

MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
CURSO DE MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

1º Ten CÍCERO DOS SANTOS MENDES LIMA RIBEIRO

**ANÁLISE DA PLATAFORMA DE STEWART ACIONADA POR
CABOS PARA GRANDES ESPAÇOS DE TRABALHO**

Rio de Janeiro

2010

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

1º Ten CÍCERO DOS SANTOS MENDES LIMA RIBEIRO

**ANÁLISE DA PLATAFORMA DE STEWART ACIONADA POR CABOS
PARA GRANDES ESPAÇOS DE TRABALHO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica

Orientador: Maj Jorge Audrin Morgado de Gois – Dr. Ing

Rio de Janeiro

2010

C2010

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha

Rio de Janeiro, RJ – CEP 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá inclui-lo em sua base de dados, armazenar em computador, microfilmар ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade dos autores e de seus orientadores.

620.1123	Ribeiro, Cícero dos Santos Mendes Lima
R484	Análise da plataforma de Stewart acionada por cabos para grandes espaços de trabalho / Cícero dos Santos Mendes Lima Ribeiro. - Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2010.
	190 f. :il., graf., tab
	Dissertação (mestrado) – Instituto Militar de Engenharia, 2010.
	1. Engenharia Mecânica – Tese, Dissertação 2. Plataforma de Stewart. 3. Cabos em Catenária. I. Título. II. Instituto Militar de Engenharia.
	CDD 620.1123

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

1º Ten CÍCERO DOS SANTOS MENDES LIMA RIBEIRO

**ANÁLISE DA PLATAFORMA DE STEWART ACIONADA POR CABOS
PARA GRANDES ESPAÇOS DE TRABALHO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Maj Jorge Audrin Morgado de Gois – Dr. Ing

Aprovada em 08 de fevereiro de 2010 pela seguinte Banca Examinadora:

Maj Jorge Audrin Morgado de Gois – Dr. Ing. do IME – Presidente

Prof. Max Suell Dutra – Dr. -Ing. da UFRJ

Prof. Luciano Luporini Menegaldo - D.C. do IME

Prof. Fernando Ribeiro da Silva - D.C. do IME

Rio de Janeiro

2010

Quero dedicar este trabalho a minha família como forma de compensação pela minha falta durante estes dois anos, por ter perdido momentos preciosos que não voltam mais e por não tê-las levado para passear quando me pediam.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a DEUS, que me concede o simples dom de respirar, acordar e ter metas todos os dias. Logo em seguida, quero agradecer a minha esposa e minha filha por terem se mantido firmes durante estes dois anos, por todo o tempo em que fui muito chato. Agradeço aos meus pais que sempre me incentivaram a estudar e se desdoblaram em alguns momentos para manterem o alto padrão educacional que tive.

Agradeço ao Exército Brasileiro que financiou minha graduação e mestrado, ambos em tempo integral, que me deu a oportunidade de conhecer três regiões do Brasil e por mais incrível que pareça por ter me tirado do Rio de Janeiro, pois como todo bom carioca (carioca de criação, sou nascido em Niterói) nunca sairia do Rio por vontade própria.

Ao Maj Estarch, ao Ten Cel Mendonça e ao Maj Ribeiro e todos seus Sargentos auxiliares, todos lá de Campo Grande, que me ajudaram naquela tarde de quinta para não perder o prazo de envio do requerimento de mestrado. A Cap Jonara pela simpatia com que atendia meus telefonemas quase que semanalmente.

Ao Instituto Militar de Engenharia pela excelente escola que é e por seus integrantes, quase que na sua totalidade muito prestativos e aptos a ensinar seja o que for. Em especial ao Maj Audrin, Orientador, que ao longo destes dois anos, na medida em que lhe era possível nunca me negou auxílio e se mostra paciente com minhas limitações. Aos professores Luciano, Fernando, Cel Arnaldo e Prof. Max Suell da UFRJ pela paciência, interesse e entusiasmo com que compõe a banca examinadora.

Ao pessoal do LPM: Back, Fernando, Mineiro, Rodrigo, Chico, Ten Cel Servilha, Cmt Diogo, Ten Cel Zola (da Angola), Marcos e Vivian (A galera da dura); a galera do mestrado de outros cursos como: Humberto, Amorim, Alaluna, Ingrid e por ai vai, ao Pereira que nos deixou em busca de novos mundos; ao Teixeira desde a graduação; ao pessoal da mole: Renan, Oberdan, Bruno, Maj Eduardo, Leandro, Rômulo, Luciana e Fabrício que não concluíram conosco; e outros que não lembro o nome agora.

Ao pessoal do Corpo de Alunos, em especial a Cris e ao Lyra, que sempre estiveram dispostos a me ajudar a resolver meus problemas

E por último, mas não menos importante ao pessoal de Brasília por ter me ajudado na classificação após o curso.

Vai só, age e sê forte
(2 Crônicas 25:8)

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES.....	10
LISTA DE TABELAS.....	18
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS.....	19
LISTA DE SIGLAS.....	22
1 INTRODUÇÃO.....	25
1.1 Revisão bibliográfica.....	27
1.2 Objetivo	28
1.3 Desenvolvimento do trabalho.....	29
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	31
2.1 Definições.....	34
2.2 Classificação de TBPM.....	37
2.2.1 Quanto ao grau de redundância.....	37
2.2.2 Quanto aos graus de liberdade.....	41
3 MODELO MATEMÁTICO.....	43
3.1 Equilíbrio de forças e considerações adicionais.....	45
3.2 Cinemática inversa.....	47
3.3 Dinâmica inversa.....	50
4 ANÁLISE DO ESPAÇO DE TRABALHO.....	53
4.1 Singularidades.....	56
4.2 Rigidez do sistema.....	58
4.3 Método de determinação do espaço de trabalho controlável para manipuladores com cabos de massa nula.....	60
4.4 Determinação de forças pelo método do baricentro.....	64
5 ESTUDO DE CASO DE MANIPULADORES DE CABOS COM MASSA NULA	66
5.1 Solução homogênea.....	66

5.2	Solução não-homogênea.....	70
5.3	Espaço de trabalho com respeito às tensões.....	73
5.3.1	Espaço de trabalho com respeito às tensões com solução homogênea.....	75
5.3.2	Espaço de trabalho com respeito às tensões com solução não-homogênea.....	80
6	MODELO DO MANIPULADOR COM CABOS DE MASSA NÃO-NULA.....	86
6.1	Caso 1: Plataforma pontual 3m2T0R.....	87
6.2	Caso 2: Plataforma pontual 4m3T0R.....	93
6.3	Caso 3: Plataforma em barra 4m2T1R.....	95
6.4	Caso 4: Plataforma em placa plana 8m3T3R.....	97
6.5	método alternativo da solução baseada em componentes de forças horizontais para casos em que existem cabos na vertical.....	101
6.6	etapas do método de solução do problema não-linear.....	104
6.7	resultados esperados.....	105
7	DADOS DE PROJETO E ESPECIFICAÇÃO DO CABO DE AÇO.....	107
7.1	Definição da região de ancoragem.....	107
7.2	Definição da plataforma e especificação do cabo de aço.....	109
7.3	Dados de entrada do problema.....	112
7.4	Validação do espaço de trabalho.....	114
7.4.1	Considerações sobre o espaço de trabalho obtido.....	116
7.5	Trajétórias.....	124
7.5.1	Trajétória elíptica com altura variável.....	124
7.5.2	Trajétória ascendente helicoidal de raio variável.....	125
7.5.3	Trajétória parabólica.....	126
8	SIMULAÇÕES E RESULTADOS OBTIDOS.....	129
8.1	Resultados obtidos a partir das trajetórias.....	129
8.2	Problemas encontrados durante a obtenção do modelo dinâmico e análise do espaço de trabalho.....	139
9	TRABALHOS FUTUROS.....	140
9.1	Solução de sistemas altamente redundantes.....	140

9.2	Vibração no sistema.....	140
9.3	Sensação e percepção.....	141
9.4	Consideração dos pontos de ancoragem como polias.....	141
9.5	Implementação de um sistema de posicionamento na plataforma.....	142
9.6	Análise da rigidez do sistema quanto a massa dos cabos.....	142
10	CONCLUSÕES.....	143
11	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	146
12	APÊNDICE.....	151
12.1	Apêndice 1: Definições sobre fios e cabos em catenária	152
12.1.1	Equações gerais dos fios e cabos.....	153
12.1.2	Estudo particular da catenária.....	155
12.1.3	Fundamentação teórica para cabos elásticos.....	158
12.1.4	Equações fundamentais para grandes espaços de trabalho.....	160
12.2	Apêndice 2: Demonstração da obtenção da matriz de rotação $R_p(\mathbf{x})$	162
12.3	Apêndice 3: Demonstração da derivada da matriz de rotação $R_p'(\mathbf{x})$	164
12.4	Apêndice 4: Demonstração de $\omega = H_b^{-1} \cdot \theta$	165
12.5	Apêndice 5: Aplicação da serie de taylor para obtenção da configuração cinemática da plataforma.....	167
12.6	Apêndice 6: Espaços de trabalho para manipuladores com cabos de massa nula....	172
12.7	Apêndice 7: Trajetórias propostas e espaço de trabalho a esperado.....	175
13	ANEXO.....	180
13.1	Anexo 1: Características básicas de cabos de aço.....	181
13.2	Anexo 2: Especificação de cabo por aplicação.....	186
13.3	Anexo 3: Tabela de especificação do cabo CIMAF 6x25F+AACI.....	187
13.4	Anexo 4: Ficha técnica do EC-120 COLIBRI da Helibrás.....	188
13.5	anexo 5: Definições das matrizes de massa e generalizada de coriolis apresentada por (FANG, 2005).....	189

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG. 1.1	Protótipo do SEGESTA (BRUCKMAN et al, 2008).....	26
FIG. 1.2	Esquema plano de um manipulador serial acionado por cabos(OU, 1994).....	27
FIG. 2.1	Aplicações de manipuladores paralelos baseados em tendões para grandes dimensões.....	31
FIG. 2.2	Robô FALCON (KAWAMURA et al, 1995).....	32
FIG. 2.3	Definição dos elementos do manipulador.....	36
FIG. 2.4	Posicionamento da plataforma exteriormente ao polígono de ancoragem.....	39
FIG. 2.5	Manipuladores CPRM segundo a classificação por Nr de graus de liberdade (VERHOEVEN, 2004).....	42
FIG. 3.1	Modelo geral de uma plataforma acionada por cabos (VERHOEVEN, 1998).....	44
FIG. 3.2	Técnicas para se evitar colisões entre cabos (VERHOEVEN, 2004).....	45
FIG. 3.3	Forças aplicadas sobre a plataforma.....	46
FIG. 4.1	Espaço de trabalho definido por (FANG, 2005) para o SEGESTA (BRUCKMANN et al, 2008).....	56
FIG. 4.2	Singularidade do Tipo I ou Sub-mobilidade (VERHOEVEN, 2004).....	57

