</i>	1,70	1,15	45,69	2,53	1,65	1,04
<i>ODE23tb</i>	2,03	2,86	30,54	1,59	2,20	0,93

<sup>(1)</sup>: Computador AMD K6 – II/ 500MHz, 128 MB RAM.

Nas tabelas mostradas acima são destacados os menores tempos de simulação obtidos por cada um dos modelos, possibilitando eleger o algoritmo mais indicado em cada método. O modelo sem modificação do grafo (*ZCP*) e o modelo de transferência de inércia dependente apresentam os melhores rendimentos computacionais com algoritmo *non-stiff*, comparáveis ao modelo explícito do *Matlab*®. No primeiro, entretanto, nenhuma alteração no modelo original do sistema é requerida, enquanto no segundo a modificação restringe as possibilidades de simulações por não permitir a atribuição de condições iniciais ao elemento transferido. A carga computacional da abordagem por Multiplicador de Lagrange é apenas um

pouco maior que no método direto de simulação (*ZCP*), devido ao fato de a ordem do modelo ser maior que a do modelo sem modificação.

Na abordagem de Elemento Rígido, a adição do elemento capacitivo ao modelo faz com que o sistema se torne rígido no sentido mecânico. Porém tal sistema, possuindo um autovalor com grande parte imaginária em comparação com os outros autovalores, não é rígido no sentido numérico da expressão, segundo a definição dada por LAMBERT (1980) (ver Apêndice 3). As tabelas mostram que este modelo não é resolvido com eficiência por métodos normalmente aplicáveis a problemas rígidos, como o Método de Gear, sendo mais bem resolvido por algoritmo *non-stiff*, como o Runge-Kutta. O comportamento altamente oscilatório do sistema, no entanto, requer o emprego de passos de integração muito pequenos para garantir a acuracidade imposta pela tolerância do problema.

Pelo método de Elemento Parasítico, a adição do elemento resistor provoca um amortecimento que elimina o modo de alta frequência associado ao elemento capacitivo, e também leva o sistema a se tornar artificialmente rígido no sentido numérico da expressão, tendo um autovalor com grande parte real (LAMBERT, 1980). O modelo assim construído pode ser simulado com passos de integração maiores. Um menor esforço computacional é conseguido quando são empregados algoritmos para solução de problemas rígidos, como o *ODE15s* e o *ODE23tb*. Nota-se, ainda, que o algoritmo *ODE23tb* é mais eficiente que o *ODE15s* em simulação de problemas rígidos na presença de descontinuidades, como mostrado na TAB. 4.3, isto devido à ordem fixa do estágio *BDF*, que confere a estabilidade necessária na área da descontinuidade sem aumentar o esforço computacional.

Partindo-se agora para o estudo da acuracidade dos métodos, são consideradas as abordagens que tratam a dependência no modelo sem modificação, o que significa neste caso o cabo permanecer inextensível durante a simulação, e as que tratam a dependência por meio de “alívio de restrições cinemáticas”, como no Elemento Rígido, no Elemento Parasítico e no Multiplicador de Lagrange, que podem ser considerados mais realistas quando são relacionados a aspectos físicos negligenciados do modelo. Para o estudo da acuracidade dos métodos, são consideradas as restrições cinemáticas em posição, velocidade e aceleração, como descritas nas EQ. 4.11 a EQ. 4.13, onde  $m$  é o módulo o transformador. As simulações são feitas com o método numérico mais adequado, segundo a TAB. 4.3.



$$mx_1 - x_2 = 0 \quad (4.11)$$

$$m\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = 0 \quad (4.12)$$

$$m\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = 0 \quad (4.13)$$

Na FIG. 4.9 são mostrados gráficos da violação da restrição de posição nos quatro métodos considerados, para o modelo com descontinuidade.

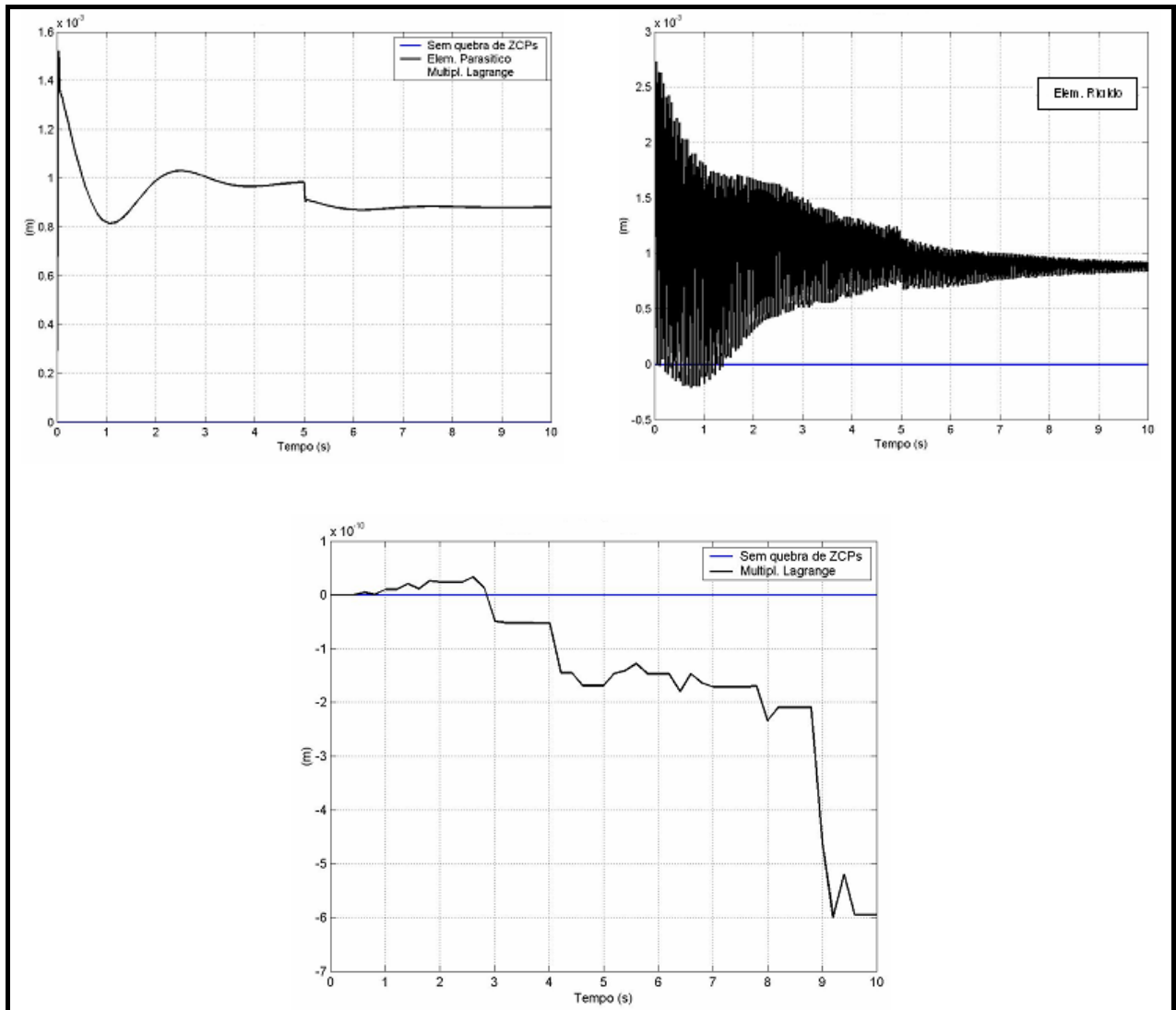


FIG. 4.9 Violação da restrição de posição.

O modelo “ZCP” não apresenta violação das restrições cinemáticas, pois as variáveis consideradas são dependentes e acopladas pelo transformador. As violações de restrição de posição da EQ. 4.11 dos modelos de Elemento Parasítico e de Elemento Rígido são pequenas, da ordem de  $10^{-3}$  m, duas ordens de grandeza a menos que na resposta do modelo. Estes

resultados, porém, podem ser consideráveis dependendo da análise que se realize. No Elemento Rígido ainda há o problema de se ter um comportamento altamente oscilatório. O modelo por Multiplicado de Lagrange fornece resultados mais precisos dentre os métodos de alívio de restrição, da ordem e  $10^{-10}$ m. Em simulação longa (900 segundos de tempo real), a violação não passa de  $10^{-8}$ m.

A violação da restrição de velocidade dos modelos pela EQ. 4.12 é mostrada na FIG. 4.10.

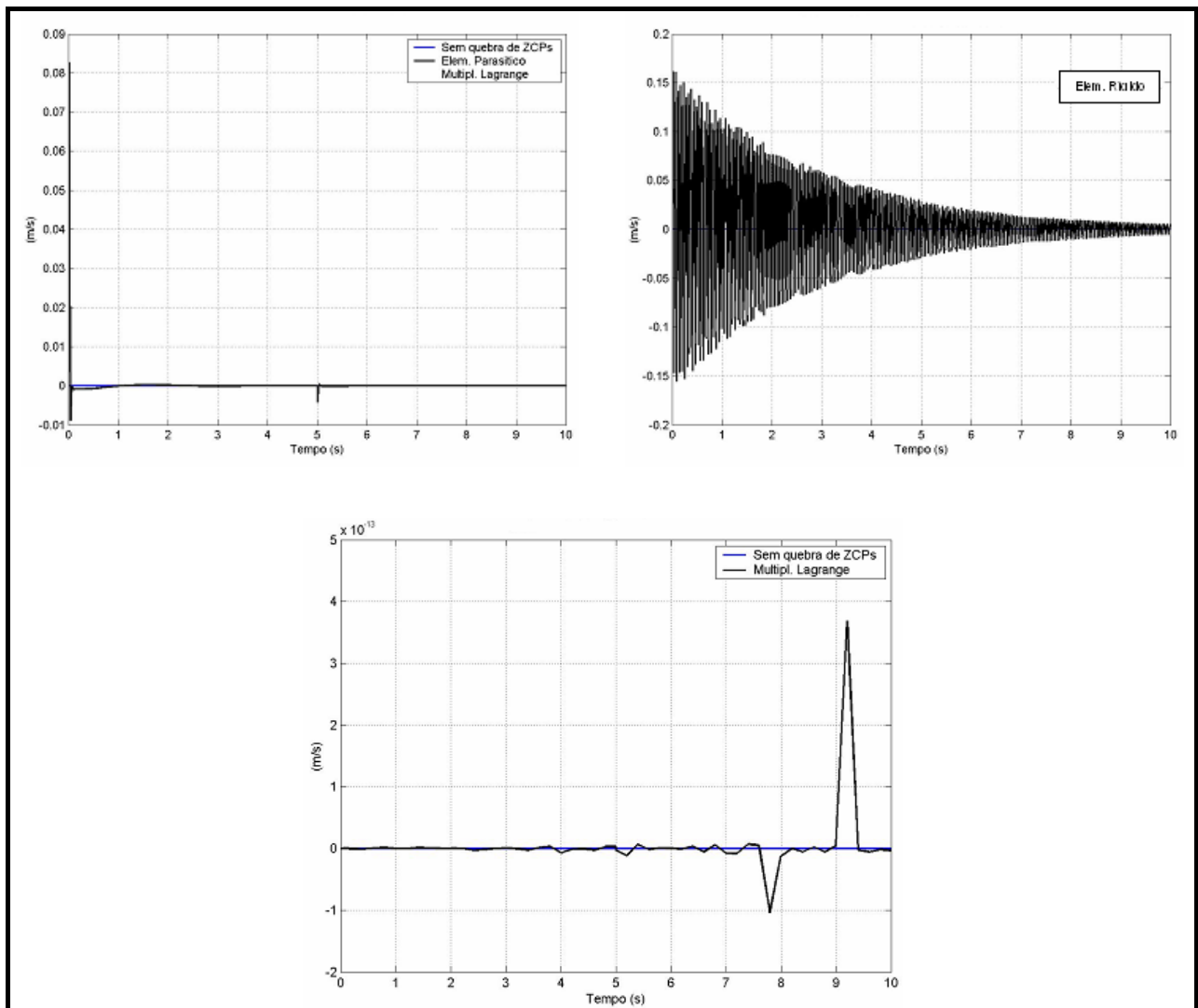


FIG. 4.10 Violação da restrição de velocidade.

A abordagem de Elemento Rígido causa violação da restrição de velocidade da ordem de  $10^{-1}$ m/s, muito próxima da resposta do sistema ( $10^0$ m/s), e altamente oscilatória. No Elemento Parasítico a violação chega na ordem de  $10^{-2}$ m/s, isto devido a dois fatores: a pre-

sença da descontinuidade e, principalmente, a condição inicial de velocidade dos blocos. Já pela abordagem do Multiplicador de Lagrange, é possível simular o sistema com violação mínima da restrição de velocidade ( $10^{-13}$  m/s).

Por último são mostrados na FIG. 4.11 os gráficos relativos à EQ. 4.13, que é a restrição de aceleração do modelo.

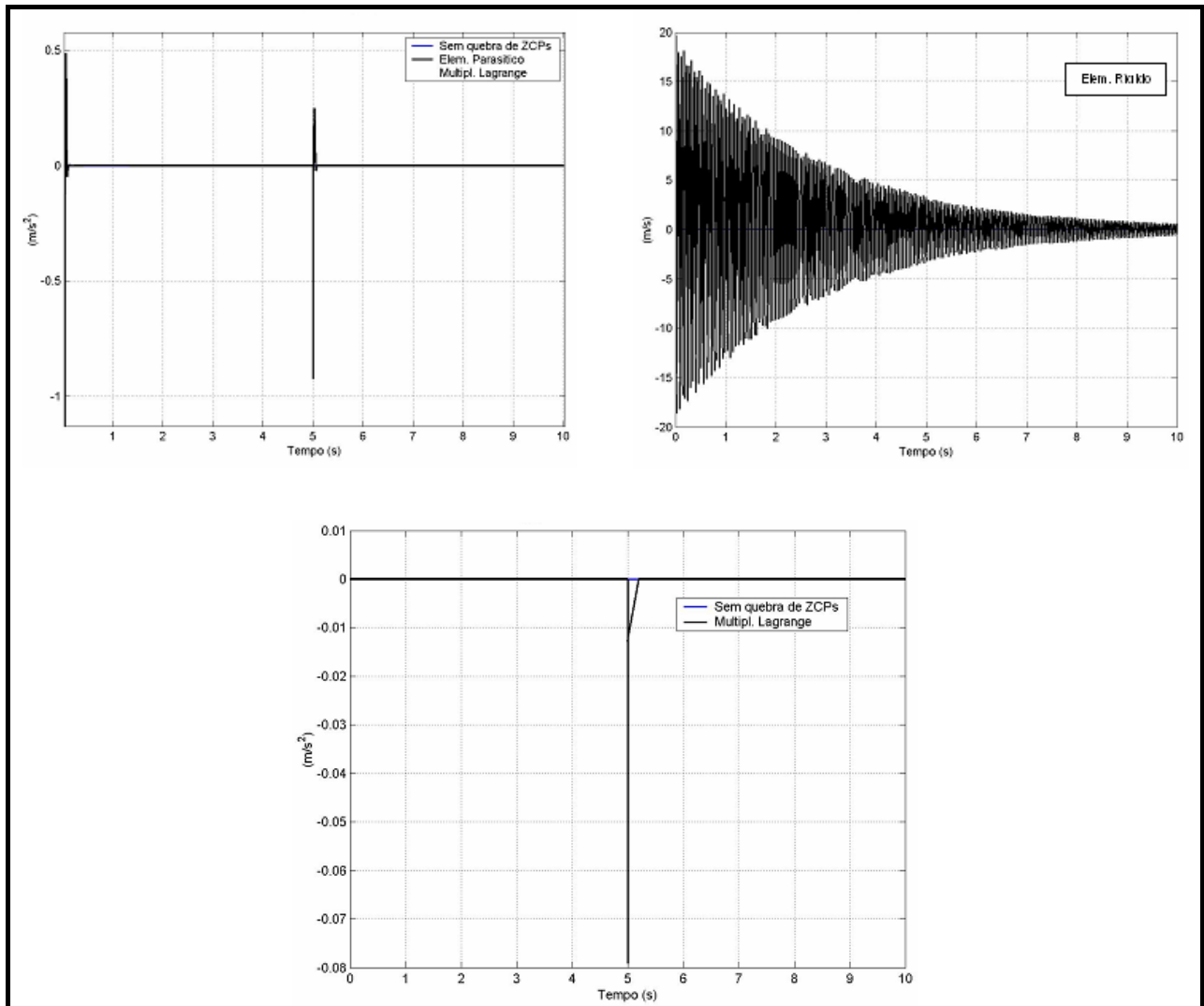


FIG. 4.11 Violação da restrição de aceleração.