FIG. 4.3	Singularidade do Tipo II ou Sobre-Mobilidade (VERHOEVEN, 2004).....	57
FIG. 4.4	Rigidez para manipuladores 2T0R (HILLER et al ,2005).....	60
FIG. 4.5	Manipulador 3m1T0R (VERHOEVEN, 2004).....	63
FIG. 4.6	Região Viável e \mathcal{A} e Transformação Linear $\Gamma = N(A^T) \cdot \mathcal{A}$. (BRUCKMAN et al, 2008).....	63
FIG. 5.1	Manipulador 3m2T0R.....	66
FIG. 5.2	Curvas de tensão do manipulador 3m2T0R em função da Região Viável.....	68
FIG. 5.3	Manipulador 4m2T0R.....	68
FIG. 5.4	Região viável do caso 4m2T0R.....	69
FIG. 5.5	Tensão no cabo 1 do Manipulador RRPM 4m2T0R, obtida em função do domínio da Região Viável.....	70
FIG. 5.6	Evolução da região viável do caso 4m2T0R não-homogêneo em função da massa da plataforma.....	72
FIG. 5.7	Espaço de Trabalho com respeito as tensões $f_{min}=1,0N$ e $f_{max}=5,0N$ para o manipulador RRPM 4m2T0R.....	73
FIG. 5.8	Espaço de Trabalho com Respeito às Tensões, de uma manipulador CRPM homogêneo, para vários valores de k_{max}	75

FIG. 5.9	Método básico de determinação do espaço de trabalho.....	76
FIG. 5.10	Espaço de trabalho com respeito às tensões para o manipulador CRPM 3m2T0R.....	77
FIG. 5.11	Espaço de trabalho com respeito às tensões para o manipulador RRPM 4m2T0R.....	78
FIG. 5.12	Espaço de trabalho com respeito às tensões para o manipulador RRPM 6m2T0R.....	79
FIG. 5.13	Espaços de trabalho para manipuladores 3m2T0R com diferentes massas.....	81
FIG. 5.14	Espaço de trabalho para 3m2T0R com $f_{min}=1,0N$ e $f_{max}=2,5N$	82
FIG. 5.15	Espaço de trabalho para 3m2T0R com $f_{min}=2,0N$ e $f_{max}=5,0N$	82
FIG. 5.16	Espaço de trabalho para 4m2T0R com $f_{min}=1,0N$ e $f_{max}=5,0N$	83
FIG. 5.17	Espaço de trabalho para 4m2T0R com $f_{min}=1,0N$ e $f_{max}=2,5N$	83
FIG. 5.18	Espaço de trabalho para 4m2T0R com $f_{min}=2,0N$ e $f_{max}=5,0N$	84
FIG. 6.1	Modelo do manipulador 3m2T0R, com cabos em catenária.....	88
FIG. 6.2	Posições possíveis de cabos nos pontos de fixação.....	90

FIG. 6.3	Modelo do manipulador 4m3T0R, com cabos em catenária.....	93
FIG. 6.4	Modelo do manipulador 4m2T1R, com cabos em catenária.....	95
FIG. 6.5	Modelo do manipulador 8m3T3R, com cabos em catenária.....	98
FIG. 6.6	Vetor v_1 no plano vertical que contem a catenária.....	99
FIG. 6.7	Esquema de determinação do Espaço de Trabalho Controlável não-linear.....	104
FIG. 6.8	Representação dos vetores unitários em um manipulador CRPM 2T0R.....	105
FIG. 7.1	Duplo hangar de Orly de Eugène Freyssine, 1923 (PORTO, 2009).....	107
FIG. 7.2	Foto do Pátio Mal Mascarenhas de Moraes (Arquivo pessoal).....	108
FIG. 7.3	Sólidos de ancoragem (Esquemático).....	108
FIG. 7.4	Vistas de frente, lateral e de topo do helicóptero EC-120 COLIBRI (http://www.helibras.com.br/produtos_det.php?id=1).....	109
FIG. 7.5	Esquema de sustentação da plataforma por um único cabo.....	110
FIG. 7.6	Espaços de Trabalho com os pontos de ancoragem e eixos coordenados.....	112
FIG. 7.7	Vistas do Espaço B.....	115

FIG. 7.8	Vistas do Espaço B (Não-linear).....	115
FIG. 7.9	Forças de tração nos cabos.....	116
FIG. 7.10	Vistas laterais dos espaços de trabalho para cabos de massa não-nula.....	118
FIG. 7.11	Vistas frontais dos espaços de trabalho para cabos de massa não-nula.....	118
FIG. 7.12	Vistas superiores dos espaços de trabalho para cabos de massa não-nula.....	119
FIG. 7.13	Comparação entre os espaços de trabalho para o cabo C3, com CS 10 e 12.....	120
FIG. 7.14	Técnica de visualização do espaço de trabalho por cotas.....	121
FIG. 7.15	Espaço de trabalho por cotas para a região B com o cabo C3 e CS 12.....	122
FIG. 7.16	Trajatória elíptica de altitude variável.....	125
FIG. 7.17	Trajatória ascendente helicoidal de raio variável.....	126
FIG. 7.18	Trajatória da plataforma em vôo parabólico.....	128
FIG. 8.1	Curva de forças nos cabos na trajetória elíptica.....	130
FIG. 8.2	Curvas de comprimento de cabo na trajetória elíptica.....	131
FIG. 8.3	Curvas de deformação elástica nos cabos na trajetória elíptica.....	131

FIG. 8.4	Catenárias e tensões na posição inicial da trajetória elíptica $r=[200\ 0\ 50]$	133
FIG. 8.5	Catenárias e tensões na posição $r=[72\ 14\ 40]$ da trajetória elíptica.....	133
FIG. 8.6	Curvas de forças nos cabos para trajetória helicoidal ascendente.....	134
FIG. 8.7	Curvas de deformação elástica nos cabos para trajetória helicoidal ascendente..	135
FIG. 8.8	Curvas de forças nos cabos para trajetória parabólica.....	135
FIG. 8.9	Curvas de deformação elástica nos cabos para trajetória parabólica.....	136
FIG. 8.10	Catenárias e tensões na posição inicial da trajetória helicoidal $r=[150\ 0\ 20]$	137
FIG. 8.11	Catenárias e tensões na posição em $r=[93\ 12\ 67]$	137
FIG. 8.12	Catenárias e tensões na posição inicial da trajetória parabólica $r=[105\ 0\ 20]$	138
FIG. 8.13	Catenárias e tensões em $r=[128\ 0\ 77]$	138
FIG. 12.1	Modelo simples de cabo em catenária.....	152
FIG. 12.2	Catenária sujeita ao próprio peso.....	153
FIG. 12.3	Representação das forças aplicadas sobre um elemento infinitesimal de cabo....	153
FIG. 12.4	Modelo de catenária fixa em dois pontos.....	155

FIG. 12.5	Determinação das distancias horizontal e vertical entre pontos de fixação e de ancoragem da catenária.....	156
FIG. 12.6	Modelo de cabo em catenária para determinação do espaço de trabalho.....	160
FIG. 12.7	Representação de rotações tri-dimensionais na seqüência ZYX.....	162
FIG. 12.8	Representação do referencial local.....	165
FIG. 12.9	Espaço de trabalho linear para o Cabo C1, com CS=12	172
FIG. 12.10	Espaço de trabalho linear para o Cabo C2, com CS=12.....	173
FIG. 12.11	Espaço de trabalho linear para o Cabo C3, com CS=12.....	173
FIG. 12.12	Espaço de trabalho linear para o Cabo C4, com CS=12.....	174
FIG. 12.13	Vistas do Espaço de Trabalho A esperado.....	175
FIG. 12.14	Trajectoria da plataforma – vôo pairado.....	177
FIG. 12.15	Trajectoria da plataforma – Decolagem parabólica.....	178
FIG. 12.16	Trajectoria da plataforma – Trajetória senoidal no plano $0xz$	179
FIG. 13.1	Esquema de cabo de aço e seus elementos (VERRET ,1997).....	181

FIG. 13.2	Seção transversal de cabos de aço (VERRET ,1997).....	182
FIG. 13.3	Tipos de torção (VERRET ,1997).....	183
FIG. 13.4	Recomendações de enrolamento no tambor segundo diâmetro da polia e sentido de torção do cabo (VERRET, 1997).....	184
FIG. 13.5	Comparação entre pernas convencional e compactada (VERRET, 1997).....	184

LISTA DE TABELAS

TAB 2.1	Classificação do manipulador quanto ao numero de graus de liberdade.....	41
TAB. 5.1	Valores de $\lambda_{viável}$ e $f(\lambda_{viável})$ para as massas 0g, 50g e 250g no caso 3m2T0R.....	71
TAB. 5.2	Valores de $\lambda_{viável}$ e $f(\lambda_{viável})$ para as massas 0g, 50g e 250g no caso 4m2T0R.....	71
TAB. 6.1	Tabela de fórmulas para o Caso 3T3R.....	100
TAB. 7.1	Dados técnicos do EC-120 Colibri.....	110
TAB. 7.2	Cargas de ruptura para especificação de cabo em função do ângulo de inclinação com a horizontal, para cabos CIMAF 6x25F+AACI.....	111
TAB. 7.3	Propriedades Mecânicas dos cabos CIMAF 6X25F+AACI para os diâmetros 16,0, 19,0, 22,0 e 29,0mm.....	117
TAB. 7.4	Dados de projeto e especificação do cabo de aço.....	123
TAB. 7.5	Comparação entre as características do cabo C1 (CS 12) e C3 (CS 10).....	123
TAB. 12.1	Equações Fundamentais com Respeito a Cabos Flexíveis para Grandes Espaços de Trabalho.....	161
TAB. 13.1	Coeficientes de segurança aplicados a cabos de aço.....	185