Aqui a violação da restrição cinemática no modelo de Elemento Parasítico mantém-se duas ordens de grandeza abaixo da resposta do sistema, fortemente influenciada pela descontinuidade da simulação, assim como no Multiplicador de Lagrange, cuja violação da restrição de aceleração atinge valores três ordens de grandeza menores que na resposta do sis-

tema. Na abordagem de Elemento Rígido esta restrição fica na mesma ordem de grandeza da resposta do sistema, o que compromete totalmente a análise de força neste modelo.

Para concluir o estudo da acuracidade dos métodos, algumas considerações devem ser feitas. Primeiramente, com relação ao valor dos coeficientes de rigidez e de amortecimento a serem utilizados. Normalmente o que interessa na simulação de um modelo descrito pelas abordagens analisadas é a sua resposta geral preservando as restrições e não importando aspectos físicos negligenciados associados a estas. Nota-se que é muito difícil conhecer o valor real dos coeficientes para uma restrição, até porque em muitos casos tais coeficientes podem não estar associados a nenhuma característica física. Para a correta formulação dos métodos é preciso que se considere um valor suficientemente alto para o coeficiente de rigidez. Observa-se que quanto maior for o seu valor, mais acurado será o método, porém muito mais tempo de simulação será necessário para a obtenção das respostas. Na abordagem de Elemento Parasítico, no entanto, é possível se aumentar a acuracidade sem aumento no esforço computacional desde que se aumente também o valor do coeficiente de amortecimento.

Todas as quatro abordagens podem ser satisfatoriamente utilizadas para a análise de modelos com algum tipo de descontinuidade via fluxo de sinais, como foi mostrado, inclusive na simulação direta do modelo com elemento armazenador dependente, que emprega o bloco de derivação em sua descrição. Em adição, com o emprego de condições iniciais de velocidade adequadas nas inércias consegue-se reduzir as violações das restrições cinemáticas no início da simulação.

O método de Elemento Rígido confere ao modelo um acentuado comportamento vibratório que, além de comprometer a eficiência e a acuracidade da simulação, pode causar efeitos indesejáveis quando se considera a adição de mais de um elemento rígido ou o acoplamento com subsistema que possua ao menos um modo de vibração grande. Como consequência, respostas erradas seriam obtidas ou mesmo poderia ocorrer falha na simulação.

O modelo “ZPC” mostrou-se ser o mais indicado para a modelagem e simulação de sistemas com elementos armazenadores com causalidade diferencial por ser direto, isto é, não requer modificações no modelo, mais eficiente e acurado.

#### 4.1.4 EXEMPLO DE SISTEMA CONTENDO ZPC CLASSE 1 E DESCONTINUIDADES: ESTUDO DA ESTABILIDADE DE UM MODELO DE VEÍCULO PLANO.

A seguir, é estudado um exemplo de aplicação da metodologia de modelagem e simulação modular em modelo com elementos armazenadores dependentes e na presença de descontinuidades. O modelo analisa a rolagem do veículo ao passar sobre um obstáculo oblíquo à direção de deslocamento. As duas suspensões que aparecem na FIG. 4.12 referem-se às suspensões do lado direito e do esquerdo, e existe simetria do veículo em relação ao eixo  $x$ , ou seja, as distâncias do centro de massa do chassi até as suspensões são iguais.

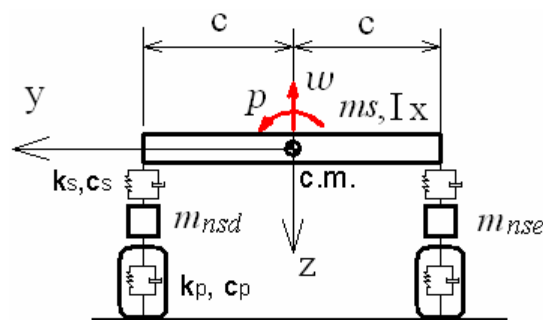


FIG. 4.12 Modelo plano para a análise da rolagem.

Ainda neste exemplo, dois casos são analisados, considerando o veículo com e sem barra anti-rolagem. A barra estabilizadora é utilizada no veículo para reduzir o efeito da rolagem do chassi, principalmente quando da realização de curvas pelo veículo, a fim de aumentar a sua estabilidade e o conforto dos passageiros.

Neste modelo plano, considera-se o movimento de rolagem como ocorrendo em torno de um centro de rolagem, situado a uma distância  $hr$  abaixo do centro de massa do chassi. A localização do eixo de rolagem do veículo depende exclusivamente das características geométricas da suspensão do veículo. No modelo proposto considera-se a massa suspensa do veículo como sendo uma barra rígida, com massa concentrada no centro de massa. A massa suspensa possui dois graus de liberdade, um de translação na direção  $z$  e outro de rotação em torno do eixo  $x$  (rolagem). Algumas simplificações do modelo devem ser definidas como:

- o chassi realiza pequenos deslocamentos, de modo que as distâncias dos pontos de aplicação das forças ao centro de massa se mantém constante;
- o movimento de rolagem ocorre em torno de um “centro de rolagem”, situado a uma distância  $hr$  abaixo do centro de massa do veículo;
- os pneus são representados pelos seus efeitos de flexibilidade e de amortecimento;

O grafo multiligação deste modelo, mostrado na FIG. 4.13, reúne todas as características de interesse do veículo para a simulação. São representados os campos dissipadores e de flexibilidades dos pneus e suspensões  $R_p$  e  $R_s$ ,  $C_p$  e  $C_s$ , respectivamente; o campo inercial relativo às massas não-suspensa  $I_s$  e suspensa (chassis)  $I_v$ ; os transformadores  $TF_1$  que relaciona os movimentos angulares com os lineares do chassi, e  $TF_2$  que nada mais é do que o teorema dos eixos paralelos (momento do eixo de rolagem transferido para o eixo x), na forma de grafos de ligação. Ainda na FIG. 4.13, o campo capacitivo  $C_{RB}$  vinculado à ligação número 18 do grafo (em destaque) introduz o efeito da barra anti-rolagem ao sistema, sendo considerado, portanto, somente no modelo com barra. A fonte de fluxo  $S_f$  se refere a velocidades nas rodas esquerda e direita devido à passagem do veículo obliquamente sobre um obstáculo, como por exemplo, um quebra-molas.

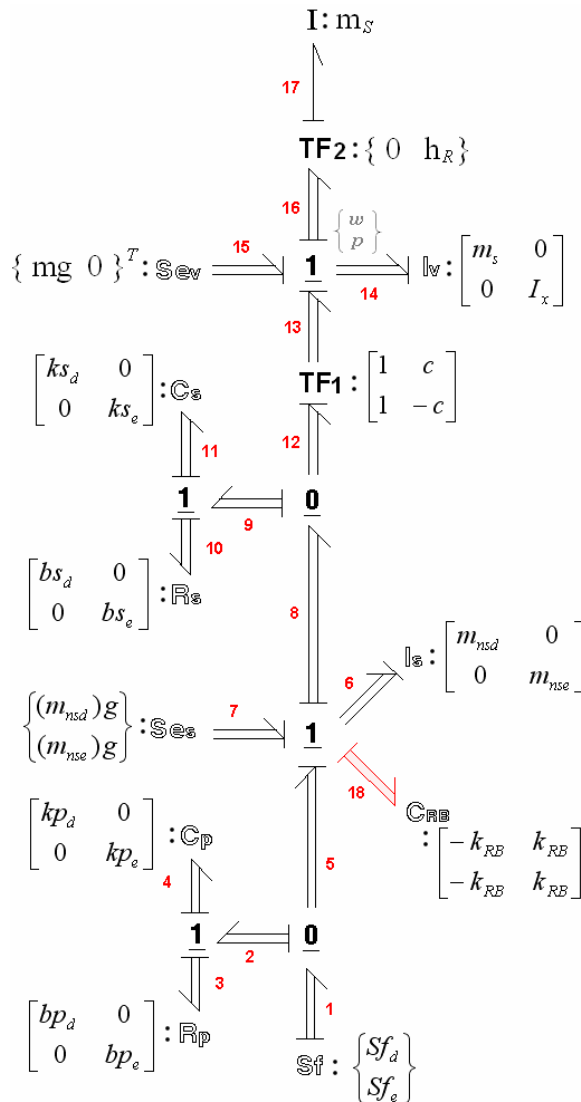


FIG. 4.13 Grafo de ligação da dinâmica do veículo.

Seguindo o procedimento modular proposto, o grafo de ligação representativo do sistema da FIG. 4.13 é traduzido no diagrama de bloco mostrado na FIG. 4.14, que pode ser imediatamente simulado computacionalmente por pacotes de simulação por diagrama de bloco, sem que se tenha passado pela fase de equacionamento do sistema.

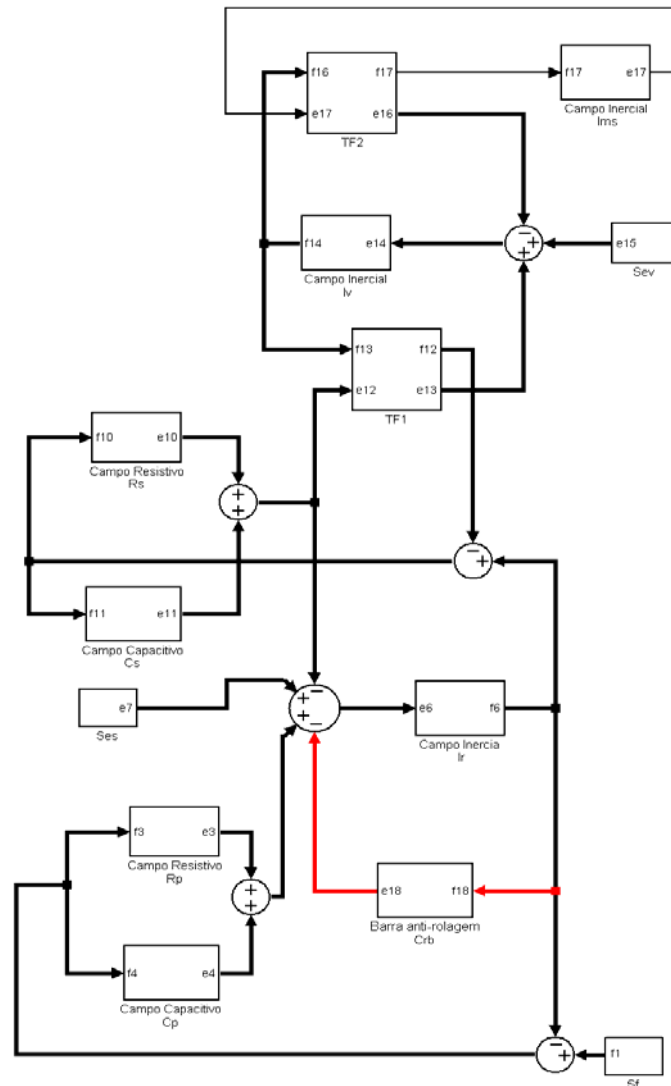


FIG. 4.14 Diagrama de blocos da dinâmica do veículo.

A seguir são mostrados os resultados das simulações, realizadas no *Simulink*®. Os parâmetros de simulação estão listados na TAB. 4.4.

TAB. 4.4 Parâmetros de simulação do veículo.

Parâmetros	Valores
<i>Veículo</i>	
Meia-distância entre eixos ( $c$ )	0,70 m
Distância vertical $CM - eixo de rolagem$ ( $h_r$ )	0,25 m
Massa suspensa ( $m_s$ )	1.500 kg
Momento de inércia no eixo de rolagem ( $I_x$ )	2.000 kg m <sup>2</sup>
<i>Suspensão</i>	
Rigidez equivalente ( $k_s$ )	20.000 N/m
Rigidez da barra anti-rolagem ( $k_{RB}$ )	75.000 N/m
Coefficiente de amortecimento ( $b_s$ )	1.750 Ns/m
<i>Pneu</i>	
Massa não-suspensa ( $m_{ns}$ )	200 kg
Rigidez ( $k_p$ )	80.000 N/m
Coefficiente de amortecimento ( $b_p$ )	20.000 Ns/m

O gráfico da FIG. 4.15 mostra como é aplicada a excitações de base nas rodas, pela velocidade de deslocamento das rodas devido à passagem por um obstáculo obliquo à direção de deslocamento.

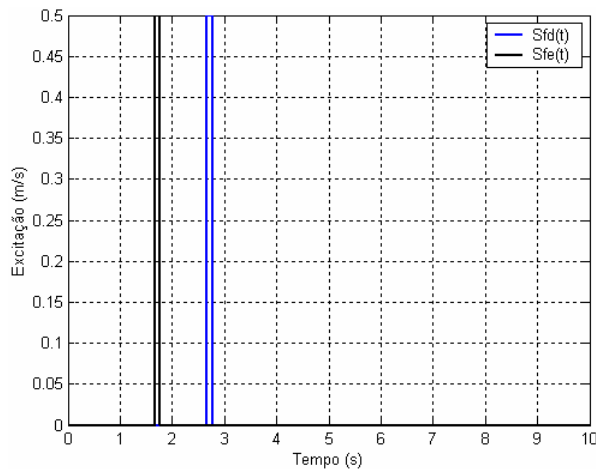


FIG. 4.15 Velocidades das excitações de base nas rodas esquerda (em preto) e direita (em azul).