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

ABREVIATURAS

- a - Razão h / γ de um cabo em catenária
- $A(s)$ - Área da seção transversal do cabo, no comprimento s em relação ao vértice da catenária
- A^{+T} - Pseudo-inversa de Moore-Penrose da Matriz de Estrutura A^T
- A^T - Matriz de estrutura
- b - Matriz dos pontos de ancoragem
- $C(m,p)$ - Combinação de m elementos p a p
- CS - Coeficiente de segurança
- d_C - Distância vertical entre os pontos de fixação e ancoragem de um cabo em catenária
- E - Módulo de elasticidade do cabo
- f - Vetor de forças nos cabos
- $f(\lambda_{viável})$ - Vetor de tensões nos cabos, obtidos pela aplicação de $\lambda_{viável}$
- f_s - Vetor solução de forças obtida a partir do método do baricentro
- $F(H)$ - Sistema de equações não-lineares
- f_{max} - Limite superior de tração no cabo
- f_{min} - Limite inferior de tração no cabo
- f_p - Vetor de forças aplicadas sobre a plataforma
- f_{rup} - Tração de ruptura do cabo
- g^C - Componente das *forças de Coriolis*
- g^E - Vetor de forças externas aplicadas sobre a plataforma
- h - Vetor de força horizontal em um cabo em catenária
- H_b^{-1} - Matriz de transformação linear que leva as derivadas dos ângulos de Cardan para o vetor de velocidades angulares no \mathbf{R}^3
- I^G - Tensor de inércia definido em \mathbf{R}^G em função dos ângulos de rotação;
- J_x - Matriz jacobiana de $\Phi_x(x)$
- K - Matriz de rigidez do sistema
- l - Vetor de comprimento de cabo

- l_C - Distância horizontal entre os pontos de fixação e ancoragem de um cabo em catenária
- M_p - Matriz de massa
- m_p - Massa da plataforma;
- $N(A^T)$ - Núcleo da matriz de estrutura
- p_L - Vetor dos pontos de fixação dos cabos na plataforma, no ref. local. R^L
- q - Vetor comprimento de cabo
- r - Rosição do referencial local da plataforma R^L em relação a R^G
- R^C - Referencial de determinação dos parâmetros da catenária no plano vertical que a contem
- R^G - Referencial Global
- R^L - Referencial Local da plataforma
- $R_p(x)$ - Matriz de rotação da plataforma em relação ao ref. global R^G
- $T(s)$ - Tração no cabo em um comprimento s em relação ao vértice da catenária
- U - Matriz Direcional
- U_{max} - Limite superior de torque nos atuadores
- U_{min} - Limite inferior de torque nos atuadores
- v_i - Vetor unitário de comprimento de cabo
- $w(r, \Theta)$ - Vetor de esforços externos aplicados sobre a plataforma na posição e orientação indicadas por r e Θ , respectivamente.
- x - Posição da plataforma
- \dot{x} - Velocidade da plataforma
- \ddot{x} - Aceleração da plataforma
- x_1 - Posição do ponto de fixação de um cabo em catenária no ref. R^C
- x_2 - Posição do ponto de ancoragem de um cabo em catenária no ref. R^C
- ΔL - Deformação elástica do cabo
- ΔS - Comprimento de cabo entre os pontos x_1 e x_2

SÍMBOLOS

- γ - Peso por unidade de comprimento de um cabo em catenária
- α - Menor ângulo que o plano vertical que contem a catenária faz com a direção longitudinal do sólido de ancoragem.
- β_1 - Ângulo que a catenária faz com a horizontal no ponto de fixação
- β_2 - Ângulo que a catenária faz com a horizontal no ponto de ancoragem
- $\frac{\partial f_i}{\partial h_j}$ - Derivada parcial de f_i segundo h_j para o cálculo da matriz Jacobiana de solução do sistema não-linear
- ψ - Ângulo de rotação da plataforma em torno do eixo Z
- \square - Ângulo de rotação da plataforma em torno do eixo Y
- φ - Ângulo de rotação da plataforma em torno do eixo X
- ω - Vetor velocidade angular
- $\Phi_x(x)$ - Função vetorial comprimento de cabo
- $d\delta$ - Deformação axial específica de um cabo em catenária
- C - Hipercubo m -dimensional dos limites de força nos cabos
- S - Hiperplano r -dimensional das distribuições de força
- Λ - Região Viável delimitada pelos $\lambda(s)$ no \mathbf{R}^r
- λ - Ponto solução da região viável em \mathbf{R}^r
- λ_s - λ obtido pelo método do baricentro, referente a solução segura
- $\lambda_{viável}$ - λ limites da região viável Λ
- Γ - Imagem da região viável no hipercubo de forças
- Θ - Orientação da plataforma, representada pelo referencial \mathbf{R}^L , em relação a \mathbf{R}^G
- τ_p - Vetor de torques aplicados sobre a plataforma

LISTA DE SIGLAS

1T	Movimento com 1 grau de liberdade translacional
2T	Movimento com 2 graus de liberdade translacionais
2T1R	Movimento com 2 graus de liberdade translacionais e 1 rotacional
3T	Movimento com 3 graus de liberdade translacionais
3T2R	Movimento com 3 graus de liberdade translacionais e 2 rotacionais
3T3R	Movimento com 3 graus de liberdade translacionais e 3 rotacionais
8M3T3R	Manipulador com 8 cabos, cuja plataforma se move como 3T3R.
CKRM	Completely Kinematic Restrained Manipulators (Manipulador com restrições cinemáticas completas)
CRPM	Completely Restrict Positioning Mechanism (Mecanismo de posicionamento completamente restrito)
IKRM	Incompletely Kinematic Restrained Manipulators (Manipulador com restrições cinemáticas incompletas)
IME	Instituto Militar de Engenharia
IRPM	Incompletely Restrict Positioning Mechanism (Mecanismo de posicionamento incompletamente restrito)
LPM	Laboratório de Projetos Mecânicos
R.A.	Razão de Aspecto
RAMP	Redundantly Actuated Manipulators (Manipulador com restrições cinemáticas redundantes)
RRPM	Redundantly Restrict Positioning Mechanism (Mecanismo de posicionamento redundantemente restrito)
SE-4	Seção de Ensino – 4 / Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais
SEGESTA	SEilGETribene Systeme in Theorie und Anwendung (Sistemas atuados por cabos em teoria e aplicação)
TBPM	Tendon-base parallel manipulator (Manipulador paralelo acionado por cabos)

RESUMO

Manipuladores paralelos atuados por cabos de massa desprezível, constituem-se em amplo material de pesquisa. No entanto, para que um cabo de massa não desprezível seja utilizado em um grande espaço de trabalho, devem ser feitas as considerações necessárias à formação de catenárias nestes cabos.

Conhecendo-se a solução para manipuladores acionados por cabos de massa nula, busca-se a solução do problema gerado pela aplicação de massa nos cabos pelo método de Newton, e obtêm-se a solução de forças para dada configuração cinemática e dinâmica aplicada sobre a plataforma, por meio de um sistema de equações em função de suas forças horizontais. Caso o sistema possua solução na posição e esforços analisados, diz-se que este ponto pertence ao espaço de trabalho do manipulador e são apresentados todos os parâmetros que determinam as catenárias do sistema, bem como sua configuração cinemática.

Analisando-se o problema em diversos casos, pode-se verificar que o espaço de trabalho é mais reduzido e se deforma na direção de aplicação das forças, em relação ao espaço de trabalho para cabos de massa nula. Como trabalhos futuros propõem-se o estudo da rigidez e da vibração do sistema e a aplicação de sistema de controle para motores de corrente alternada, por serem mais robustos e de menor custo.

ABSTRACT

Tendon based parallel manipulators with massless wires are widely studied. However, for real wires used in a extense workspace, some considerations should be made.

From the solution for massless cable manipulators, the problem generated by the application of the cable mass is solved by Newton's method. The tensions are obtained for a kinematic and dynamic configuration applied to the platform from the component of horizontal force. If the system has solution for this position and efforts, this point will belong to the workspace and the catenary parameters are determined.

Analyzing the problem in several cases, one can verify that the workspace is smaller than workspace for massless wires and deformed in the direction of application of forces. As future work are proposed to study the stiffness and vibration of the system, as well the application of a control system based AC motors.

1 INTRODUÇÃO

Por definição um **manipulador paralelo** consiste de uma plataforma ou ferramenta ligada a base por cadeias cinemáticas abertas e independentes. De maneira geral, comparando-os com manipuladores antropomórficos em série, ambos com **atuadores rígidos**, um manipulador paralelo possuirá as seguintes características:

- a) boa capacidade de posicionamento;
- b) elevada capacidade de carga, pela sustentação cooperativa de todos os atuadores;
- c) grande rigidez estrutural, dada a característica acima;
- d) baixa inércia, devido a distribuição de massas; e,
- e) reduzido espaço de trabalho, devido ao comprimento comercial dos atuadores, e a estes terem de se mover em conjunto em torno da posição desejada.**

(STEWART, 1965) propôs uma estrutura paralela com 6 graus de liberdade e atuadores lineares rígidos a partir de uma estrutura conhecida como plataforma de Gough desde 1947 e esta nova estrutura ficou conhecida como Plataforma de Stewart¹. No entanto a Plataforma de Stewart tradicional apresentava a desvantagem de não poder se mover além do comprimento permitido por seus atuadores.

Visando eliminar o problema do curto espaço de trabalho, limitado pelas juntas cinemáticas do mecanismo, foi proposta uma plataforma móvel sustentada por cabos. Esta concepção ficou conhecida como *manipulador paralelo baseado em tendões ou atuado por cabos*.

A FIG. 1.1 apresenta o *SEGESTA*², um manipulador paralelo atuado por sete cabos e que se move nos seis graus de liberdade.

1 A Plataforma de Stewart constitui-se no manipulador paralelo mais conhecido no meio não científico

2 SEGESTA - Seilgetriebene Stewart-Plattformen in Theorie und Anwendung. Em português: Plataforma de Stewart atuada por cabos para teoria e aplicação

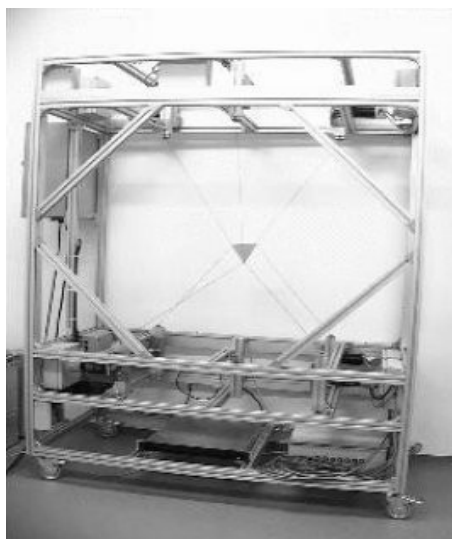


FIG. 1.1- Protótipo do SEGESTA (BRUCKMAN et al, 2008)

Ao contrário do SEGESTA, caso um manipulador paralelo acionado por cabos possua cabos longos, seu espaço de trabalho controlável pode ser ampliado o quanto se deseje, desde que quesitos como sustentabilidade e controlabilidade da plataforma sejam atendidos.

O interesse em manipuladores para grandes espaços reside na possibilidade de aplicação em simuladores de vôo de aeronaves, em especial de aeronaves de asas rotativas. Em amplos espaços, a movimentação da plataforma representando uma aeronave tripulada poderá levar o piloto a experimentar a sensação de voar e realizar manobras e não somente a ter essa percepção a partir de equipamentos de realidade virtual.