A FIG. 4.16 mostra o comportamento do modelo segundo a rolagem, e a FIG. 4.17 mostra o comportamento do modelo quanto ao deslocamento vertical. Cada um destes com e sem barra anti-rolagem.



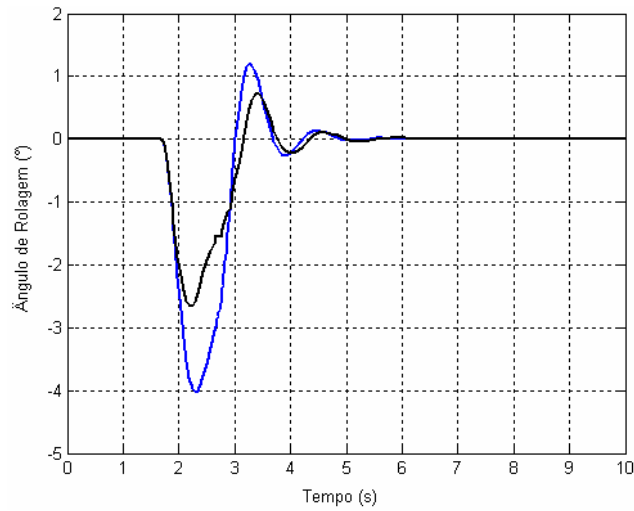


FIG. 4.16 Ângulo de rolagem do chassi no modelo sem barra (linha azul) e com barra anti-rolagem (linha preta).

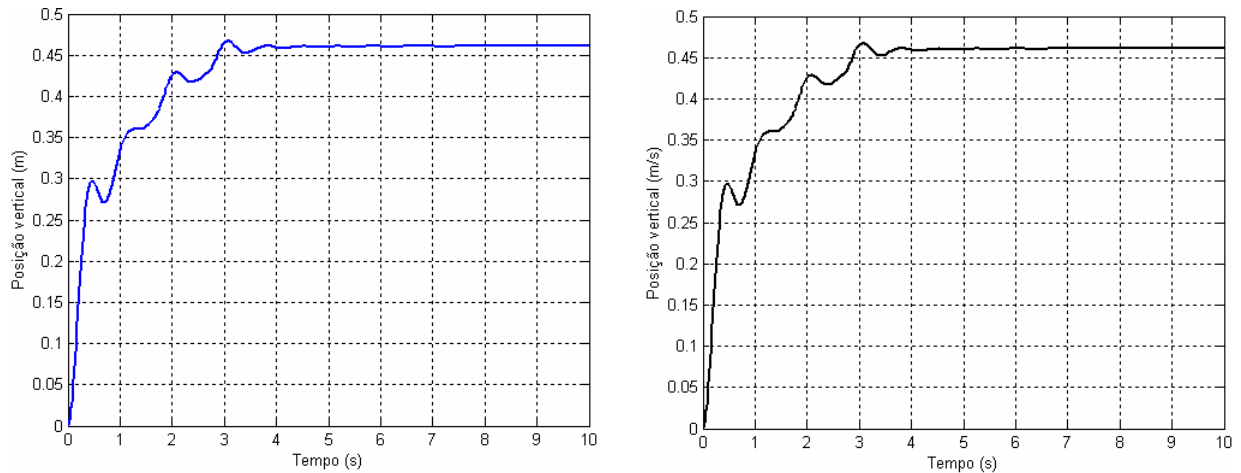


FIG. 4.17 Deslocamento vertical do CM do veículo no modelo sem barra (linha azul) e com barra anti-rolagem (linha preta).

Nota-se pelos gráficos uma redução do ângulo de rolagem no modelo com a barra anti-rolagem, porém sem haver modificação no deslocamento vertical. Isto é devido ao fato de a barra anti-rolagem só atuar na redução da rolagem, pela diferença de velocidade entre as suspensões do lado direito e esquerdo.

#### 4.2 PROPOSTAS DE SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DECORRENTES DO ACOPLAMENTO ENTRE SUBSISTEMAS COM MUDANÇA DE CAUSALIDADE.

Vários autores discutem metodologias de abordagem de sistemas onde as interações dinâmicas entre subsistemas devam ser consideradas. Em geral as técnicas clássicas não conduzem a uma forma simples de representação dessas interações. A técnica dos grafos de ligação, por outro lado, possui vantagens no que concerne ao desenvolvimento de modelos onde há acoplamento de sistemas dinâmicos, pois toda sua formulação está baseada no fluxo de potência existente entre estes sistemas. Este fato, aliado à modularidade na representação, possibilita a obtenção independente de modelos, descritos com uma única notação, e que podem ser conectados a fim de se obter o modelo de um sistema complexo.

De forma a caracterizar as interações dinâmicas entre os subsistemas, torna-se necessário relacionar as variáveis de entrada e saída de cada subsistema. Esta definição é bastante clara ao se utilizar a técnica dos grafos de ligações, uma vez que associados a cada ligação estão um esforço e um fluxo cujos sentidos são estabelecidos pela causalidade. Justaposições das ligações entre subsistemas, a princípio podem ser feitas para se obter o modelo do sistema global.

Existem, no entanto, casos em que as causalidades associadas às portas de entrada e saída dos subsistemas são incompatíveis e, portanto, uma mudança de causalidade deve ser feita em um desses subsistemas de maneira a permitir o acoplamento entre eles. Nesta seção é discutida uma proposta de procedimento para o acoplamento de modelos lineares ou não-lineares de subsistemas dinâmicos de qualquer domínio físico, através do fluxo de potência em suas portas de entrada e saída.

Para que dois subsistemas individuais possam ser conectados é preciso inicialmente verificar as condições de compatibilidade, conforme apresentada em trabalho de SPERANZA NETO (1999), ou seja, se as variáveis de entrada e saída destes subsistemas são compatíveis. Na FIG. 4.18, por exemplo, os subsistemas podem ser imediatamente conectados, pois tanto a causalidade quanto a potência são compatíveis.

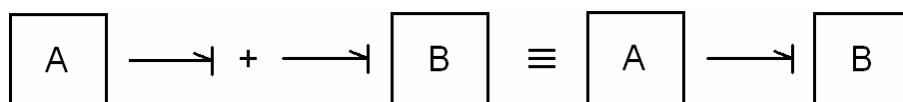


FIG. 4.18 Subsistemas com causalidade e potência compatível.

No caso mostrado na FIG. 4.19, em que os subsistemas possuem sentidos contrários de potência, basta inverter o sinal do sinal de entrada em A ou de saída em B para que haja compatibilidade.

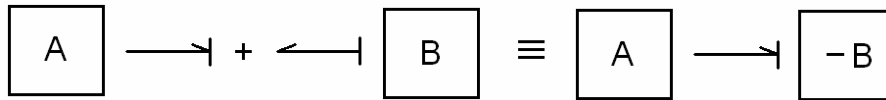


FIG. 4.19 Subsistemas com causalidade e potência invertida.

Já na situação mostrada na FIG. 4.20 os subsistemas possuem causalidades incompatíveis, com a variável de saída de A sendo esforço e a entrada em B sendo fluxo, caracterizando um conflito de causalidade. Em situações como esta, o acoplamento entre os subsistemas implica necessariamente na inversão da causalidade de um dos subsistemas, o que leva a dependência entre variáveis que caracterizam a dinâmica do sistema acoplado. É preciso conhecer quais variáveis de estado efetivamente representem o sistema global para saber qual causalidade inverter.

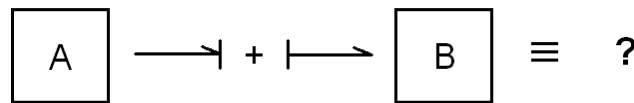


FIG. 4.20 Subsistemas com causalidade incompatível.

A dependência que ocorre em um dos subsistemas da FIG. 4.20 quando acoplado geralmente possui significado físico, dado por uma restrição cinemática ou por uma prescrição de fluxo. Como visto na seção anterior, a simulação direta de sistemas com dependências em fluxo de sinais pelo procedimento modular é possível, porém quando não se tem certeza sobre qual dos subsistemas deve ter a causalidade da ligação aberta invertida (subsistema que contém o elemento dependente com causalidade diferencial), uma opção é utilizar um elemento de inversão de causalidade no acoplamento entre os subsistemas. Tais elementos de inversão de causalidade foram apresentados na última seção e podem possuir ou não significados físicos.

Para ilustrar esta discussão com um exemplo real de sistema, considere o grafo multiligação mostrado na FIG. 4.21, que representa o modelo de rotores flexíveis estudado por FURTADO (1999), composto por rotores rígidos, eixo flexível e mancais flexíveis com atrito.

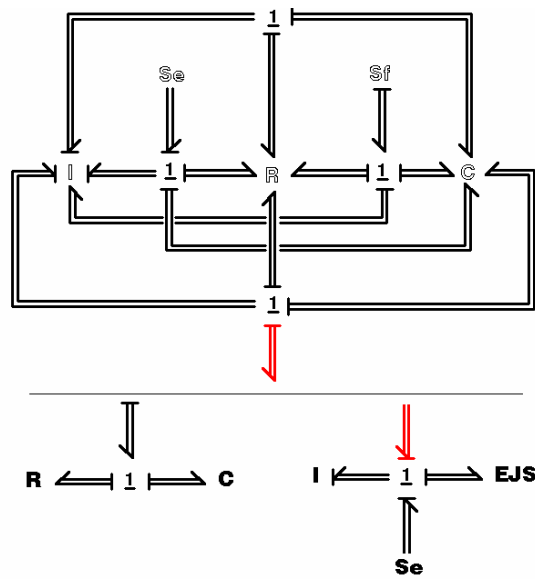


FIG. 4.21 Subsistemas com causalidade incompatível.

O subsistema estrutural e o subsistema dos rotores rígidos apresentam conflito de causalidade (ligações em vermelho). Na FIG. 4.22 é feita a inversão da causalidade da ligação aberta do subsistema dos rotores. Esta característica está diretamente relacionada ao fenômeno físico, pois o movimento dos rotores (fluxos do campo inércia) está restrito ao movimento do eixo flexível por alguns dos graus de liberdade do campo inércia da estrutura. O que significa dizer que os rotores são conduzidos pelo eixo, causando a dependência da inércia dos rotores e o aparecimento da causalidade diferencial (ligação em vermelho).

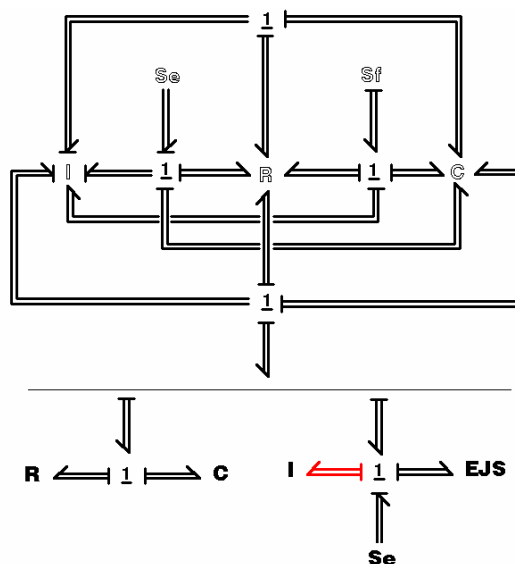


FIG. 4.22 Montagem dos subsistemas com inversão de causalidade.

O sistema da FIG. 4.22 já poderia então ser expandido em diagrama de blocos para então ser simulado, pois a escolha da inversão de causalidade neste caso é sabidamente correta. A adição de um elemento de inversão de causalidade também pode ser empregada. Observando-se os resultados obtido na seção anterior, é sugerida a descrição do elemento de inversão de causalidade na forma de Multiplicador de Lagrange ou de Elemento Parasítico, por serem mais eficientes e acurados. Observa-se ainda que no caso de se optar pelo Elemento Parasítico, é importante que se escolha valores de rigidez suficientemente altos para minimiza a influência deste elemento na resposta do sistema.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

#### 5.1 CONCLUSÕES.

Uma grande quantidade de trabalhos em modelagem e simulação de sistemas mecânicos, baseado na técnica dos grafos de ligações, têm sido publicados nos últimos anos. Com a evolução dos computadores na última década, também vários softwares fechados de simulação de sistemas baseados em grafos de ligações têm sido desenvolvidos, como o *AMESim*® e o *20 – SIM*®, empregados na modelagem e simulação de sistemas dinâmicos sem equacionamento, utilizando formas gráficas equivalentes (grafo de ligação, diagrama de blocos e diagrama icônico).

Neste contexto, foi apresentado neste trabalho um procedimento de modelagem modular de sistemas físicos, que emprega a construção de diagrama de blocos baseado em grafos de ligações, e onde o entendimento físico do sistema é preservado na representação. Verificou-se que a construção de modelos com vários níveis de complexidade pelo procedimento modular proposto geralmente é feita de forma mais rápida e prática em relação à escolha pelo equacionamento e codificação do problema, pois é feita de maneira direta, trabalhando-se com representações gráficas dos componentes do sistema. Também devido à modularidade, tem-se uma estratégia muito eficaz de modelagem através da descrição de todo um sistema pela descrição de suas partes. Esta metodologia apresenta uma série de vantagens – a possibilidade de implementação em softwares gerais como o *Simulink*®, que é uma opção ao uso de pacotes caros e específicos para certos domínios ou áreas (dinâmica, estrutural, térmico, etc.), e que possui uma vasta coleção de blocos básicos que ampliam as possibilidades e a flexibilidade do processo de modelamento, o que leva a uma fácil adaptação às necessidades do usuário. O processo de obtenção de respostas em si também é facilmente feito identificando-se nos sinais entre componentes e subsistemas as variáveis de interesse e adicionando-se ali um dispositivo de saída, o que facilita também a realização de vários estudos num mesmo modelo em diagrama de blocos. Outra vantagem deste procedimento é o razoável ganho de tempo observado na construção e simulação de modelos mais complexos, por ser desnecessário o equacionamento e subsequente codificações numéricas para a simulação e

análise dos sistemas, e também porque os eventuais reparos, correções e alterações do modelo devido a erros podem ser verificados visualmente no diagrama de blocos no local onde estes ocorrem.

Verificou-se ainda que uma grande simplificação no diagrama de blocos pode ser obtida ao se utilizar a forma multiligação dos grafos, principalmente quando são considerados sistemas de grande porte ou descritos por parâmetros distribuídos. Pequeno trabalho adicional é feito quando se emprega a notação multiligação, que consiste na montagem das matrizes características dos campos (geralmente simples matrizes diagonais) ou na montagem e partição das matrizes do MEF quando se consideram subsistemas estruturais, sendo possível realizar estes trabalhos por meio de rotinas simples e padronizadas, conforme demonstrado no Apêndice A, que podem ser empregadas a vários modelos.