Desta forma, o Exército Brasileiro deseja desenvolver o estudo em torno deste tipo de manipulador pelo fato de que parte da formação prática e da instrução de um piloto poderá ser substituída por horas de aula em simuladores gerando economia de combustível e evitando o desgaste da aeronave.

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Verifica-se que o trabalho neste tipo de manipulador começou nos anos 80 com a idéia de melhoramentos em guindastes. Logo evoluiu para construção naval com trabalhos de (DAGALAKIS, 1989; ALBUS e BOSTELMANN, 1993; e BOSTELMANN et al, 1994), pois verificou-se que a possibilidade de movimentação e posicionamento preciso de grandes peças poderia viabilizar a construção modular de navios, acelerando o processo de fabricação.

(OU, 1994) desenvolveu um trabalho sobre manipuladores seriais acionados por cabos por meio de rotulas que atuassem como polias. Porem foi verificado que o comprimento dos cabos é variável em função da posição angular de cada junta do manipulador. Em (OU, 2004) pode-se verificar o prosseguimento do trabalho que havia começado .A FIG. 1.2 apresenta o caso.

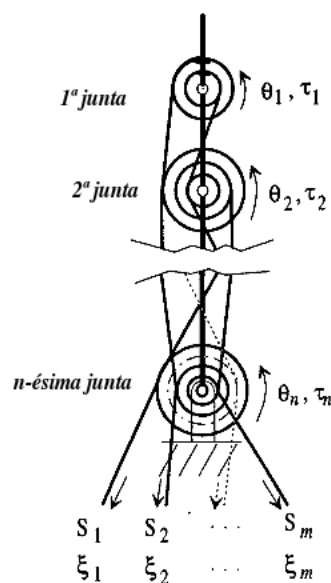


FIG. 1.2 – Esquema plano de um manipulador serial acionado por cabos(OU, 1994)

Novamente, voltados para a aplicação submarina tem-se (UNGER, J., AND DAGALAKIS, N. G., 1998) com o trabalho *Optimum Stiffness Study for a Parallel Link Robot Crane Under Horizontal Force*³.

³ Estudo da rigidez ótima de um manipulador paralelo tipo guindaste sob a ação de uma força horizontal.

Como aplicação deste tipo de manipulador na indústria espacial (BOSTELMAN et al, 1994) analisam o sistema de abertura de trem de pouso de um equipamento lunar.

(TADOKORO et al, 1999) desenvolveu um trabalho sobre a fixação da uma plataforma acionada por cabos em áreas atingidas por terremotos para os serviços de resgate, evitando o contato da equipe e da vítima com o solo.

(KAWAMURA et al, 2000) desenvolveu um manipulador paralelo acionado por cabos capaz de trabalhar em altas velocidades chamado FALCON-7. (WILLIAMS, 2005) propõe um sistema de plataforma móvel acionada por cabos para a limpeza e manutenção de aeronaves. (LAFOURCADE et al, 2002; e ZHENG, 2006) desenvolveram e analisaram manipuladores para sustentação de modelos em tuneis de vento. Há ainda uma aplicação em sistemas de transmissão automotiva, desenvolvido por (TSAI, 1996) para o departamento do governo norte americano.

Nas bases de patentes nacional (INPI)⁴, americana (USPTO)⁵ e europeia (EPO)⁶ existem patentes sobre plataformas atuadas por cabos, sistemas de ancoragem de cabos, posicionamento de plataformas subaquáticas e sistemas de abertura de mecanismos por cabos.

1.2 OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é a obtenção do modelo dinâmico da Plataforma de Stewart acionada por cabos, com 6 graus de liberdade, para aplicações em grandes espaços de trabalho, de forma que possa realizar deslocamentos amplos o bastante, capazes de simular o voo de aeronaves de asa rotativa.

Como deseja-se que a plataforma atue ao longo de grandes distâncias, os cabos serão considerados elásticos e de massa não-nula, cujas especificações técnicas são obtidas de cabos comerciais, considerando a simplificação de que os cabos adotem a configuração de catenária

4 www.inpi.gov.br – Instituto Nacional de Propriedade Intelectual

5 www.uspto.gov – United States Patent and Trademark Office

6 www.epo.org – European Patent Office

estática durante todo o percurso realizado.

Os modelos apresentados por (VERHOEVEN, 2004; FANG, 2005; OH E AGRAWAL, 2005; MIKELSONS et al, 2008) se baseiam quase que unicamente em manipuladores completamente restritos. Segundo a própria classificação de (VERHOEVEN, 2004) quanto ao número de redundâncias, este tipo de manipulador se caracteriza pelo número de cabos ser igual ao número de graus de liberdade mais um, e considera cabos de massa desprezível.

Verifica-se que a utilização de mais cabos que o previsto, para manipuladores completamente restritos, pode ser tanto desejável como necessária para a manipulação da plataforma móvel de acordo com as necessidades de projeto. A presença de cabos adicionais atribui ao manipulador restrições redundantes, conforme será apresentado no segundo capítulo.

A necessidade de incluir cabos redundantes poderá surgir caso o espaço de trabalho desejado seja amplo o suficiente para impedir que as forças dinâmicas e acelerações que esta dissertação espera obter sejam alcançadas ao longo das trajetórias desejadas.

A possibilidade de inclusão de cabos adicionais ao sistema pode ser justificada também caso em que a estrutura de ancoragem não suporte a concentração de esforços e estes devam ser redistribuídos.

Assim torna-se necessário buscar um método de solução que independa do número de cabos do manipulador, e ofereça a capacidade de se variar o grau de redundância cinemática do modelo final.

1.3 DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO

Este trabalho é desenvolvido utilizando os softwares livres:

- Scilab-4.1.2;
- Openoffice 3.1; e,
- Linux sob a distribuição Ubuntu 8.04.

O Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica, as definições de manipuladores acionados por cabos, sua classificação e considerações quanto aos graus de redundância e liberdade do manipulador.

O Capítulo 3 refere-se ao modelo matemático da plataforma acionada por cabos e descreve: a cinemática inversa para o caso de manipuladores acionados por cabos de massas consideradas nulas; e, o modelo dinâmico da plataforma para o caso geral de “ m ” cabos e seis graus de liberdade.

O Capítulo 4 apresenta definições e ferramentas de análise do espaço de trabalho e o método de determinação da “solução segura” pelo baricentro da região viável.

No Capítulo 5 é apresentado o método de determinação do espaço de trabalho onde consideram-se cabos de massa nula. Caso não existam esforços externos aplicados sobre a plataforma, tem-se a solução homogênea, caso contrário, tem-se a solução não-homogênea. Também são analisados os espaços de trabalho com respeito aos limites de tensão para ambas as soluções.

O Capítulo 6 introduz o problema de determinação do espaço de trabalho quando os cabos possuem massa não-nula, apresenta as equações de modelo para quatro casos distintos quanto ao grau de liberdade e faz considerações quanto aos resultados esperados na obtenção do espaço de trabalho controlável.

O Capítulo 7 apresenta a especificação dos cabos de aço utilizados nas simulações, as dimensões da plataforma e as regiões de ancoragem utilizados nas simulações, que são geradas no Capítulo 8.

O Capítulo 9 apresenta as conclusões sobre o trabalho e os resultados obtidos.

O Capítulo 10 sugere trabalhos futuros para a continuidade desta dissertação.

O Capítulo 11 apresenta as referências bibliográficas utilizadas neste trabalho e nos Capítulos 12 e 13 são apresentados, respectivamente, os Apêndices e Anexos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Manipuladores paralelos atuados por cabos são capazes de gerar velocidades e acelerações mais elevadas quando comparados com manipuladores que utilizem atuadores rígidos seriais. Tal característica ocorre devido a massa das partes moveis, neste caso os cabos que sustentam o atuador final, ser consideravelmente menor. A principal vantagens deste tipo de manipulador está no fato de ser relativamente mais leve e apresentar boa flexibilidade e manobrabilidade, por consequência menor inercia e rigidez.

Dentre as suas principais aplicações industriais e comerciais, pode-se citar o posicionamento de telescópios sobre refletores de sinais fixos e sistemas de câmeras suspensas em estádios, onde braços robóticos com atuadores rígidos não são apropriados devido ao curto alcance útil em relação as dimensões a serem observadas.

Na FIG. 2.1 são apresentadas estas aplicações.



a) Telescópio suspenso por balão posicionado por 6 cabos sobre a superfície refletora (National Research Council of Canada)



b) Skycam sustentada por 3 cabos (Skycam® CF InFlight)

FIG. 2.1 – Aplicações de manipuladores paralelos baseados em tendões para grandes dimensões

Outra aplicação industrial em menor escala é apresentada por (KAWAMURA et al, 1995) e (KAWAMURA et al, 2000) de maneira detalhada com o *Robô FALCON-7* para a montagem em alta velocidade de componentes eletrônicos de pequeno peso baseados em semicondutores.

A FIG. 2.2 ilustra de maneira esquemática o robô FALCON-7 e seu possível espaço de trabalho para a montagem de componentes. Observando a figura verifica-se que o posicionamento dos cabos com pequenos ângulos de inclinação em relação a direção longitudinal possibilita que os esforços e acelerações sejam transmitidos de maneira mais eficiente ao manipulador.

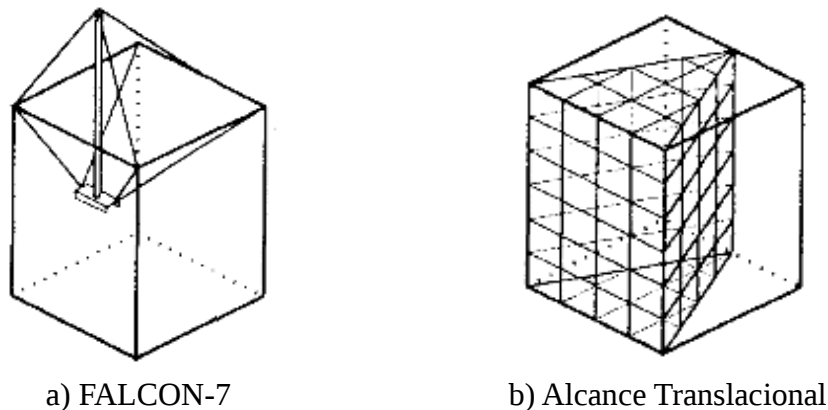


FIG. 2.2 – Robô FALCON (KAWAMURA et al, 1995)

Aplicado a este trabalho, pode-se dizer que, de modo geral um manipulador paralelo baseado em tendões pode ser utilizado para percorrer grandes espaços livres, limitados por pontos fixos bem definidos e nos quais seja possível fixá-lo, e ainda não haja a atuação de forças externas capazes de posicioná-lo fora do polígono ou sólido determinado pelos pontos de ancoragem dos cabos¹, no entanto existem exceções a esta definição.