O tratamento de aspectos específicos da modelagem dos grafos de ligações foram formalizados com a proposta de representações equivalente em diagrama de blocos, permitindo ampliar as possibilidades de modelamento do procedimento modular. Foram descritas as formas representativas dos campos mistos, campos não-lineares e campos modulados, discutido a implementação destes no software *Simulink*®, e questão como a simulação de elementos armazenadores com causalidade diferencial e do acoplamento com mudança de causalidade. As análises com emprego de modelos foram satisfatórias no sentido de demonstrar a possibilidade de se incorporar tais casos no procedimento de maneira bastante razoável e direta.

## 5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.

Este trabalho, sendo parte de linha de pesquisa sobre modelagem de sistemas dinâmicos, segue vários outros trabalhos desenvolvidos no IME, baseados principalmente na técnica dos grafos de ligações. Porém, diferentemente dos outros, este trabalho se baseou na elaboração de um procedimento de modelagem e simulação de sistemas mecânicos. Tal procedimento, apesar das vantagens que trás, ainda é pouco explorado, talvez pela falta de referências no tratamento de sistemas complexos, o que poderia levar a sérias desvantagens pela expansão sem critérios. O procedimento tal como está formalizado neste trabalho já pode ser aplicado em dinâmica de sistemas de qualquer complexidade, mas também ainda pode ser mais incrementado, por exemplo, pela introdução de procedimentos automáticos. Assim, é possível sugerir continuações nesta linha por pelo menos dois caminhos: aplicações e sofisticação do procedimento.

Como aplicações típicas para o procedimento, destacam-se aquelas que envolve sistemas muito grandes e constituídos de muitos componentes e de várias áreas diferentes, inclusive com dispositivos de controle, bem como modelo de sistemas seriados, como automóveis. Pela modularidade do procedimento, seria possível construir blocos para cada componente, tão minuciosamente descrito quanto se queira, e armazená-los para posterior reuso. Um exemplo seria a construção de modelos veiculares tridimensionais que permitam o estudo de movimentos, forças e de estabilidade. É possível também considerar chassi flexível modelado como placa para o estudo de colisões ou deformações devido ao uso severo.

Considerando algumas sofisticações possíveis no procedimento, uma idéia é formalizar como poderiam ser feitas análises no domínio da frequência aproveitando a descrição de sistema estrutural no MEF como proposto por Da SILVA e SPERANZA NETO (1993) da maneira mostrada no Capítulo 3, para o estudo de ressonância dentre outros, com o emprego da transformada de Fourier por meio dos blocos FFT (“*Fast Fourier Transformation*”) nos sinais de saída do sistema. Aplicações de procedimentos automáticos também podem constituir grandes contribuições. Devido à lógica por trás da atribuição de causalidade e da montagem das equações de estado na técnica dos grafos, é possível se desenvolver códigos fechados, mesmo com interface gráfica, onde o usuário possa modelar sistemas por meio de blocos, ou ícones, representativos de objetos físicos, o que elimina maiores conhecimentos da técnica dos grafos de ligações por parte do usuário.



## **6 APÊNDICES**

## 6.1 APÊNDICE 1: MODELOS MATEMÁTICOS E CÓDIGOS COMPUTACIONAIS DOS PRINCIPAIS MODELOS

### 6.1.1 SISTEMA MECÂNICO ROTATIVO – ESTRUTURA DE JUNÇÃO.

Utilizando-se o sistema mecânico rotativo mostrado na FIG. 3.7, cabe apresentar o roteiro para a construção de modelos de estado de sistemas lineares e não-lineares proposto por ROSENBERG (1971), como discutido no Capítulo 2. Para tanto, é mostrado o código em *Matlab*® do sistema descrito por campo de estrutura de junção, como na FIG. 3.12, que tem como característica a construção da matriz estrutura de junção [J] do Sistema que relaciona as entradas e saídas da estrutura de junção do grafo como na EQ. 6.1.

$$\begin{Bmatrix} V \\ X_I \\ Z_D \\ d_{ent} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{UU} & J_{UI} & J_{UD} & J_{UL} \\ J_{IU} & J_{II} & J_{ID} & J_{IL} \\ J_{DU} & J_{DI} & J_{DD} & J_{DL} \\ J_{LU} & J_{LI} & J_{LD} & J_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ Z_I \\ X_D \\ d_{sai} \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

Para detalhes da construção do modelo de estado e obtenção da resposta do sistema, é dado o código computacional do modelo. Lembrando que no procedimento modular, além da construção do diagrama de blocos é preciso também que se monte a matriz [J], o que pode ser feito de maneira muito simples.

---

## Início e Entrada de Dados

---

```
clear
clc
global g A B m a b U w0 r t
tic
g=9.81;           % [m/s2]  aceleração da gravidade
r1=0.075;         % [m]      raio da engrenagem 1
r2=0.25;          % [m]      raio da engrenagem 2
r=r1/r2;          %          relação de transmissão
k1=30000;         % [N/m]    rigidez do eixo 1
k2=10000;         % [N/m]    rigidez do eixo 2
N=1200;           % [rpm]    "giro" do motor
tau=0.055;        % [N.m]    Torque aplicado
rad2rpm=30/pi;   %          fator de conversão rad -> rpm
w0=N/rad2rpm;    % [rad/s]  vel. angular do motor
I1=0.1;           % [kg.m2] momento de inércia da engrenagem 1
I2=0.35;          % [kg.m2] momento de inércia da engrenagem 2
I3=0.15;          % [kg.m2] momento de inércia da engrenagem 3
C1=1/k1;          % [m/N]    flexibilidade do eixo 1
C2=1/k2;          % [m/N]    flexibilidade do eixo 1
R1=0.01;          % [Ns/m]   amortec. devido a atrito no mancal 1
R2=0.03;          % [Ns/m]   amortec. devido a atrito no mancal 2
R3=0.05;          % [Ns/m]   amortec. devido a atrito no mancal 3
```

---

## Cálculo da Matriz de estrutura de Junção [ $\mathcal{J}$ ] do Sistema

---

```
% Campos Característicos
Si=diag([1/I1 1/I3 C1 C2]);
Sd=[I2];
L=diag([R1 R2 R3]);
% Matriz Estrutura de Junção (J)
Juu=zeros(2);
Jui=[0 0 1 0;0 1 0 0];
Jud=[0;0];
JuL=zeros(2,3);
Jiu=[0 0;0 1;1 0;0 0];
Jii=[0 0 1 -r;0 0 0 1;-1 0 0 0;r -1 0 0];
Jid=[-r 0 0 0]';
JiL=[-1 -r 0;0 0 -1;zeros(2,3)];
Jdu=[0 0];
Jdi=[r 0 0 0];
Jdd=0;
JdL=[0 0 0];
JLu=JuL';
JLi=-JiL'; JLd=JdL';
JLL=zeros(3);
J=[Juu Jui Jud JuL
    Jiu Jii Jid JiL
    Jdu Jdi Jdd JdL
    JLu JLi JLd JLL];
```

---

## Construção do Modelo de Estado do Sistema e Integração

---

```
T1=Jid*Sd*Jdi*Si;
T2=L*JLL;
T3=JiL*(inv(eye(size(T2))-T2));
Tf=inv(eye(size(T1))-T1-T3*L*JLd*Sd*Jdi*Si);
Tii=Jii*Si+T3*L*JLi*Si;
Tiu=Jiu+T3*L*JLu;
A=Tf*Tii; % matriz de estado
B=Tf*Tiu; % matriz de compatibilidade das entradas

tspan=[0 900];
ts=tspan(2); % Tempo de simulação (SIMULINK)
y0=[0 0 0 0];
[t,y]=ode45('TESE_06b',tspan,y0);
n=length(t);
function dy=TESE_06b(t,y)
e13=-tau; % [N.m] Torque aplicado
f1=w0; % [rad/s] Velocidade angular do motor
U=[f1 e13]';
dy=A*y+B*U;
```

---

## Armazenamento das Variáveis de Interesse

---

```
q2=y(1:n,3);
p4=y(1:n,1);
q11=y(1:n,4);
p15=y(1:n,2);
dq2=[A(3,1:4)*y'+B(3,1:2)*U]';
dp4=[A(1,1:4)*y'+B(1,1:2)*U]';
dq11=[A(4,1:4)*y'+B(4,1:2)*U]';
dp15=[A(2,1:4)*y'+B(2,1:2)*U]';
```

---

## Plotagem dos Resultados

---

```
figure(1)
plot(t,dq2*rad2rpm,'k','linewidth',1.5)
title('Velocidade Angular');
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Velocidade Ang.<dq2>(rpm)')
grid on;
figure(2)
plot(t,dp4,t,dp15,'k','linewidth',1.5)
title('Torques');
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Torques (Nm)')
legend('enr_1 <dp4>','enr_3 <dp15>')
grid on;

Time=toc
```

## 6.1.2 PROBLEMA DE CARGA MÓVEL SOBRE VIGA.

### 6.1.2.1 MODELO DO SISTEMA.

Analisando-se os modelos de carga móvel sobre viga apresentados no Capítulo 3, a partir do grafo de ligação mostrado na FIG. 6.1, é possível se construir as equações de estado para se obter as respostas deste sistema. Embora o procedimento utilizado nos problemas apresentados foi pela construção do diagrama de blocos diretamente a partir do grafo, os modelos matemáticos de comparação neste caso também foram feitos. Para exemplificar a obtenção das equações de estado para os problemas de carga móvel sobre viga, é considerado o caso da carga constante.

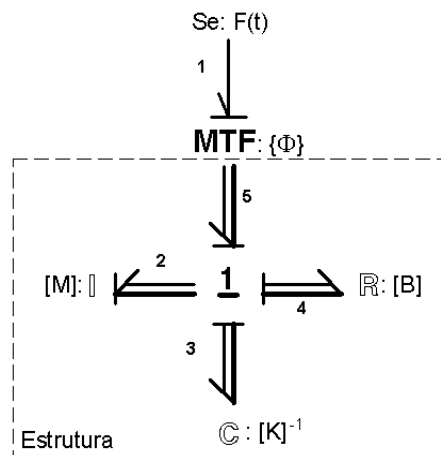


FIG. 6.1: Grafo de ligação do modelo de carga constante móvel sobre viga.

As equações constitutivas são:

$$\mathbf{f}_2 = [\mathbf{M}]^{-1} \mathbf{p}_2 \quad (6.2)$$

$$\mathbf{e}_3 = [\mathbf{K}] \mathbf{q}_3 \quad (6.3)$$

$$\mathbf{e}_4 = [\mathbf{R}] \mathbf{f}_4 \quad (6.4)$$

As equações oriundas da junção vetorial 1 são escrita a seguir:

$$\mathbf{f}_6 = \mathbf{f}_2 \quad (6.5)$$

$$\mathbf{f}_4 = \mathbf{f}_2 \quad (6.6)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_3 = \mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_2 \quad (6.7)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_6 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4 \quad (6.8)$$

A relação entre os esforços que passam pelo transformador é dada por:

$$\mathbf{e}_6 = \Phi \mathbf{e}_1 \quad (6.9)$$

Assim, substituindo as equações constitutivas dos elementos e do transformador nas equações oriundas da junção vetorial 1, obtém-se os estados do sistema:

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{e}_2 = \Phi \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4 \quad (6.10)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \Phi \mathbf{e}_1 - [K]\mathbf{q}_3 - [R]\mathbf{f}_4 \quad (6.11)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \Phi \mathbf{e}_1 - [K]\mathbf{q}_3 - [R]\mathbf{f}_2 \quad (6.12)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \Phi \mathbf{e}_1 - [K]\mathbf{q}_3 - [R][M]^{-1}\mathbf{p}_2 \quad (6.13)$$

e

$$\dot{\mathbf{q}}_3 = \mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_2 \quad (6.14)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_3 = [M]^{-1}\mathbf{p}_2$$

E, finalmente, na forma matricial do modelo de estado é dada pela EQ. 6.15.

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\mathbf{q}}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[B][M]^{-1} & -[K] \\ [M]^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\Phi\} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \{e_1\} \quad (6.15)$$

Onde a matriz [B] de amortecimento estrutural é dada pela EQ. 6.16:

$$[B] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (6.16)$$

---

## Início e Entrada de Dados

---

```
clear
clc
tic
global A Le L M v e1 m g e1 S0 n e1 E I dq2 dq3...
    dq4 dq5 dq6 dq7 dq8 dq10

% Constantes da estrutura
g=9.80665;           % [m/s2]  aceleração da gravidade
m=20;                % [kg]    massa do bloco móvel
rho=7801.0;          % [kg/m3] densidade da viga
S=1.25e-3;           % [m2]   área da viga
I=9.5104166667e-7;  % [m4]   momento de inércia de área da viga
E=5.07e11;           % [N/m2] modulo de Young do material da viga
a=0.1;               %                coef. do amortecimento estrutural
b=0.01;              %
L=1.0;               % [m]    comprimento da viga
Le=L/4;              % [m]    comprimento de cada elemento de viga
v=1;                 % [m/s]  velocidade do bloco
S0=0.25;             % [m]    espaço percorrido antes da viga
e1=m*g;              % [N]    forçamento do bloco na viga
```