Como cabos são elementos de máquinas que somente geram tração sobre os componentes em que estão fixos, a atuação redundante se torna necessária para que o posicionamento do mecanismo seja completamente restringido (Completely Restrained Positioning Mechanism - CRPM).

Desta forma os cabos devem ser utilizados de forma coordenada para movimentarem a plataforma em um espaço tridimensional a ser definido para cada configuração dinâmica e estrutural do manipulador. Este volume do espaço, no qual a plataforma admite o equilíbrio dinâmico de forças, denomina-se espaço de trabalho da plataforma.

A distribuição de tensões deve ser considerada durante todo o movimento do sistema

¹ Define-se por ponto de ancoragem, o local ou ponto considerado fixo, em relação a um referencial

através da trajetória desejada. Para que o posicionamento da plataforma seja realizado, é necessário que condições previamente determinadas de pré-carga nos cabos e limites de vibração do sistema sejam obedecidas.

Para minimizar o consumo de energia do sistema, uma distribuição ótima de tensões é requerida de acordo com as condições cinemáticas e dinâmicas existentes. Esta distribuição é apresentada por (BRUCKMANN et al, 2006) e (MIKELSONS et al, 2008)

Em (FANG et al, 2004), *Motion Control of a Tendon-Based Parallel Manipulator Using Optimal Tension Distribution*, trata-se do problema da distribuição ótima de tensões nos cabos como forma de reduzir os esforços envolvidos e aumentar a eficiência energética do sistema.

(VERHOEVEN, 2004) em *Analysis of the Workspace of Tendon-based Stewart Platforms* apresenta diversas configurações de plataformas sustentadas por cabos, compara manipuladores paralelos a manipuladores seriais em diversas aplicações e apresenta uma relação entre a configurações de cabos com os graus de liberdade da plataforma. Neste trabalho também são analisadas as regiões de singularidade do espaço de trabalho.

(FANG, 2005) fornece uma referência completa em seu trabalho intitulado *Design, Modeling and Motion of Tendon-Based Parallel Manipulators*, voltada para manipuladores completamente restritos. Este trabalho apresenta os modelos cinemático e dinâmico de uma plataforma com sete cabos e seis graus de liberdade, com ambos os modelos baseados em ângulos de cardan. Considera-se que a plataforma é rígida e que os cabos são elásticos (deformam-se longitudinalmente) e sem massa.

O desenvolvimento deste trabalho se dará basicamente em três fases:

- modelo com cabos inelásticos² e sem massa.
- modelo com cabos elásticos³ e sem massa.
- modelo com cabos elásticos e com massa não-nula.

Por fim a contribuição deste trabalho será a obtenção de um modelo dinâmico com seis graus de liberdade para manipuladores paralelos acionados por cabos classificados como completamente restritos e redundantemente restritos, este último independentemente do número de

2 A simplificação de cabo inelástico (e sem massa) indica que o cabo se mantém permanentemente retilíneo, ligando os pontos de ancoragem e fixação da plataforma, e que se comprimento não varia pela ação de esforços.

3 Uma das simplificações adotadas neste trabalho é a ausência de vibração do cabo. A elasticidade considerada em um cabo atuando sobre a plataforma indica somente que este se deforma longitudinalmente variando seu comprimento e conseqüentemente a posição da plataforma.

cabos, e em ambos os casos adota-se a configuração de catenária estática para cada cabo empregado.

É feita ainda a consideração de que as classificações acima são obedecidas, ou seja, de que o manipulador em nenhum momento apresente configuração incompletamente restrita devido a ação de forças externas.

2.1 DEFINIÇÕES

Primeiramente, em todos os casos analisados utilizam-se m para número de cabos e n para número de graus de liberdade da plataforma.

São definidos como “pontos de fixação” os pontos da plataforma onde os cabos são fixados. Estes pontos são representados por vetores constantes no referencial local. É conveniente definir que o referencial local padrão utilizado em todas as equações é centroidal com os eixos Ox e Oy , respectivamente, paralelo e transversal a maior dimensão da plataforma, e que caso isso não ocorra, tal fato será mencionado.

“Pontos de ancoragem” são os pontos de ligação dos cabos com a estrutura de sustentação do manipulador. Neste trabalho, todos os pontos de ancoragem são considerados fixos (constantes) e pontuais devido a ordem de grandeza da variação da localização destes pontos em relação ao volume do espaço de trabalho ser desprezível. Por se tratar de grandes espaços de trabalho, a variabilidade da posição do ponto de ancoragem não é uma condição de existência para este tipo de manipulador.

(BRUCKMANN et al, 2008) apresentam o equacionamento para cabos ligados à base por polias acopladas a peças móveis nas regiões de ancoragem. Desta forma, as polias por onde os cabos passam estão sempre voltadas na direção de seu respectivo ponto de fixação, no entanto, de acordo com a posição da plataforma e variando o ângulo do cabo com a horizontal na região de ancoragem, a posição do ponto de ancoragem é alterada.

A modelagem de pontos de ancoragem com polias não será adotada neste trabalho, devido a dimensão da polia ser consideravelmente menor que o espaço de trabalho gerado.

Desta forma, pode-se aproximar a posição do ponto de ancoragem para um ponto fixo.

Um exemplo de manipuladores acionados por cabos com pontos de ancoragem moveis ocorreria no caso de atuadores sobre trilhos, contudo a utilização deste tipo de atuador, dadas as características de projeto, poderia gerar custos proibitivos.

Definem-se como “*superiores*” os cabos que, em determinada posição e orientação da plataforma possuam o ponto de ancoragem superior ao de fixação e como cabos “*inferiores*” os que se encontrem em situação oposta. A denominação de cabos superiores e inferiores pode ser definida ainda em relação a média dos pontos de ancoragem.

Da mesma forma, polígono ou sólido de ancoragem é a figura formada por todos os pontos de ancoragem do manipulador. Verifica-se que para a plataforma ser plenamente utilizada, com todos seus graus de liberdade controláveis, é desejável que sua posição esteja sempre no interior do polígono ou sólido de ancoragem, conforme o caso.

A utilização do manipulador de maneira eficiente, relaciona-se a sua controlabilidade nos graus de liberdade de interesse. Para que isso ocorra, é necessário identificar as regiões do espaço de trabalho nas quais a plataforma possa exercer esforços e movimentar-se de maneira controlável. A determinação e conhecimento destas regiões está relacionada a geometria do sólido de ancoragem.

Desta forma, chama-se “Espaço de Trabalho” ao conjunto destas posições. Em (VERHOEVEN et al, 1998; VERHOEVEN, 2004; e FANG, 2005) são verificadas quatro definições distintas para espaço de trabalho, às quais serão apresentadas no capítulo quatro, no entanto esta dissertação referir-se-a sempre ao *Espaço de Trabalho Controlável* do manipulador.

(VERHOEVEN, 2004) define genericamente manipuladores como sistemas mecânicos capazes de transformar m variáveis l_1, \dots, l_m , neste caso os comprimentos dos m cabos, e trações f_1, \dots, f_m com respeito aos atuadores em n variáveis de posição x_1, \dots, x_n e de esforços aplicados sobre o atuador final w_1, \dots, w_n , desde que n não seja maior do que seis, representando o numero de graus de liberdade controláveis do sistema. Utilizando a mesma definição dada acima, as m variáveis de comprimento e tração nos cabos são definidas como “*Variáveis de Junta*” e as n variáveis de posição e esforços sobre a plataforma como “*Variáveis do Atuador*”.

(OU, 1994) caracteriza variáveis de junta e atuador final (ou plataforma) como espaços vetoriais distintos, respectivamente contidos em R^m e R^n , onde as variáveis de junta são

fornecidas ao sistema para a obtenção de n variáveis do atuador, segundo a cinemática e dinâmica direta do manipulador.

Dadas as definições de (VERHOEVEN, 2004; e, OU, 1994) é possível definir a *Matriz de Estrutura*⁴ do problema como o transformador linear que relaciona as forças nos atuadores com respeito às juntas, contidas no espaço vetorial R^n , com os esforços aplicados sobre a plataforma ou atuador final, contidos no espaço vetorial R^m .

A FIG. 2.3 apresenta esquematicamente um manipulador com $m=8$ cabos e pontos de ancoragem, quatro pontos de fixação e $n=6$ graus de liberdade controláveis.

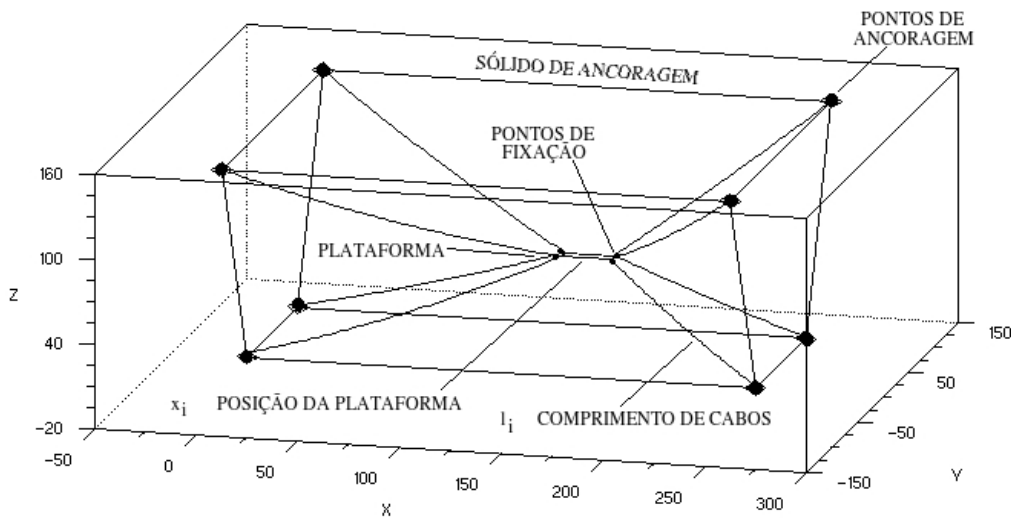


FIG. 2.3 – Definição dos elementos do manipulador

As variáveis de juntas são os comprimentos e forças nos cabos e as variáveis do atuador a posição e esforços sobre a plataforma, ou que esta exerça. O sólido de ancoragem é dado por um prisma reto de seção trapezoidal.

Os Capítulos 4 e 6 apresentam os métodos matemáticos para a solução do problema de determinação do espaço de trabalho. O Capítulo 4 demonstra que a determinação do espaço de trabalho para manipuladores com cabos de massa nula se dá pela solução de sistemas lineares baseados nas Equações Básicas de Solução do Sistema. Por este motivo, este trabalho refere-se frequentemente a este caso como caso ou sistema linear.

4 A Matriz de Estrutura A^T é o ente matemático que relaciona as trações nos cabos com as forças generalizadas aplicadas sobre a plataforma através da EQ 3.6: $A^T \mathbf{f} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$, que é uma das *Equações Básicas de Solução do Sistema*. A teoria e equacionamento a respeito da Matriz de Estrutura são apresentados no capítulo 3.

Dando continuidade, o Capítulo 6 apresenta e demonstra o método de obtenção das forças nos cabos e de determinação do espaço de trabalho de manipuladores com cabos de massa não-nula, o que ocorre por meio da solução de um sistema de equações não-linear. Por analogia, a obtenção do espaço de trabalho para este caso é dita não-linear ou como problema não linear.

2.2 CLASSIFICAÇÃO DE TBPM

Existem duas classificações básicas e independentes entre si, para manipuladores paralelos acionados por cabos, que são utilizadas neste trabalho:

1. Quanto ao grau de redundância do manipulador;
2. Quanto aos graus de liberdade da plataforma.

2.2.1 QUANTO AO GRAU DE REDUNDÂNCIA

(MING E HIGUCHI, 1994a) classificam os manipuladores paralelos acionados por cabos de acordo com a relação entre m e n como:

- a) $m \leq n$ - IRPM (*Incompletely Restrained Positioning Mechanisms*): A posição da plataforma não pode ser definida somente por equações de restrições cinemáticas unilaterais, e pelo menos uma equação dinâmica é necessária para definir sua posição. Neste caso, existirão coordenadas generalizadas dependentes da posição e movimentação da plataforma; e,
- b) $m \geq n + 1$ - CPRM (*Completely Restrained Positioning Mechanisms*): A posição da plataforma é completamente definida por equações de restrição cinemática unilaterais, e todos os graus de liberdade do sistema são controlados de maneira independente. É o caso mais amplamente estudado.

(VERHOEVEN, 2004) utiliza a definição de (MING E HIGUCHI, 1994) para manipuladores IRPM, contudo divide a definição de CRPM segundo as peculiaridades de seu trabalho em CRPM e RRPM. A classificação dada por (VERHOEVEN, 2004) é descrita abaixo. Esta classificação será utilizada ao longo deste trabalho.

- a) $m \leq n$ - IRPM (*Incompletely Restrained Positioning Mechanisms*): de (MING E HIGUCHI, 1994);
- b) $m = n + 1$ - CPRM (*Completely Restrained Positioning Mechanisms*): restringindo a definição de CRPM anterior para o número de cabos igual ao número de graus de liberdade mais um. Neste caso a posição da plataforma é totalmente definida por meio da cinemática inversa, obtendo-se a solução de forças por meio de um sistema de equações de simples solução computacional; e,
- c) $m > n + 1$ - RRPM (*Redundantly Restrained Positioning Mechanisms*): Neste caso existem mais equações de restrição do que o necessário para a definição do problema e deve-se encontrar uma solução comum a todas. Quanto ao sistema físico, este possui mais cabos do que o necessário para garantir a independência de seus movimentos, havendo a possibilidade de se desenvolverem casos de *altas redundâncias*, elevando consideravelmente o custo computacional para solução do problema.

(FANG, 2005) ainda propôs outra classificação, de maneira similar e seguindo a definição dada por (MING E HIGUCHI, 1994a) e (VERHOEVEN, 2004):

- a) IKRM (*Incompletely Kinematic Restrained Manipulators*), para $m < n$;
- b) CKRM (*Completely Kinematic Restrained Manipulators*), para $m = n$; e,
- c) RAMP (*Redundantly Actuated Manipulators*), para $m \geq n + 1$.

Devido ao interesse deste trabalho em caracterizar de maneira distinta os casos $m = n + 1$ e $m \geq n + 1$, as classificações de (MING E HIGUCHI, 1994a) e de (FANG, 2005) quanto ao grau de redundância não serão utilizadas.

Deve-se atentar para o fato de que a classificação de (VERHOEVEN, 2004) apenas define o grau de restrição de um sistema, baseado na relação entre m e n , e para determinada configuração cinemática.

É interessante observar que tanto plataformas CPRM como RRPM podem ser

transformadas em IRPM de acordo com a posição da plataforma em relação aos pontos de ancoragem, quando forças externas são necessárias para equilibrar a plataforma e tornar as m tensões positivas.

De acordo com (VERHOEVEN, 1998) isto se deve ao fato de que: “*Para qualquer referencial local da plataforma, a Matriz de Estrutura deve conter em cada linha pelo menos um elemento negativo e um positivo*”.

A partir da definição acima. Pode-se dizer também que “*caso o produto dos elementos de cada linha seja positivo e haja solução para o problema, o manipulador se comportará como IRPM, independente de sua classificação segundo (VERHOEVEN, 2004)*”

A FIG. 2.4 apresenta o caso de um manipulador plano, com m cabos ($m > 3$) ligados ao polígono de ancoragem (1)-(2)-...-(m), e dois graus de liberdade. Apesar desta configuração ser caracterizada como RRPM, é possível verificar que em qualquer posição externa ao polígono de ancoragem, a plataforma se comportará como pertencendo a um manipulador IRPM. Caso não haja pelo menos um esforço externo atuando sobre a plataforma, não será possível estabelecer o equilíbrio estático entre as tensões.

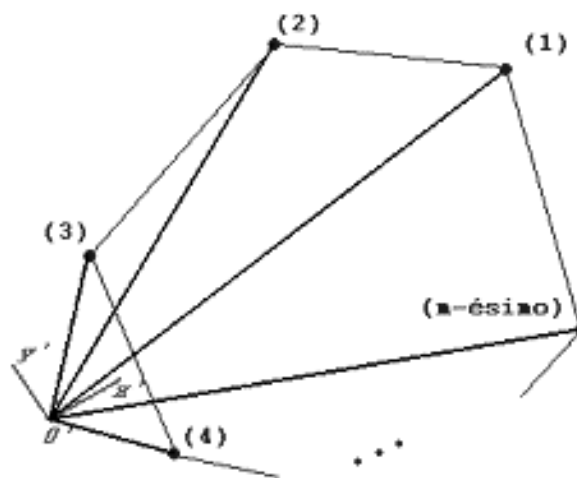


FIG. 2.4 – Posicionamento da plataforma exteriormente ao polígono de ancoragem

Tem-se que as colunas da Matriz de Estrutura de sistemas puramente translacionais⁵ com cabos inelásticos são dadas por vetores unitários na direção de aplicação das tensões sobre a

⁵ Sistemas puramente translacionais são caracterizados por plataformas pontuais.

plataforma⁶. Matematicamente, considerando os possíveis referenciais locais da plataforma, no caso apresentado na FIG. 2.4, a Matriz de Estrutura terá dimensão $[2 \times m]$ representando as componentes v_x e v_y de cada vetor. Se o produto dos elementos de cada linha for negativo, significa que há pelo menos uma componente positiva e uma negativa nas direções locais $0x'$ e $0y'$. Esta é uma condição necessária, mas não suficiente, para que o equilíbrio dinâmico da plataforma seja obtido somente pela tração nos cabos.

Em relação a manipuladores redundantes (VERHOEVEN, 2004) apresenta três razões para a utilização de sistemas RRPM que justificam seu custo computacional e principalmente o de fabricação:

- a) Inicialmente o espaço de trabalho pode ser expandido consideravelmente e singularidades observadas no sistema original podem ser eliminadas, além de aumentar a rigidez do sistema;
- b) Atuadores de menor potência podem ser empregados, ocorrendo a redistribuição de cargas nos pontos de ancoragem e novas configurações geométricas, mais vantajosas, podem ser alcançadas
- c) Particularmente, em aplicações onde a segurança seja primordial, como por exemplo resgates e montagem em áreas de desmoronamentos, transporte de pessoal e cargas perigosas, o risco operacional é reduzido e aumenta-se a capacidade de emprego do sistema.

Conforme foi dito na introdução, o interesse em estudar manipuladores com cabos redundantes reside no fato de que sete cabos, segundo a classificação CRPM para seis graus de liberdade, podem não ser suficientes para atingir os objetivos de projeto. Um destes objetivos é o espaço de trabalho, que pode ser consideravelmente restringido devido a ausência de pontos de ancoragem em posições chaves ou pela aplicação de esforços em direções onde os cabos existentes sejam pouco efetivos.

⁶ Plataformas pontuais não exercem momento. Ver EQ 3.1 e 3.5.

2.2.2 QUANTO AOS GRAUS DE LIBERDADE

(VERHOEVEN, 2004) propõe a seguinte classificação:

TAB 2.1 – Classificação do manipulador quanto ao número de graus de liberdade

Graus de liberdade	Qtd G.L.	Tipo de movimento
1T	1	Movimento linear do corpo
2T	2	Movimento plano do ponto
2T1R	3	Movimento plano do corpo
3T	4	Movimento espacial do ponto
3T2R	5	Movimento espacial da barra
3T3R	6	Movimento espacial do corpo

VERHOEVEN, 2004

A FIG. 2.5 apresenta exemplos de manipuladores, segundo o número de graus de liberdade, para a configuração CPRM, onde o número de cabos é determinado por $m=n+1$, representando a quantidade mínima de cabos para que o sistema não dependa de um esforço externo para ser controlável.

Os graus de liberdade são apresentados de acordo com a TAB. 2.1 e as posições dos pontos de ancoragem representadas pelos atuadores são meramente ilustrativos.

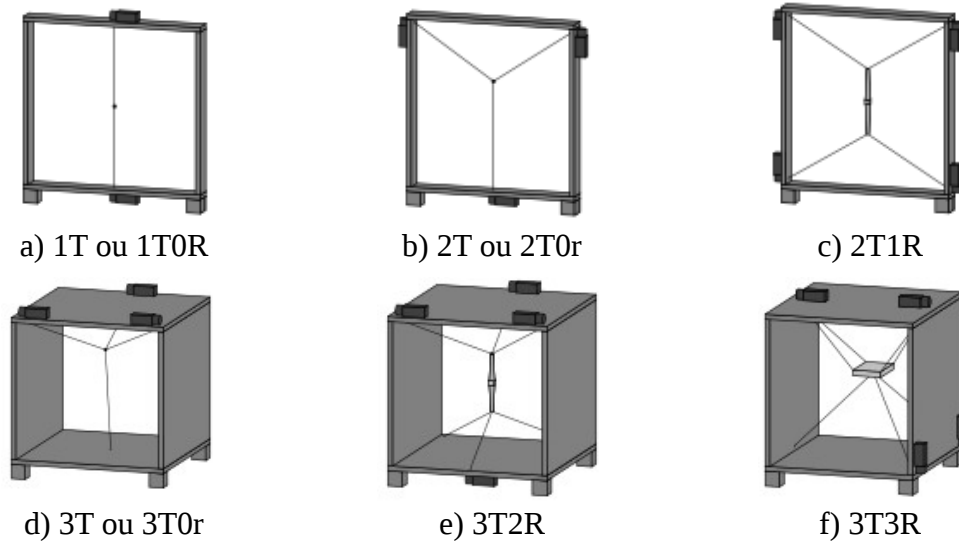


FIG. 2.5 – Manipuladores CPRM segundo a classificação por Nr de graus de liberdade (VERHOEVEN, 2004)

Basicamente, este trabalho se inicia com o estudo de plataformas 2T (ou 2T0R) e 2T1R caracterizando o caso plano. Inicialmente são estudados casos onde a massa dos cabos e da plataforma são considerados nulos, tendo-se então a solução homogênea. Analisado o caso homogêneo parte-se para o estudo de manipuladores com solução não-homogênea em que somente a plataforma possui massa não-nula. Em seguida são estudados os casos 3T e 3T3R, também para sistemas de solução homogêneos e não-homogêneos.