---

## Construção das Matrizes do MEF

---

```
% Matriz de influencia de rigidez e matriz de massa dos elementos
Ke=(4*E*I/Le^3)*[12 6*Le -12 6*Le;6*Le 4*Le^2 -6*Le 2*Le^2;...
    -12 -6*Le 12 -6*Le;6*Le 2*Le^2 -6*Le 4*Le^2];
Me=((rho*S*Le)/4*420)*[156 22*Le 54 -13*Le;22*Le 4*Le^2...
    13*Le -3*Le^2;54 13*Le 156 -22*Le;-13*Le -3*Le^2...
    -22*Le 4*Le^2];

% Matrizes somadas
Kt=[Ke zeros(4,6);zeros(6,10)]+[zeros(2,10);...
    zeros(4,2) Ke zeros(4,4);zeros(4,10)]+[zeros(4,10);...
    zeros(4,4) Ke zeros(4,2);zeros(2,10)]+[zeros(6,10);zeros(4,6) Ke];
Mt=[Me zeros(4,6);zeros(6,10)]+[zeros(2,10);...
    zeros(4,2) Me zeros(4,4);zeros(4,10)]+[zeros(4,10);...
    zeros(4,4) Me zeros(4,2);zeros(2,10)]+[zeros(6,10);zeros(4,6) Me];

% Matriz de rigidez, de massa e de amortecimento global do sistema
K=[Kt(2:8,2:8) Kt(2:8,10);Kt(10,2:8) Kt(10,10)]/4;
M=4*[Mt(2:8,2:8) Mt(2:8,10);Mt(10,2:8) Mt(10,10)];
B=a*M+b*K;
```

```

% Resposta do sistema
A=[-B*(inv(M)) -K;inv(M) zeros(8,8)]; % matriz de estado

tspan=[0 10];           % Intervalo de Integração
ts=tspan(2);           % Tempo de simulação (SIMULINK)
y0=zeros(1,16);       % Condições iniciais

[t,y]=ode15s('TESE_01b',tspan,y0);
n=length(t);

function dy=TESE_01b(t,y)

% Vetor modulador da força aplicada pelo bloco na viga
% Posição do bloco em relação ao referencial do problema (x)
% e em relação ao elemento onde a carga esta atuando (xe)
    if v*t<S0|(v*t)-S0>L % exclusão dos percursos fora da viga
        xe=0;
        ne=0;
        off1=0;off2=0;off3=0;off4=0;
    elseif v*t<(Le+S0)&v*t>=S0
        ne=1;
        xe=v*t-((ne-1)*Le+S0);
        off1=1;off2=0;off3=0;off4=0;
    elseif v*t<(2*Le+S0)&v*t>=(Le+S0)
        ne=2;
        xe=v*t-((ne-1)*Le+S0);
        off1=0;off2=1;off3=0;off4=0;
    elseif v*t<(3*Le+S0)&v*t>=(2*Le+S0)
        ne=3;
        xe=v*t-((ne-1)*Le+S0);
        off1=0;off2=0;off3=1;off4=0;
    elseif v*t<(4*Le+S0)&v*t>=(3*Le+S0)
        ne=4;
        xe=v*t-((ne-1)*Le+S0);
        off1=0;off2=0;off3=0;off4=1;
    end

% Funções de interpolação do elemento
phi1=[1-3*((xe/Le)^2)+2*(xe/Le)^3]';
phi2=[-xe*(1-xe/Le)^2]';
phi3=[3*((xe/Le)^2)-2*(xe/Le)^3]';
phi4=[-xe*((xe/Le)^2)-(xe/Le)]';

Phi=[phi2*off1 phi3*off1+phi1*off2...
     phi4*off1+phi2*off2 phi3*off2+phi1*off3...
     phi4*off2+phi2*off3 phi3*off3+phi1*off4...
     phi4*off3+phi2*off4 phi4*off4]';

dy=A*y+[Phi;zeros(8,1)]*e1;

```



---

## Armazenamento das Variáveis de Interesse

---

```
% Momentos Lineares
p2=y(1:n,1);
p3=y(1:n,2);
p4=y(1:n,3);
p5=y(1:n,4);
p6=y(1:n,5);
p7=y(1:n,6);
p8=y(1:n,7);
p10=y(1:n,8);
% Deslocamentos
q2=y(1:n,9);
q3=y(1:n,10);
q4=y(1:n,11);
q5=y(1:n,12);
q6=y(1:n,13);
q7=y(1:n,14);
q8=y(1:n,15);
q10=y(1:n,16);
% Velocidades
dq=(inv(M))*y(1:n,1:8)';
dq2=dq(1,1:n);
dq3=dq(2,1:n);
dq4=dq(3,1:n);
dq5=dq(4,1:n);
dq6=dq(5,1:n);
dq7=dq(6,1:n);
dq8=dq(7,1:n);
dq10=dq(8,1:n);
```

---

## Plotagem dos Resultados

---

```
figure(1)
plot(t,q5,'k','linewidth',1.5)
title('Gráfico Y(t)');
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Deslocamento (m)')
grid on;
figure(2)
plot(t,dq5,'k','linewidth',1.5)
title('Gráfico Vy(t)');
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Velocidade(m/s)')
grid on;
figure(3)
plot(t,q5/yst,'k','linewidth',1.5)
title('Fator de Amplificação Dinâmica');
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Fator de Amplificação Dinâmica')
grid on;

time=toc
```

### 6.1.3 MODULADOR DA CARGA MÓVEL.

Toda vez que o módulo de um transformador ou de um campo modulado for variável haverá a necessidade de se construir um vetor (ou uma matriz) de módulo que reúna na forma de tabela de dados (*double array*) a variação do valor deste módulo com o tempo. Tal tabela é armazenada como um arquivo de dados matricial (extensão *.mat*), que deve possuir necessariamente na primeira coluna a variação temporal, sendo as variáveis envolvidas funções explícitas do tempo. No ato da simulação do sistema no *Simulink*® o valor do módulo é consultado pelo sistema a cada instante no arquivo *.mat* por meio da coluna de tempo, e interpolado em intervalos intermediários.

No caso da carga móvel, o módulo é calculado de acordo com a posição da carga sobre cada elemento, de acordo com a EQ. 6.17.

$$\bar{x}_e = vt - (n_e - 1)L_e \quad (6.17)$$

Onde  $v$  é a velocidade da carga sobre a viga e  $n_e$  é o número do elemento em que esta se encontra. Assim, para cada GDL do elemento tem-se uma função de interpolação que é inteiramente aproveitada na formulação do módulo como nas EQ. 6.18 a EQ. 6.21.

$$\Phi_1 = 1 - 3\left(\frac{x_e}{L_e}\right)^2 + 2\left(\frac{x_e}{L_e}\right)^3 \quad (6.18)$$

$$\Phi_2 = -x_e \left[ 1 - \left(\frac{x_e}{L_e}\right)^2 \right] \quad (6.19)$$

$$\Phi_3 = 3\left(\frac{x_e}{L_e}\right)^2 - 2\left(\frac{x_e}{L_e}\right)^3 \quad (6.20)$$

$$\Phi_4 = -x_e \left[ 1 - \left(\frac{x_e}{L_e}\right)^2 \right] - \left(\frac{x_e}{L_e}\right) \quad (6.21)$$

Por efeito da superposição, o vetor  $\Phi$  resultante tem dimensão 8 e é calculado para uma viga discretizada em quatro elementos de viga Euler-Bernoulli, sendo a velocidade  $v$  constante. Em casos em que se considere velocidade da carga não constante e dependente de uma variável qualquer do sistema ou externa a este, a utilização de arquivos *.mat* no *Simulink*® fica limitada. Neste caso é preciso converter o arquivo de construção do modulador em

uma *S-Function*, o que permite descrever um bloco em função de equações matemáticas codificadas previamente no *Matlab*®, que permita entradas ( $X, U, t$ ) do sistema e forneça saídas para este (HANSELMAN e LITTLEFIELD, 2004).

→ Arquivo Matlab®: *PHI.m*

---

### Início e Entrada de Dados

---

```
clear
clc
v=1;           % [m/s] velocidade de deslocamento sobre a viga
t=[0:0.1:10]; %      vetor de tempo do módulo
n=length(t);
L=1;          % [m] comprimento da viga
Le=L/4;      % [m] comprimento do elemento
S0=0.25;     % [m] espaço inicial da carga móvel
```

---

### Construção do Modulador $\Phi$

---

```
for i=1:n;
% Posição do bloco em relação ao referencial do problema (x)
% e em relação ao elemento onde a carga esta atuando (xe)
if v*t(i)<S0|abs((v*t(i))-S0)>L % exclusão dos percursos fora da viga
    xe(i)=0;
    ne(i)=0;
    off1(i)=0;off2(i)=0;off3(i)=0;off4(i)=0;
elseif v*t(i)<(Le+S0)&v*t(i)>=S0
    ne(i)=1;
    xe(i)=v*t(i)-((ne(i)-1)*Le+S0);
    off1(i)=1;off2(i)=0;off3(i)=0;off4(i)=0;
elseif v*t(i)<(2*Le+S0)&v*t(i)>=(Le+S0)
    ne(i)=2;
    xe(i)=v*t(i)-((ne(i)-1)*Le+S0);
    off1(i)=0;off2(i)=1;off3(i)=0;off4(i)=0;
elseif v*t(i)<(3*Le+S0)&v*t(i)>=(2*Le+S0)
    ne(i)=3;
    xe(i)=v*t(i)-((ne(i)-1)*Le+S0);
    off1(i)=0;off2(i)=0;off3(i)=1;off4(i)=0;
elseif v*t(i)<(4*Le+S0)&v*t(i)>=(3*Le+S0)
    ne(i)=4;
    xe(i)=v*t(i)-((ne(i)-1)*Le+S0);
    off1(i)=0;off2(i)=0;off3(i)=0;off4(i)=1;
end

% Funções de interpolação do elemento
phi1(i)=[1-3*((xe(i)/Le)^2)+2*(xe(i)/Le)^3]';
phi2(i)=[-xe(i)*(1-xe(i)/Le)^2]';
phi3(i)=[3*((xe(i)/Le)^2)-2*(xe(i)/Le)^3]';
phi4(i)=[-xe(i)*(((xe(i)/Le)^2)-(xe(i)/Le))]';
```

```

% Vetor modulador da força aplicada pelo bloco na viga
Phi(:,i)=[phi2(i)*off1(i) phi3(i)*off1(i)+phi1(i)*off2(i)...
    phi4(i)*off1(i)+phi2(i)*off2(i) phi3(i)*off2(i)+phi1(i)*off3(i)...
    phi4(i)*off2(i)+phi2(i)*off3(i) phi3(i)*off3(i)+phi1(i)*off4(i)...
    phi4(i)*off3(i)+phi2(i)*off4(i) phi4(i)*off4(i)]';
i=i+1;
end

```

---

#### Armazenamento e Salvamento dos Dados

---

```

%PHI=[t;Phi]; primeira coluna é do tempo.Para S0d=1m e S0t=1,25m
PHI=[t;zeros(8,10) Phi(:,4:13) zeros(8,81)];
PHID=PHI;
PHIT=[t;zeros(8,13) Phi(:,4:13) zeros(8,78)];
save PHI PHI; % salva o módulo da carga móvel no arquivo PHI.mat
save PHID PHID; % salva o módulo da roda diant. no arquivo PHID.mat
save PHIT PHIT; % salva o módulo da roda tras. no arquivo PHIT.mat

```

### 6.1.4 CHASSI FLEXÍVEL COM SUBSISTEMAS.

O modelo de veículo tridimensional com interação entre subsistemas apresentado no Capítulo 3 é um ótimo exemplo da aplicabilidade do procedimento modular em sistemas veiculares complexos com o emprego da notação multiligação dos grafos. O grafo multiligação global do sistema é mostrado na FIG. 6.2, com indicação das dimensões dos sinais.

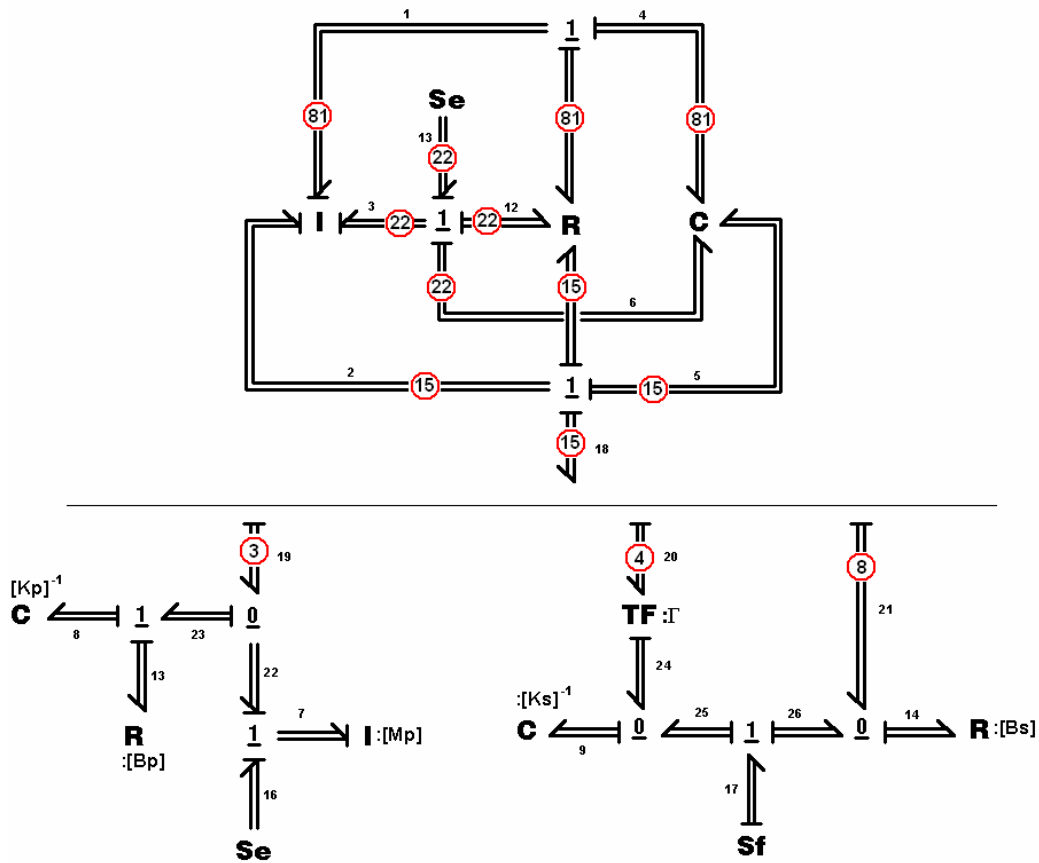


FIG. 6.2 Grafo multiligação do veículo com chassi flexível, com a numeração das ligações e indicação de dimensões de sinais.

O vetor de estados do sistema, apresentado na EQ. 6.22, está relacionado com os momentos lineares e deslocamentos relativos aos subsistemas e chassi conforme se segue:

$$X = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ p_7 \ q_8 \ q_9]_{1 \times 246}^T \quad (6.22)$$

- $\mathbf{p}_1$  (81 X 1) – quantidade de movimento dos graus de liberdade internos do chassi;
- $\mathbf{p}_2$  (15 X 1) – quantidade de movimento dos graus de liberdade do chassi que interagem com subsistemas externos;
- $\mathbf{p}_3$  (22 X 1) – quantidade de movimento dos graus de liberdade do chassi que recebem esforço;
- $\mathbf{q}_4$  (81 X 1) – deslocamento (deformação) dos graus de liberdade internos do chassi;
- $\mathbf{q}_5$  (15 X 1) – deslocamento (deformação) dos graus de liberdade do chassi que interagem com subsistemas externos;
- $\mathbf{q}_6$  (22 X 1) – deslocamento (deformação) dos graus de liberdade que recebem esforço;
- $\mathbf{p}_7$  (3 X 1) – quantidade de movimento dos subsistemas massa-mola-amortecidos;
- $\mathbf{q}_8$  (3 X 1) – deformação dos bancos e do calço do motor;
- $\mathbf{q}_9$  (4 X 1) – deformação das molas das suspensões.
- $\mathbf{p}_1$  (81 X 1) – quantidade de movimento dos graus de liberdade internos do chassi
- $\mathbf{p}_1$  (81 X 1) – quantidade de movimento dos graus de liberdade internos do chassi

No acoplamento entre os subsistemas, a composição de vetores dada pela linha horizontal na FIG. 6.2 representa as relações expressadas nas EQ. 6.23 e EQ. 6.24.

$$\mathbf{e}_{18} = [\mathbf{e}_{19} \quad \mathbf{e}_{20} \quad \mathbf{e}_{21}]_{1 \times 15}^T \quad (6.23)$$

$$\mathbf{f}_{18} = [\mathbf{f}_{19} \quad \mathbf{f}_{20} \quad \mathbf{f}_{21}]_{1 \times 15}^T \quad (6.24)$$

O significado de cada um desses vetores que compõem a ligação 18 da estrutura é:

- $\mathbf{e}_{19}$  (3 X 1) – esforço no acoplamento entre os passageiros e o motor com o chassi;
- $\mathbf{e}_{20}$  (8 X 1) – esforço no acoplamento entre os feixes de molas e o chassi;
- $\mathbf{e}_{21}$  (4 X 1) – esforço no acoplamento entre os amortecedores das suspensões e o chassi;
- $\mathbf{f}_{19}$  (3 X 1) – velocidade no acoplamento entre os passageiros e o motor com o chassi;
- $\mathbf{f}_{20}$  (8 X 1) – velocidade no acoplamento entre os feixes de molas e o chassi;
- $\mathbf{f}_{21}$  (4 X 1) – velocidade no acoplamento entre os amortecedores das suspensões e o chassi.

A seguir é mostrado o código computacional em *Matlab*® para a simulação deste modelo. A construção das equações de estado do sistema não é feita aqui, pois estas não são necessárias no contexto do procedimento modular, conforme executado no Capítulo 3 e em trabalho anterior (FERREIRA e Da SILVA, 2005a). Este código, entretanto, é útil no sentido de facilitar o entendimento das fases preliminares da modelagem do sistema considerado em diagrama de blocos que são, além da entrada dos dados, a montagem das matrizes do MEF e o

seu particionamento para o uso como campos da técnica dos grafos. O programa assim construído é simples e se torna reutilizável para outros casos e tipos de estruturas.

→ Arquivo Matlab®: *TESE\_COBEM\_Final.m*

---

### Início e Entrada de Dados

---

```

clear
clc
tic

% Constantes do modelo
g=9.80665;           % [m/s2] (gravidade)

% Subistemas
kp=19620;           % [N/m]   rigidez do acopl. de cada assento
km=1226250;        % [N/m]   rigidez do acoplamento do motor
cp=1400;           % [Ns/m]  amortecimento do acopl. dos assento
cm=24761;          % [Ns/m]  amortecimento do acopl. do motor
mp=100;            % [kg]    massa de cada assento e passageiro
mm=500;            % [kg]    massa do motor
Kp=diag([kp kp km]); %          rigidez nos acopl. dos subistemas
Bp=diag([cp cp cm]); %          amort. nos acopl. dos subsist.
Sep=g*[mp mp mm]'; %          peso dos subistemas
Mp=diag([mp mp mm]); %          massa dos subistemas
Kpi=inv(Kp);

% Suspensões
%obs.: 1=frontal esquerda;2=FD;3=TE;4=TD
k1=1932560;        % [N/m]   rigidez das molas
k2=k1;
k3=313595;
k4=k3;
b1=12872;          % [Ns/m]  Coef. amortecimento das suspensões
b2=b1;
b3=19828;
b4=b3;
L=1.05*[ones(2,4) zeros(2,4);zeros(2,4) ones(2,4)]; % mod. transf.
Ks=diag([k1 k2 k3 k4]); % [N/m]   rigidez das suspensões
Bs=diag([b1 b2 b3 b4]); % [Ns/m]  amortecimento das suspensões

% Constantes da estrutura
rho=7801.0;        % [kg/m3] densidade da viga
S=3.44e-3;         % [m2]   área da viga
I=3.5e-5;          % [m4]   momento de inércia de área da viga
E=3.07e11;         % [N/m2] modulo de Young do material da viga
G=5.00e10;         % [N/m2] modulo de cisalhamento
J=7.338e-8;        % [m4]   momento polar de inércia
Le=1.2;            % [m]     comprimento do elemento
n=22;              %         no. de nós da longarina
a=0.65;            %         coef. de amortecimento estrutural

```

```

b=0.065; %
% mr=(massa bruta-(massa chassis + suspensões))/n
mr=(7700-(950+600+940))/n; % [kg] massa suspensa dividida
% Pr=(massa bruta - massa suspensão)/n
Pr=g*(7700-600-940)/n; % [N] peso do chassis e da massa suspensa
Se=Pr*(ones(n,1)); % pesos aplicados nos nós da longarina

```

---

### Construção das Matrizes do MEF

---

```

%matriz de compatibilidade de massas
N=diag([0 mr 0 0 mr 0]);
%% Matriz de influencia de rigidez e matriz de massa dos elementos
Ke=[G*J/Le 0 0 -G*J/Le 0 0
    0 12*E*I/Le^3 6*E*I/Le^2 0 -12*E*I/Le^3 6*E*I/Le^2
    0 6*E*I/Le^2 4*E*I/Le 0 -6*E*I/Le^2 2*E*I/Le
    -G*J/Le 0 0 G*J/Le 0 0
    0 -12*E*I/Le^3 -6*E*I/Le^2 0 12*E*I/Le^3 -6*E*I/Le^2
    0 6*E*I/Le^2 2*E*I/Le 0 -6*E*I/Le^2 4*E*I/Le];
Me=((rho*S*Le)/420)*[140*J/S 0 0 70*J/S 0 0
    0 156 22*Le 0 54 -13*Le
    0 22*Le 4*Le^2 0 13*Le -3*Le^2
    70*J/S 0 0 140*J/S 0 0
    0 54 13*Le 0 156 -22*Le
    0 -13*Le -3*Le^2 0 -22*Le 4*Le^2]+N;

K=zeros(81,81);
M=zeros(81,81);

% Ábaco de correlação entre os GDL do elemento e do sistema global
C=[1 2 3 4 5 6
   4 5 6 7 8 9
   7 8 9 10 11 12
   10 11 12 13 14 15
   13 14 15 16 17 18
   16 17 18 19 20 21
   19 20 21 22 23 24
   22 23 24 25 26 27
   25 26 27 28 29 30
   28 29 30 31 32 33
   34 35 36 37 38 39
   37 38 39 40 41 42
   40 41 42 43 44 45
   43 44 45 46 47 48
   46 47 48 49 50 51
   49 50 51 52 53 54
   52 53 54 55 56 57
   55 56 57 58 59 60
   58 59 60 61 62 63
   61 62 63 64 65 66
   3 2 1 67 68 69
   67 68 69 36 35 34
   9 8 7 70 71 72
   70 71 72 42 41 40
   15 14 13 73 74 75

```



```

73 74 75 48 47 46
21 20 19 76 77 78
76 77 78 54 53 52
27 26 25 79 80 81
79 8 81 60 59 58];

% Matriz de rigidez global
for i=1:30
    for j=1:6
        for k=1:6
            K(C(i,k),C(i,j))=K(C(i,k),C(i,j))+Ke(C(1,k),C(1,j));
        end
    end
end
% Matriz de massa global
for i=1:30
    for j=1:6
        for k=1:6
            M(C(i,k),C(i,j))=M(C(i,k),C(i,j))+Me(C(1,k),C(1,j));
        end
    end
end
Mi=inv(M);% inversa da matriz de massa
           % Obs.: evitar inversões a cada iteração no Simulink
% Matriz de amortecimento estrutural global
B=a*M+b*K;

```

---

### Particionamento das Matrizes do MEF em campos Multiportas para o *Simulink*

---

```

% Matrizes parciais
Vs1=[5 38 71]; % GDLs que interagem com subsistemas
Vs2=[38 44 5 11 53 59 20 26]; % GDLs que interagem com as molas
Vs3=[41 8 56 23]; % GDLs que int. com os amortecedores
Ve=[1:3:64]; % GDLs que recebem esforços prescritos
% Matrizes parciais de MASSA (INVERSAS)
% Aquelas que separam da matriz M os GDL que interagem com
% subsistemas, molas e amortecedores, e recebem esforços
M11=Mi;
M12=[Mi(:,Vs1) Mi(:,Vs2) Mi(:,Vs3)];
M13=Mi(:,Ve);
M21=[Mi(Vs1,:);Mi(Vs2,:);Mi(Vs3,:)];
M22=Mi([Vs1 Vs2 Vs3],[Vs1 Vs2 Vs3]);
M23=[Mi(Vs1,Ve);Mi(Vs2,Ve);Mi(Vs3,Ve)];
M31=Mi(Ve,:);
M32=[Mi(Ve,Vs1) Mi(Ve,Vs2) Mi(Ve,Vs3)];
M33= Mi(Ve,Ve);
% Matrizes particionadas do campos multiportas (dim. 118x118)
% matriz de MASSA particionada (inversa)
MPt=[M11 M12 M13
      M21 M22 M23
      M31 M32 M33];

% Matrizes parciais de RIGIDEZ
% Aquelas que separam da matriz K os GDL que interagem com

```

```

% sistemas, molas e amortecedores, e recebem esforços
K11=K;
K12=[K(:,Vs1) K(:,Vs2) K(:,Vs3)];
K13=K(:,Ve);
K21=[K(Vs1,:);K(Vs2,:);K(Vs3,:)];
K22=K([Vs1 Vs2 Vs3],[Vs1 Vs2 Vs3]);
K23=[K(Vs1,Ve);K(Vs2,Ve);K(Vs3,Ve)];
K31=K(Ve,:);
K32=[K(Ve,Vs1) K(Ve,Vs2) K(Ve,Vs3)];
K33= K(Ve,Ve);
% Matrizes particionadas do campos multiportas (dim. 118x118)
% matriz de RIGIDEZ particionada
KPt=[K11 K12 K13
      K21 K22 K23
      K31 K32 K33];

% Matrizes parciais de AMORTECIMENTO
% Aquelas que separam da matriz B os GDL que interagem com
% sistemas, molas e amortecedores, e recebem esforços
B11=B;
B12=[B(:,Vs1) B(:,Vs2) B(:,Vs3)];
B13=B(:,Ve);
B21=[B(Vs1,:);B(Vs2,:);B(Vs3,:)];
B22=B([Vs1 Vs2 Vs3],[Vs1 Vs2 Vs3]);
B23=[B(Vs1,Ve);B(Vs2,Ve);B(Vs3,Ve)];
B31=B(Ve,:);
B32=[B(Ve,Vs1) B(Ve,Vs2) B(Ve,Vs3)];
B33= B(Ve,Ve);
% Matrizes particionadas do campos multiportas (dim. 118x118)
% matriz de AMORTECIMENTO particionada
BPt=[B11 B12 B13
      B21 B22 B23
      B31 B32 B33];

time=toc

```

## 6.2 APÊNDICE 2: OBSERVAÇÕES PARA HIERARQUIZAÇÃO DE MODELOS UTILIZANDO RECURSOS DO *SIMULINK*<sup>®</sup>

Uma das principais características da técnica dos grafos de ligação é a divisão dos sistemas em termos de sua física, o que permite extrair as características essenciais dos sistemas de engenharia independentemente do domínio físico de aplicação. Aliado a isto está a utilização de um número reduzido de elementos, que teoricamente possibilita expressar todos os sistemas de engenharia. O emprego de apenas nove elementos básicos – *I*, *C*, *R*, *Se*, *Sf*, *TF*, *GY*, *junção 0* e *junção 1* – proporciona uma solução ao problema da diversidade de elementos que poderia ser observado ao se procurar descrever os sistemas por meio de equações físicas.

A utilização deste número reduzido de elementos básicos da técnica, porém, gera uma gama imensa de possibilidades de montagem, sendo normalmente necessários mais de um elemento para se compor um subsistema relativamente simples. Este fato trás alguns inconvenientes para a modelagem via fluxo de sinais em diagrama de blocos como a necessidade de se construir muitos blocos, e conseqüentemente muitas linhas de sinais para um sistema, o fato de o diagrama não se assemelhar em nada com o sistema que representa e ineficiência no tratamento de problemas com parâmetros distribuídos.

Em alguns desses casos pode ser muito proveitosa a utilização da notação multiligação dos grafos, especialmente no tratamento de problemas com parâmetros distribuídos, como em dinâmica de estruturas. Da mesma forma, sistemas mecânicos extensos também podem ser descritos pela notação vetorial dos grafos de ligação, o que pode conferir grande condensação à representação dos sistemas por diagrama de blocos. Por esses aspectos, é recomendado no procedimento modular o emprego preferencial dos grafos multiligados na descrição dos sistemas quando isso trazer clara melhora à representação do sistema.

Observa-se, no entanto, que cuidados especiais devem ser tomados para que não se considere elementos oriundos de subsistemas de natureza distinta na formulação de um campo multiporta, sob pena de acabar com a modularidade dos blocos ou comprometer o significado físico do subsistema construído. Estes são dois aspectos que se deve procurar manter na descrição dos sistemas.

Como destacado por LEBRUN e RICHARDS (1997), considerando um sistema de engenharia e pensando em termos tecnológicos, é possível se chegar a uma divisão natural deste em elementos tecnológicos os menores possíveis, de acordo com o nível de detalhamento que se espera de um modelo. Cada elemento tecnológico básico pode ser representado por

um bloco por meio do grupamento de elementos básico da técnica dos grafos como na FIG. 6.3.

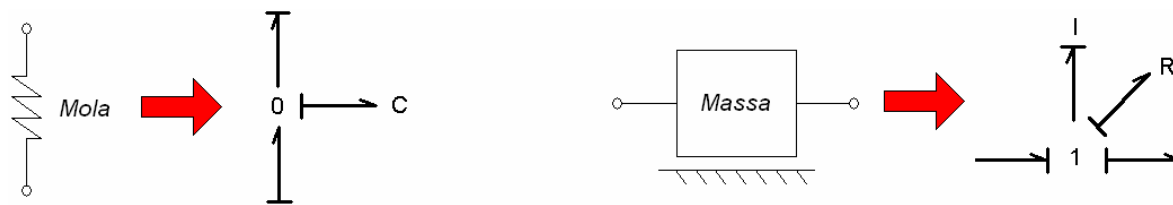


FIG. 6.3 Comparação entre elementos tecnológicos e grafos.

Pela comparação dos elementos tecnológicos básicos da FIG. 6.3 com os seus equivalentes grafos de ligações nota-se que cada um é formado por mais de um elemento da técnica dos grafos. É possível se imaginar também a utilização de elementos tecnológicos básicos para compor subsistemas tecnológicos cada vez maiores e complexos. A seguinte hierarquia na formulação de um modelo de sistemas de engenharia é sugerida:

- Sistemas de Engenharia
- Subsistemas tecnológicos
- Elementos tecnológicos
- Elementos físicos (grafo de ligação)
- Física do sistema
- Formulação matemática
- Código computacional

Vê-se que um sistema de Engenharia está mais próximo dos elementos tecnológicos do que dos elementos do grafo de ligação. Isso faz com que a representação de um sistema em termo de seus elementos tecnológicos seja mais compacta, inteligível e, portanto fácil de se analisar ou se alterar. Alguns pacotes computacionais, como o *AMESim*, usam esta divisão em elementos tecnológicos modulares, sendo as ligações entre elementos descritas neste caso diretamente pelo fluxo de potência (AMESIM, 2000b).