Por fim analisam-se manipuladores onde a massa dos cabos e da plataforma são relevantes. Todo equacionamento apresentado ao final deste trabalho é desenvolvido para o caso 3T3R, contudo generalista o suficiente para ser utilizado em qualquer configuração.

3 MODELO MATEMÁTICO

Neste capítulo é apresentado o modelo matemático da plataforma, segundo (VERHOEVEN, 1998) e (OH E AGRAWAL, 2005), para manipuladores com cabos elásticos e sem massa.

No entanto este trabalho é voltado para o desenvolvimento do modelo dinâmico de manipuladores paralelos acionados por cabos elásticos e de massa não-nula.

Desta forma, a solução do problema objetivo deste trabalho, é obtida por meio de um sistema não-linear, em função dos parâmetros que definem o cabo em catenária, dentre eles o peso do cabo por unidade de comprimento, a tração aplicada, a distância entre os pontos de fixação e ancoragem, e tendo como condição inicial a solução de forças para TBPMs conforme descritas nos trabalhos citados. O método de solução para manipuladores com cabos de massa não-nula será apresentado na Seção 6.6.

Voltando a definição do problema, basicamente toda a análise de plataformas atuadas por cabos recai em um problema de determinação do espaço de trabalho segundo:

- a) Geometria da base e da plataforma;
- b) Limites de forças e elasticidade dos cabos; e,
- c) Forças generalizadas aplicadas à plataforma.

Considerando que para dada posição e orientação desejadas, o problema possua solução, estes dados fornecerão a distribuição de forças trativas nos cabos, e diz-se que esta posição pertence ao *Espaço de Trabalho Controlável*.

Na FIG. 3.1 é apresentado um caso geral de Plataforma de Stewart acionada por cabos com os principais elementos necessários a obtenção do modelo dinâmico. Todos os entes geométricos da plataforma estão representados nesta figura.

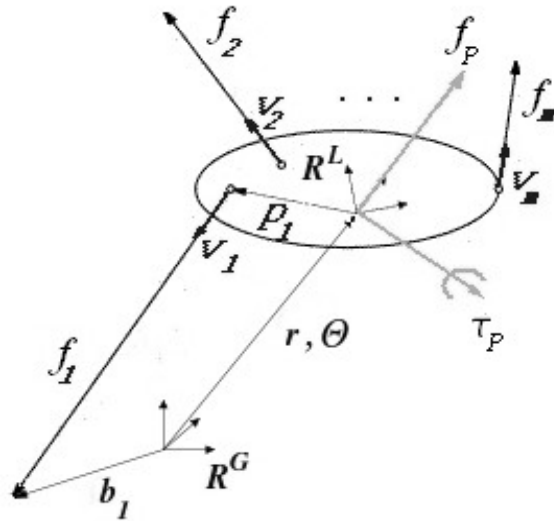


FIG. 3.1 - Modelo geral de uma plataforma acionada por cabos (VERHOEVEN, 1998)

Para os m cabos apresentados:

- R^L e R^G representam, respectivamente, o referencial local, fixo a plataforma, e global, fixo na estrutura de ancoragem;
- b_1 a b_m representam os vetores pontos de ancoragem dos cabos na estrutura em relação ao referencial R^G ;
- p_1 a p_m representam os vetores pontos de fixação dos cabos na plataforma;
- r e Θ representam a posição e orientação de R^L em relação a R^G ; e,
- l_1 a l_m representam os vetores comprimento de cabo, de cada ponto de fixação a seu respectivo ponto de ancoragem. Deve-se ter em mente que a representação geométrica dos cabos por meio de vetores, considera-os como retilíneos, inelásticos e de massa nula.

Levando em conta a FIG. 3.1, o desenvolvimento da base teórica para o modelo matemático considera que:

- a) Todos os cabos estão conectados a plataforma por meio de juntas esféricas ideais;
- b) A plataforma e estrutura de ancoragem são corpos rígidos;
- c) Não há colisão entre dois ou mais cabos quaisquer, em qualquer posição do espaço de trabalho.

Em relação a última consideração, (VERHOEVEN, 2004) propõe que: “*Se dois cabos são conectados no mesmo ponto da base ou da plataforma, nunca irão colidir*”.

As ilustrações abaixo apresentam exemplos de configuração de manipulador tais que não apresente auto-colisão de cabos.



a) pontos de fixação e/ou ancoragem coincidentes

b) cabos em planos paralelos

FIG. 3.2 - Técnicas para se evitar colisões entre cabos (VERHOEVEN, 2004)

Na FIG. 3.2 a) é ilustrado o caso de coincidência de pontos de fixação ou ancoragem e na FIG. 3.2 b) é apresentada o caso onde os cabos estão localizados em planos paralelos e, em princípio, a plataforma não se mova transversalmente a estes planos.

Ainda de acordo com a proposição de (VERHOEVEN, 2004), uma plataforma pontual nunca apresentará colisão de cabos, pois todos os cabos estarão ligados ao mesmo ponto de fixação.

3.1 EQUILÍBRIO DE FORÇAS E CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS

Baseada na FIG. 3.1, a FIG. 3.3 apresenta o modelo geral da plataforma da Stewart acionada por cabos onde as forças aplicadas sobre a plataforma são indicadas por f_p e os torques aplicados por τ_p . Os vetores f_1, \dots, f_m indicam as forças trativas exercidas pelos m cabos sobre a plataforma nos pontos de fixação.

Inicialmente considera-se os cabos como retilíneos, inelásticos e de massa nula, e que a direção de aplicação das trações sobre a plataforma é representada diretamente pela direção do cabo, dada pelos pontos de fixação e ancoragem.

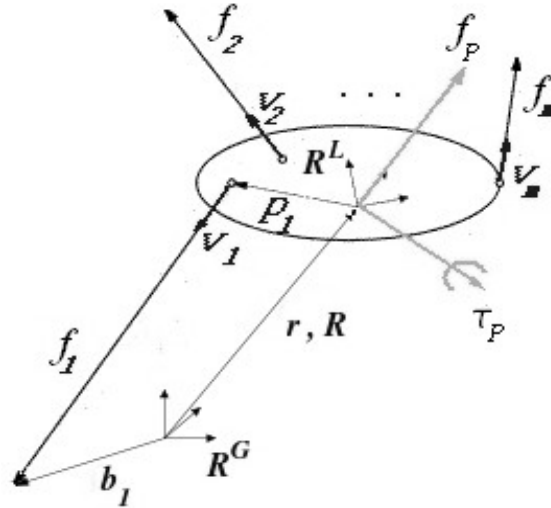


FIG. 3.3 - Forças aplicadas sobre a plataforma

O vetor comprimento de cabo para o i -ésimo cabo l_i fornece a direção na qual o cabo exerce tração sobre a plataforma por meio do vetor unitário de comprimento de cabo v_i , onde:

$$v_i = \frac{l_i}{\|l_i\|} \quad (3.1)$$

De acordo com o modelo dinâmico para manipuladores com cabos elásticos e de massa nula apresentado por (VERHOEVEN, 2004; FANG, 2005; BRUCKMAN et al, 2008 e MIKELSON et al, 2008) o problema de *Equilíbrio de Forças e Momentos* dado por:

$$\left(\sum_{i=1}^m f_i \right) + f_p = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

e

$$\left(\sum_{i=1}^m (p_i \times f_i) \right) + \tau_p = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

Sabe-se que a força de tração no i -ésimo cabo é aplicada segundo a direção v_i , logo:

$$f_i = f_i \cdot v_i \quad (3.4)$$

Onde f_i é o escalar que representa o modulo da força aplicada sobre o i -ésimo cabo. Utilizando os índices m e n , as EQ. 3.2 e 3.3 podem ser escritas na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_m \\ \mathbf{p}_1 \times \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{p}_m \times \mathbf{v}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p \\ \mathbf{q}_p \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

E este sistema é frequentemente abreviado para:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{f} + \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

\mathbf{A}^T representa a Matriz de Estrutura do problema, e \mathbf{f} vetor das m forças trativas sobre a plataforma nos pontos de fixação. (OU, 1994) e (VERHOEVEN, 2004) apresentam maiores esclarecimentos sobre o sistema $\mathbf{A}^T \mathbf{f} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$ e a teoria em torno da Matriz de Estrutura.

Como trata-se de um sistema acionado por cabos, deve-se verificar sempre que todas as tensões sejam positivas e delimitadas por trações máximas e mínimas, de acordo com as características de projeto, segundo as EQ. 3.7 e 3.8.

$$f_i > 0, \text{ para todo } i=1, \dots, m. \quad (3.7)$$

$$F_{min} \leq \| \mathbf{f}_i \| \leq f_{max}, \text{ para todo } i=1, \dots, m \text{ e em qualquer ponto do cabo.} \quad (3.8)$$

Em geral o sistema é representado pelas EQ. 3.6 e 3.8 que são as *Equações Básicas de Solução do Sistema*. A condição imposta pela EQ. 3.8 ocorre devido a tração variar ao longo do comprimento do cabo, quando este possui massa não nula.

3.2 CINEMÁTICA INVERSA

A cinemática e a dinâmica inversa de manipuladores paralelos acionados por cabos já são extensamente conhecidas e não é o objetivo deste trabalho detalha-la aqui. Nesta seção e na

próxima as equações principais da cinemática e da dinâmica inversa da Plataforma de Stewart acionada por cabos serão apresentadas de maneira sucinta. Maiores detalhes podem ser encontrados em (FANG, 2005; BRUCKMAN et al, 2008; e TRAVI, 2009).

A cinemática inversa refere-se ao problema de calcular as variáveis de junta, neste caso o comprimento de cabo, dadas a posição e orientação da plataforma. O mesmo se aplica a suas derivadas. Neste ponto poderia ser utilizada ainda a cinemática direta, no entanto devido ao objetivo final do trabalho requerer cabos em catenária, este método se torna ineficiente.