A maioria das linguagens de programação utilizadas em Engenharia incluem a capacidade de se utilizar *subprogramas*, que promovem a abstração dos detalhes e a reutilização do código. No *Simulink*® isto é feito por meio dos *subsistemas*. A medida em que os modelos crescem e ficam complexos, tende a ficar difícil de se entender e executar correções. Subsistemas resolvem este problema fazendo com que um grande e complexo modelo seja convenientemente dividido em grupos hierárquicos de modelos menores. Como um exemplo disso

tem-se o modelo da FIG. 6.4 que corresponde exatamente ao modelo de veículo plano da FIG. 4.14 para o estudo da rolagem.

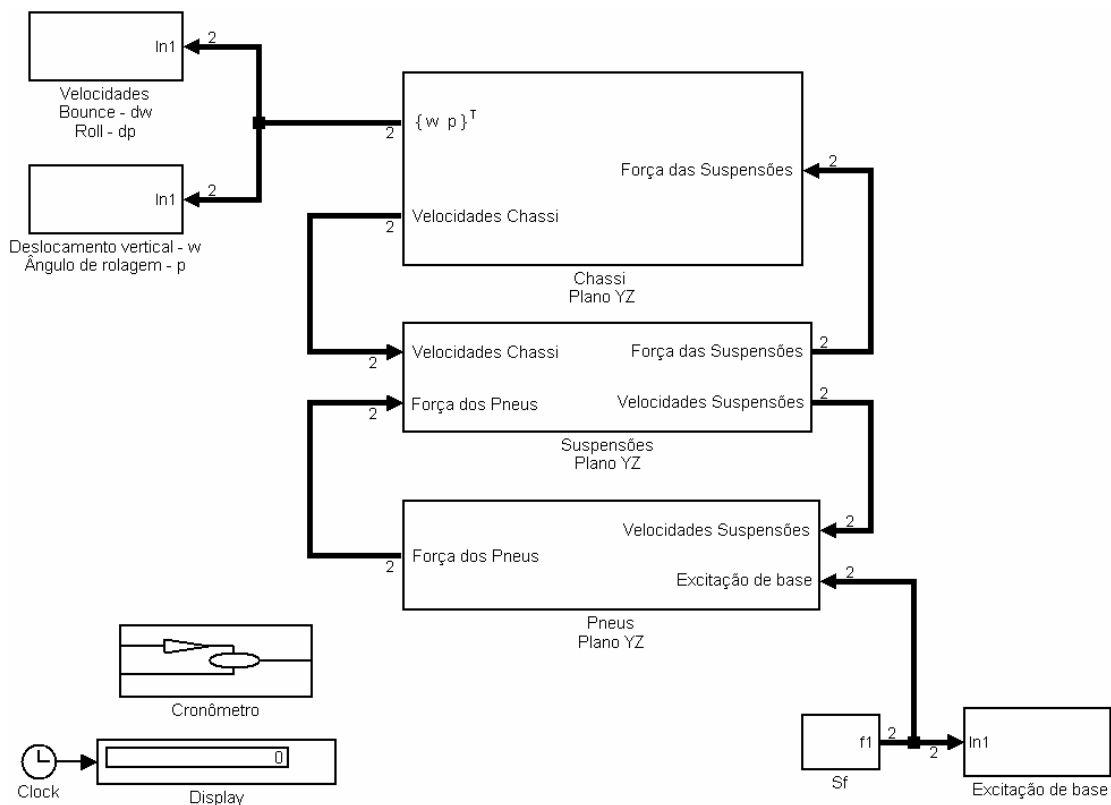


FIG. 6.4 Diagrama de blocos da dinâmica de um veículo plano.

Examinando-se o modelo tal como é apresentado no Capítulo 4 observa-se que a quantidade de blocos então utilizada (doze blocos de elementos de grafo) não favorece tanto a visualização do sistema físico representado como na versão da FIG. 6.4, com quatro blocos de subsistemas tecnológicos, sem contar a facilidade na construção, manutenção e alteração do modelo, sendo necessário apenas ligar os terminais dos blocos como indicado. Nesta versão, a estrutura conceitual é clara, e os detalhes do chassi, das suspensões e dos pneus estão escondidos nos subsistemas. Esta estrutura hierárquica é um exemplo da abstração do modelo. Na FIG. 6.5 são mostrados os elementos do subsistema “chassi”.

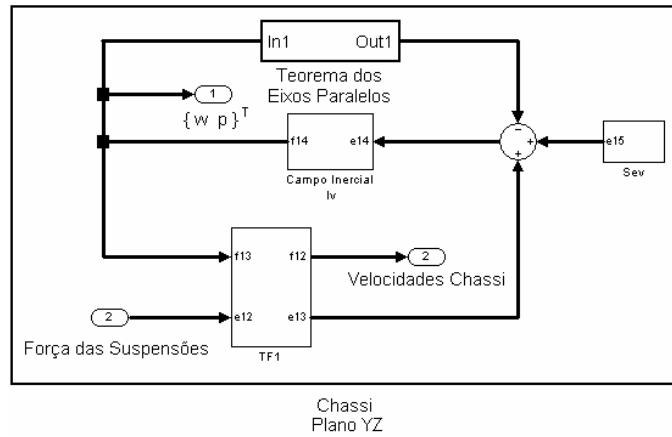


FIG. 6.5 Bloco do subsistema chassi para um modelo de veículo plano.

O conceito de abstração de um modelo pode ser estendido no *Simulink*® com a utilização de máscaras aos blocos de subsistemas, que permite ao usuário tratar um subsistema como um bloco simples. A FIG. 6.6 mostra o modelo do veículo plano com a aplicação de máscaras aos blocos.

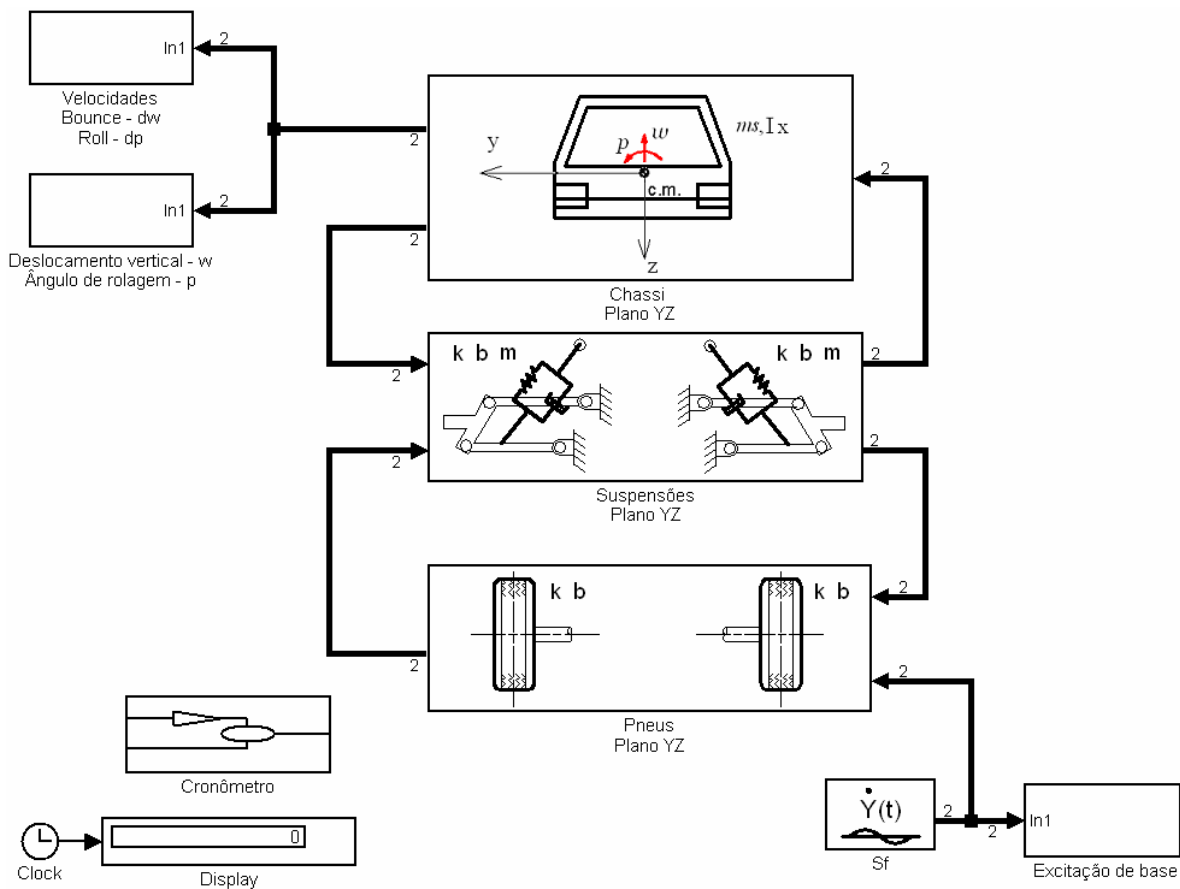


FIG. 6.6 Diagrama de blocos do veículo plano com máscaras.

Cada bloco com máscara deve ter ícone próprio e uma caixa de diálogo com parâmetros de configuração para entrada de dados assim os blocos das bibliotecas do *Simulink*®. Os parâmetros de configuração devem ser usados diretamente para inicializar os blocos pertencentes ao subsistema, ou então utilizados para calcular dados para inicializar os blocos. Na FIG. 6.7 são mostrados as caixas de diálogos dos bloco do chassi e das suspensões, onde o usuário pode entrar com todos os parâmetros do subsistema.

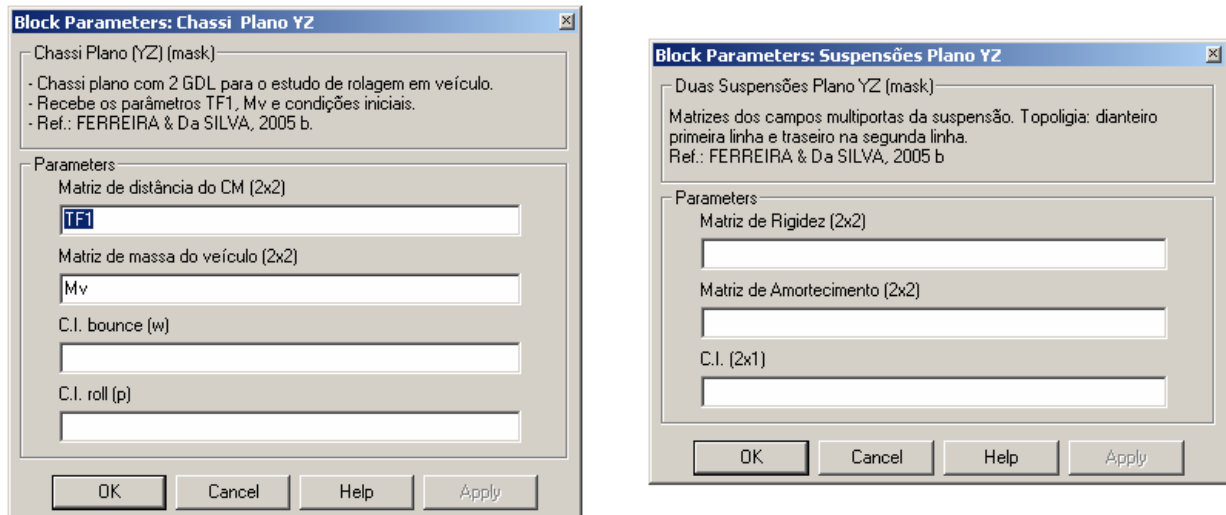


FIG. 6.7 Caixas de diálogo dos blocos do chassi e das suspensões com máscara.

Subsistemas podem também ser visto como componentes reutilizáveis de modelos futuros, dada a modularidade do procedimento. Após ser montado e testado em um modelo, um subsistema pode integrar uma biblioteca de blocos, o que reduz bastante o tempo de modelagem dos sistemas.

### 6.3 APÊNDICE 3: CONSIDERAÇÕES SOBRE SIMULAÇÕES DE SISTEMAS

Para a simulação de um modelo de sistema em diagrama de blocos, assim como em equações, a sua descrição consiste de *ODE* de primeira ordem, possivelmente estendida com equações de restrições algébricas (*EDA*) sendo, portanto, simulado com métodos de integração numérica padrões. Entretanto, como a integração numérica é uma aproximação do processo real de integração, é necessário se checar o modelo em aspectos significativos para a simulação. Como resultado, um método de integração numérica apropriado pode ser escolhido, aquele que minimiza o trabalho computacional e que mantém o resultado dentro de uma especificada margem de erro.

Na construção do grafo de ligação do sistema é feita a decisão de mudar ou não sua configuração para se obter um modelo explícito ou para se compatibilizar algum conflito de causalidade entre subsistemas. É interessante se conhecer as conseqüências da simulação dos aspectos característicos do modelo. Quatro aspectos são relevantes na escolha do método de integração numérica de um modelo: a presença de equações implícitas, rigidez numérica, parte oscilatória e presença de descontinuidades.

A resolução de um sistema com dependências por meio da construção e simulação do modelo implícito de equações de estado (*EDA*) só pode ser feita com métodos de integração implícitos. Modelos explícitos (*ODE*) podem ser simulados tanto com métodos de integração explícitos e implícitos. Muitas vezes, métodos de integração implícitos requerem mais tempo computacional do que os explícitos. Na simulação em fluxo de sinais, no entanto, mesmo sistemas com dependências entre variáveis são melhores simulados por algoritmos explícitos, isto devido ao fato de que as dependências algébricas são automaticamente contornadas por meio de atrasos de sinais.

Certos tipos de equações diferenciais não apresentam soluções numéricas pelas técnicas descritas acima. Problemas podem ocorrer se a solução do sistema de equações contiver elementos com grandes diferenças em “escala de tempo”, isto é, quando um termo decai muito mais rapidamente que os outros da equação. Tais sistemas são ditos como sendo “numericamente rígido” e sua solução não é confiável quando tratados por métodos tradicionais.

A rigidez numérica de um sistema, de acordo com LAMBERT (1980), é definida, considerando o sistema de *ODE* da forma da EQ. 6.25:

$$\dot{X} = AX + \bar{B}U \quad (6.25)$$



se atender ao exposto nas EQ. 6.26 e EQ. 6.27:

$$\Re(\lambda_j) < 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (6.26)$$

$$(\text{máx. } |\Re(\lambda_j)| / \text{mín. } |\Re(\lambda_j)|) = s \gg 1 \quad (6.27)$$

onde  $\lambda_j$  são os autovalores da matriz  $m \times m$   $A$ ,  $\Re(\lambda_j)$  é a parte real e  $s$  é chamado de “taxa de rigidez”.

Um sistema não-linear da forma  $\dot{X} = f(t, X)$  é dito como sendo numericamente rígido em um intervalo  $I$  de  $t$ , se para todo  $t \in I$  os autovalores  $\lambda_j$  da jacobiana  $\partial f / \partial X$  satisfizer o exposto nas EQ. 6.26 e EQ. 6.27 acima.

A constante  $s$  do sistema é conhecida como taxa de rigidez, e é uma medida da distância entre as partes reais dos autovalores  $\lambda_j$ . Modelos rígidos (grande valor de  $s$ ) precisam de algoritmos de integração rígidos. O passo é determinado por critérios de estabilidade ao invés de acuracidade (os autovalores são usados para a determinação do tamanho do passo). Os autovalores do sistema linear da EQ. 6.25 podem se calculados pelo polinômio característico do sistema, dado pelo denominador da função de transferência do sistema. A TAB. 6.1 mostra os autovalores de alguns dos modelos de quebra de ZCP classe I como apresentados na FIG. 4.3.

TAB. 6.1 Autovalores dos modelos de quebra de ZCP classe I.

Matlab	Elemento Rígido	Elemento Parasítico
- 0,857 + 2,231i	- 0,857 + 2,231i	- 0,857 + 2,231i
- 0,857 - 2,231i	- 0,857 - 2,231i	- 0,857 - 2,231i
-	- 0,342 + 374,17i	- 70.34 + 367.49i
-	- 0,342 - 374,17i	- 70.34 - 367.49i

Nesta tabela constam os autovalores dos modelos explícitos do *Matlab*®, do método de Elemento Rígido e do método de Elemento Parasítico. Como se pode reparar nos autovalores para esses métodos, apenas o modelo de Elemento Parasítico pode ser considerado rígido, pelo exposto nas EQ. 6.26 e EQ. 6.27. A opção por um algoritmo rígido para a simula-

ção deste modelo é validada pelas TAB. 4.2 e TAB. 4.3, que mostram serem os métodos rígidos empregados (*ODE15s* e *ODE23tb*) os mais eficientes.

Há, entretanto, casos em que um sistema apresenta uma parte com comportamento altamente oscilatório comparado a outros de seus elementos sem ser rígido como definido nas EQ. 6.26 e EQ. 6.27. Este é o caso, por exemplo, do modelo de Elemento Rígido, que apresenta grande diferença entre os autovalores no eixo imaginário, como se pode observar na TAB. 6.1. Quando um modelo não tem amortecimento, este não deve ser simulado com métodos rígidos como o Método de Gear. Tais métodos apresentam péssimo desempenho para autovalores no eixo imaginário do plano complexo dos autovalores. As TAB. 4.2 e TAB. 4.3 mostram que este modelo podem ser mais bem resolvido por algoritmo *nom-stiff*, como o Runge-Kutta. O comportamento altamente oscilatório do sistema, no entanto, requer o emprego de passos de integração muito pequenos para garantir a acuracidade imposta pela tolerância do problema.

Por fim, considera-se a escolha do algoritmo de integração mais indicado para sistemas com presença de descontinuidades. Métodos de integração formulados para tolerâncias severas tratam melhor as descontinuidades. Caso não seja possível utilizá-los, métodos com passos variáveis podem ser usados. Os métodos multi-passos se tornam menos acurados, na medida em que eles necessitam informações do passado, que não são aplicáveis após uma descontinuidade. Em modelos rígidos, como o de Elemento Parasítico, observa-se que o algoritmo *ODE23tb* é mais eficiente que o *ODE15s* na presença e descontinuidade na simulação, como mostrado na TAB. 4.3. isto é devido ao fato de o algoritmo *ODE15s* possuir ordem variável. A ordem do método confere sua estabilidade de maneira que quanto mais baixa a ordem o método, mais estável é a simulação, porém mais tempo computacional é requerido. O *ODE15s* reduz sua ordem perto da descontinuidade, mas demora alguns passos para retomar a ordem elevada novamente após isto. Já o *ODE23tb*, com um primeiro estágio dado pela regra dos trapézios e um segundo passo que é uma *BDF* possuindo uma ordem fixa mediana que é mais eficiente após uma descontinuidade. Esta ordem mediana, no entanto, faz com que este algoritmo não seja tão eficiente quanto o *ODE15s* sem a presença da descontinuidade.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AMESIM. Imagine S.A., **Keohps – Representante Imagine no Brasil [on line]**. 2000a. Disponível:[http://www.keohps.com/Imagine/artigos/technical\\_overview.pdf](http://www.keohps.com/Imagine/artigos/technical_overview.pdf) [capturado em 2 abr. 2005].
- AMESIM. Imagine S.A., **Keohps – Representante Imagine no Brasil [on line]**. 2000b. Disponível:[http://www.keohps.com/Imagine/applications/AmesimBlock\\_diagram.pdf](http://www.keohps.com/Imagine/applications/AmesimBlock_diagram.pdf) [capturado em 8 jul. 2005].
- ANDRADE, B. L. B., “**Análise das Interações Dinâmicas entre Sistemas Mecânicos Lineares Contínuos e Discretos**”, Dissertação de Mestrado, IME, Rio de Janeiro, **1995**.
- BARRETO, J., LEFÈVRE, J., “**R-fields in the Solution of Implicit Equations**”, Journal of the Franklin Institute, Vol. 319, No. 1/2, pp. 227-236, **1985**.
- BESSA, W. M., “**Abordagem do Problema de Cargas Móveis Através de uma Técnica Multidisciplinar de Modelagem**”, Dissertação de Mestrado, IME, Rio de Janeiro, **2000**.
- BIGGS, J. M., “**Introduction to Structural Dynamics**”, McGraw-Hill, New York, **1964**.
- BORUTZKY, W., “**Supporting the Generation of a State-space Model by Adding Tearing Information to the bond Graph**”, Simulation Practice and Theory, Vol. 7, No. 5/6, pp. 419-438, **1999**.
- BORUTZKY, W., CELLIER, F., “**Tearing in Bond Graphs with Dependent Storage Elements**”, Proceedings CESA 96 - Symposium on Modelling, Analysis Simulation, Lille, France, Vol. 2, No. 1, pp. 1113-1119, **1996**.
- BREEDVELD, P. C., “**Decomposition of Multiport Elements in a Revised Multibond graph Notation**”, Journal of the Franklin Institute, Vol. 318, No. 4, pp. 253 – 273, **1984**.

- BREEDVELD, P. C., **“Multibond Graph Elements in Physical Systems Theory”**, Journal of the Franklin Institute, Vol. 319, No. 1/2, pp. 1 – 36, **1985a**.
- BREEDVELD, P. C., **“Bond Graph: Physical Systems Modeling”**, Encyclopedia of Life Support Systems, versão preliminar. Trabalho apresentado na Geoplex Summer School, Bertinoro, Itália, **2003**.
- BROENINK, J. F., **“Introduction to Physical Systems Modelling with Bond Graphs”**, University of Twente, Enschede, Netherlands, **2000**.
- CACHO, R., FELEZ, J., VERA C., **“Deriving Simulation Models from Bond Graphs with Algebraic Loops.: The extension to multibond graph systems”**, Journal of the Franklin Institute, Vol. 337, No. 5, pp. 579-600, **2000**.
- CANNON JR., R. H., **“Dynamics of Physical Systems”**, McGraw-Hill, New York, **1967**.
- CRAIG, R. R., **“Structural Dynamics”**, John Wiley & Sons, New York, **1981**.
- CRANDALL, S. H., KARNOPP, D. C., KURTZ Jr., E. F., PRIDMORE-BROWN, D. C., **“Dynamics of Mechanical and Eletromechanical Systems”**, McGrall-Hill, New York, **1968**.
- CONTROLLAB, **“Getting Started with 20-Sim”**, Enschede, Netherlands, **2004**.
- DABNEY, J. B., HARMAN, T. L., **“Mastering Simulink”**, Prentice Hall, ISBN 0-13-017085-2, **2003**.
- Da ROCHA, R. S., **“Análise Dinâmica de Chassi Veicular Utilizando os Procedimentos Generalizados da Técnica dos Grafos de Ligação”**, Dissertação de Mestrado, IME, Rio de Janeiro, **1998**.
- Da SILVA, F. R., SPERANZA NETO, M., **“Metodologia de Construção do Grafo de Ligação para Sistemas Estruturais”**, XII COBEM, vol. I, Brasilia, Brazil, pp. 57 – 60, **1993**.

- Da SILVA, F. R., “**Procedimentos para a Análise Estrutural Dinâmica Através da Técnica Generalizada dos Grafos de Ligação**”, Tese de Doutorado, COPPE, Rio de Janeiro, **1994**.
- DOEBELIN, E. O., “**System Modeling and Response – Theoretical and Experimental Approaches**”, John Wiley & Sons, New York, **1980**.
- DROZDZ, W., PACEJKA, H. B., “**Development and Validation of a Bond graph Handling Model of an Automobile**”, Journal of the Franklin Institute, Vol. 328, No. 5/6, pp. 941 – 957, **1991**.
- FAVRE, W., SCAVARDA, S., “**Bond-Graph Representation of Multibody Systems with Kinematic Loops**”, Journal of the Franklin Institute, Vol. 335, No. 4, pp. 643-660, **1998**.
- FERREIRA, F. M., Da SILVA, F. R., “**Computational Block-diagram Execution of Multiport Fields Models with Causal Considerations**”. In: 18<sup>th</sup> COBEM, Ouro Preto, Brasil, **2005a**.
- FERREIRA, F. M., Da SILVA, F. R., “**Análise da Dinâmica Lateral, Trajetória e Estabilidade de Veículos Através de uma Técnica de Modelamento Modular Generalizada**”. In: SAE Brasil 2005, São Paulo, Brasil, Artigo No. 2005010380, **2005b**.
- FILIPPO, J. M., DELGADO, M., BRIE, C., PAYNTER, H. M., “**A Survey of Bond Graphs: Theory, Applications and Programs**”, Journal of the Franklin Institute, Vol. 328, No. 5/6, pp. 565-606, **1991**.
- FURTADO, C. F. P., “**Modelagem Dinâmica de Rotores Flexíveis Utilizando a Técnica dos grafos de Ligação**”, Dissertação de Mestrado, IME, Rio de Janeiro, **1999**.
- GAWTHROP, P., J., “**Causal Augmentation of Bond Graphs with Algebraic Loops**”, Journal of the Franklin Institute, Vol. 329, No. 2, pp. 291-303, **1992**.
- GRIFFITHS, D. V., SMITH, I. M., “**Numerical Methods for Engineers – A Programming Approach**”, CRC Press, Oxford, **1991**.

- HANSELMAN, D., LITTLEFIELD, B., **“Matlab® 6 – Curso Completo”**, Prentice Hall, São Paulo, 1ª. Reimpressão, **2004**.
- KARNOPP, D. C., **“An Approach to derivative Causality in Bond Graphs Models of Mechanical Systems”**, Journal of the Franklin Institute, Vol. 329, No. 1, pp. 65-75, **1992**.
- KARNOPP, D. C., **“Understanding Multibody Dynamics Using Bond Graph Representation”**, Journal of the Franklin Institute, Vol. 334B, No. 4, pp. 631-642, **1997**.
- KARNOPP, D. C., MARGOLIS, D. L., ROSENBERG, R. C., **“System Dynamics: A Unified Approach”**, John Wiley & Sons, New York, **1990**.
- LAMBERT, J. D., **“Computational Techniques for Ordinary Differential Equations”**, Academic Press, New York, **1980**.
- LEBRUN, M., RICHARDS, C., **“How to Create Models Without Writing a Single Line of Code”**, V Scandinavian International Conference on Fluid Power, Linköping, Sweden, **1997**.
- LORENZ, F., WOLPER, J., **“Assigning Causality in the Case of Algebraic Loop”**, Journal of the Franklin Institute, Vol. 319, No. 1/2, pp. 237-241, **1985**.
- MARGOLIS, D. L., **“A survey of Bond Graph Modeling for Interacting Lumped and Distributed Systems”**, Journal of the Franklin Institute, Vol. 319, No. 1/2, pp. 125-135, **1985**.
- MARGOLIS, D. L., SHIM, T., **“A Bond Graph Model Incorporating Sensor, Actuators, and Vehicle Dynamics for Developing Controllers for Vehycle Safety”**, Journal of the Franklin Institute, Vol. 338, pp. 21-34, **2001**.
- MARTINEZ, J. F., **“Modelos para Análise do Comportamento Dinâmico de Veículos sobre Suspensão”**, dissertação de Mestrado, IME, Rio de Janeiro, Brasil, **1991**.
- MATHWORKS INC, **“Matlab® 6 User’s Guide”**, Massachusetts, USA, **2000**.
- NEVES, M. R. R., **“Análise da Estabilidade Lateral de um Veículo Tridimensional”**, dissertação de Mestrado, IME, Rio de Janeiro, Brasil, **2002**.

- PACEJKA, H. B., “**Modelling Complex Vehicle System Using Bond Graphs**”, Journal of the Franklin Institute, Vol. 319, No. 1/2, pp. 67-81, **1985**.
- ROSENBERG, R., C., “**State-space Formulation for Bond-graph Models of Multiport Systems**”, Dynamic Systems, Measurement, and control, ASME, Vol. 93, No. 1, pp. 35-40, **1971**.
- ROSENBERG, R., C., “**Multiport Models in Mechanics**”, Dynamic Systems, Measurement, and control, ASME, Vol. 94, No. 3, pp. 206-212, **1972**.
- ROSENBERG, R. C., KARNOPP, D. C., “**Introduction to Physical System Dynamics**”, McGraw-Hill, New York, **1983**.
- SAMANTARAY, A., K., “**About Bond Graphs – the System Modeling World**”. 2001. Disponível: <http://www.bondgraphs.com> [capturado em 17 jan. 2005].
- SPERANZA NETO, M., “**Procedimento para Acoplamento de Modelos Dinâmicos Através do Fluxo de Potência**”, XV COBEM, Águas de Lindóia, **1999**.
- TIERNEGO, M. J. L., BOS, A. M., “**Modelling the Dynamics and Kinematics of Mechanical Systems with Multibond Graphs**”, Journal of the Franklin Institute, Vol. 319, No. 1/2, pp. 37-50, **1985**.
- VAN DIJK, J., BREEDVELD, P. C., “**Simulation of system models containing zero-order causal paths—I. Classification of zero-order causal paths**”, Journal of the Franklin Institute, Vol. 328, No. 5-6, pp. 959-979, **1991**.
- VAN DIJK, J., BREEDVELD, P. C., “**Simulation of system models containing zero-order causal paths—II Numerical implications of class 1 zero-order causal paths**”, Journal of the Franklin Institute, Vol. 328, No. 5-6, pp. 981-1004, **1991**.