A postura da plataforma é dada pela posição $\mathbf{r} = [x \ y \ z]$ e orientação $\Theta = [\psi \ \vartheta \ \varphi]$, segundo a seqüência de rotação tridimensional ZYX, de \mathbf{R}^L em \mathbf{R}^G nos seis graus de liberdade e é representada pelo vetor $\mathbf{x} = [\mathbf{r}^T \ \Theta^T]^T$, onde:

- o ângulo ψ representa a rotação em torno do eixo z;
- o ângulo ϑ , a rotação em torno do eixo y; e,
- o ângulo φ , a rotação em torno do eixo x.

A cinemática inversa do manipulador paralelo acionado por cabos é dada pelas m equações de restrição:

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{b}_i - \mathbf{r} - \mathbf{R}_p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}_{j,L}, \quad \text{para } i=1, \dots, m \quad (3.9)$$

para sistemas que considerem a massa dos cabos nula, em função da posição e orientação da plataforma com respeito ao referencial \mathbf{R}^G . Deve-se atentar, na EQ. 3.9, que $\mathbf{p}_{j,L}$ é constante em \mathbf{R}^L para os j pontos de fixação da plataforma.

Sendo \mathbf{l}_i o vetor comprimento de cabo do i -ésimo cabo, pode-se definir o vetor \mathbf{q} como sendo o vetor modulo de comprimento de cabo, onde:

$$q_i = \|\mathbf{l}_i\| \quad (3.10)$$

Assim para uma trajetória $\mathbf{x}(t)$, $q_i(t)$ representa a curva de comprimento do i -ésimo cabo em relação ao tempo.

A matriz de rotação $R_p(\mathbf{x})$ obtida pela seqüência de rotação tridimensional ZYX é dada por:

$$R_p(\vec{x}) = \begin{bmatrix} C\psi C\vartheta & C\psi S\vartheta S\varphi - S\psi C\varphi & C\psi S\vartheta C\varphi + S\psi S\varphi \\ S\psi C\vartheta & S\psi S\vartheta S\varphi + C\psi C\varphi & S\psi S\vartheta C\varphi - C\psi S\varphi \\ -S\vartheta & C\vartheta S\varphi & C\vartheta C\varphi \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

onde C e S são abreviações para cosseno e seno, respectivamente. A demonstração da matriz de rotação se encontra no APÊNDICE 2.

As EQ. 3.9 e 3.10 descrevem o vetor modulo do comprimento de cabo como uma função vetorial da posição. Desta forma, \mathbf{q} pode ser representado pela função vetorial Φ_x como:

$$\mathbf{q} = \Phi_x(\mathbf{x}) \quad (3.12)$$

Derivando a EQ. 3.12 obtém-se o vetor velocidade dos cabos dada pela EQ. 3.13. Como a EQ. 3.12 é uma função vetorial, sua derivada resulta no Jacobiano de $\Phi_x(\mathbf{x})$. A aceleração dos cabos é dada pela EQ. 3.14:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_x \cdot \dot{\mathbf{x}}, \text{ onde } \mathbf{J}_x = \frac{\partial \Phi_x}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.13)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_x \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{J}}_x \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (3.14)$$

De acordo com a EQ. 3.13, a velocidade dos cabos é função da derivada temporal dos ângulos de Cardan, porem como estes não são variáveis integráveis nem representáveis no \mathbf{R}^3 , devem ser transformados em velocidades angulares da plataformas em relação à \mathbf{R}^G , conforme a EQ. 3.15:

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T \quad (3.15)$$

(FANG, 2005) define esta transformação linear por meio da matriz \mathbf{H}_b^{-1} como:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{H}_b^{-1} \dot{\boldsymbol{\eta}} \quad (3.16)$$

onde:

$$\mathbf{H}_b^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -S\eta & C\eta & C\eta \\ 0 & C\eta & S\eta & C\eta \\ 1 & 0 & -S\eta & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \dot{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \\ \dot{\eta}_4 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Aplicando as EQ. 3.13, 3.16 e 3.17, e pelo princípio dos trabalho virtuais, obtém-se o vetor velocidade de cabos. Esta transformação também é descrita em (FANG, 2005).

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{H}_b^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_p \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

onde \mathbf{A} é a transposta da Matriz de Estrutura \mathbf{A}^T .

3.3 DINÂMICA INVERSA

Analisando agora a FIG. 3.3 quanto ao equilíbrio dinâmico e utilizando as Leis de Newton-Euler para o caso geral 3T3R, tem-se:

$$\begin{cases} m_p \ddot{\mathbf{r}}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_p g \end{bmatrix} + \mathbf{f}_p \\ \mathbf{I}^G \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\tau}_p \end{cases} \quad (3.19)$$

Onde:

- m_p é a massa da plataforma;
- \mathbf{r}_p é o vetor posição da plataforma em \mathbf{R}^G ;
- \mathbf{I}^G é o tensor de inércia definido em \mathbf{R}^G em função dos ângulos de rotação;
- $\boldsymbol{\omega}$ é o vetor de velocidades angulares em \mathbf{R}^G

Aqui deve ser observado que \mathbf{I}^G representa o tensor de inércia da plataforma em relação ao referencial global \mathbf{R}^G , contudo na equação do modelo dinâmico será descrito em função do tensor de inércia em relação ao referencial local \mathbf{R}^L , pois este é constante independentemente da posição e orientação da plataforma.

Sabe-se, da EQ. 3.6, que $\mathbf{w} = [\mathbf{f}_p^T \ \boldsymbol{\tau}_p^T]^T$. Aplicando as EQ. 3.16 e 3.17 e suas derivadas na EQ. 3.19, obtém-se a *Equação do Movimento* proposta por (FANG, 2005) para a dinâmica da plataforma, expresso pela EQ. 3.20:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_p \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{H}_b^{-T} \mathbf{I}^L \mathbf{H}_b^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{x}}} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_p \\ \ddot{\boldsymbol{\Theta}} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_b^{-T} \mathbf{H}_b^{-1} \dot{\boldsymbol{\Theta}} \times (\mathbf{I}^L \mathbf{H}_b^{-1} \dot{\boldsymbol{\Theta}}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}^C} - \underbrace{\begin{bmatrix} m_p \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}^E} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{H}_b^{-T} \end{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{f} \quad (3.20)$$

Onde, nesta equação:

- \mathbf{I}_3 indica a matriz identidade 3x3 e \mathbf{I}^L representa o tensor de inércia da plataforma em relação ao referencial local \mathbf{R}^L ;
- \mathbf{M}_p é a matriz de massa;
- \mathbf{g}^C corresponde ao termo de coriolis; e,
- \mathbf{g}^E corresponde ao vetor de forças externas aplicadas sobre a plataforma, neste caso representada somente pela *força peso*.

As matrizes acima são apresentadas de forma explicita, segundo apresentado em (FANG, 2005) no ANEXO 5.

Reorganizando a EQ. 3.20, esta pode ser escrita na forma da *Equação básica do problema*:

$$A^T f - \underbrace{\begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & (\mathbf{H}_b^{-T})^{-1} \end{bmatrix}}_{-\mathbf{w}} (M_p \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}_C - \mathbf{g}_E) = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

Assim é possível obter os esforços externos, à partir da *Equação de Movimento da Plataforma*.

Apresentadas as *Equações Básicas de Solução do Sistema e a Equação de Movimento*, é possível demonstrar a possibilidade de comportamento IRPM por qualquer tipo de plataforma segundo proposição de (VERHOEVEN, 1998) citada no item 2.2.1: “*Para qualquer referencial local da plataforma, a Matriz de Estrutura deve conter, em cada linha, pelo menos um elemento negativo*”.

Calculando-se os produtos escalares $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{e}_i$, onde \mathbf{e}_i são os vetores ortonormais de \mathbf{R}^L , para qualquer referencial local na plataforma, e não havendo pelo menos um produto $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{e}_i < 0$, tem-se que, nesta posição, não existem cabos em direções suficientes para estabilizar a plataforma e a aplicação de uma força externa na direção conveniente se torna necessária.

Outra demonstração pode ser obtida da seguinte forma:

“*Manipuladores CPRM e RRPM, por definição, não dependem da aplicação de forças externas para o equilíbrio dinâmico, logo se para $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ em determinada posição \mathbf{x} pertencente ao espaço de trabalho controlável não exista nenhum $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{e}_i < 0$ para $\mathbf{i} = 1, \dots, \mathbf{m}$, então necessariamente o manipulador é classificado como IRPM*”.

4 ANÁLISE DO ESPAÇO DE TRABALHO

A análise do espaço de trabalho é uma das tarefas primordiais no estudo de plataformas acionadas por cabos. Para a definição do problema são necessários:

- a) A geometria da plataforma e dos pontos de ancoragem;
- b) Os limites mínimo e máximo de forças nos cabos; e,
- c) As forças externas aplicadas na plataforma;

A partir destes dados se torna possível determinar a região na qual a plataforma pode ser empregada e analisar aspectos do espaço de trabalho como:

- a) forças nos cabos;
- b) presença de singularidade;
- c) rigidez do sistema; e,
- d) auto-colisões de cabos.

(BRUCKMANN et al, 2008) dividem este tópico em duas etapas complementares para o projeto. Define-se como *Análise do Espaço de Trabalho (Analysis)* a obtenção do conjunto de posições e orientações (posturas) nas quais as *Equações Básicas de Solução do Sistema*, definidas pelas EQ. 3.6 e 3.8 possuam solução para a distribuição de forças \mathbf{f} , e define como *Síntese (Robot Design)* o problema inverso de determinação do manipulador ótimo capaz de atender determinado espaço de trabalho pré-determinado.

Basicamente existem quatro definições de Espaço de Trabalho.

a) (VERHOEVEN, 1998) define o *Espaço de Trabalho (WS)* como sendo o conjunto de posturas da plataforma que satisfazem as EQs. 3.6 e 3.7, tal que para dado espaço vetorial de esforços $\mathbf{W}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Theta})$, esta possa exercer qualquer esforço $\mathbf{w} \in \mathbf{W}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Theta})$. Verifica-se que esta definição não atende as *Equações Básicas de Solução do Sistema*, por não atender a EQ. 3.8.

b) Ainda em (VERHOEVEN, 1998) é definido o *Espaço de Trabalho com Respeito às Tensões* ($WST(k_{max})$) como sendo o conjunto de todas as posições do Espaço de Trabalho que satisfazem as EQs. 3.6 e 3.8, tais que $k_{max} = f_{max} / f_{min}$, $0 < f_{min} < f_{max}$, e $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. No caso em que $WST(1)$ este espaço é chamado *Espaço de Trabalho Isotrópico*.

c) (VERHOEVEN, 2004) define o *Espaço de Trabalho Controlável* e (FANG, 2005) define o *Espaço de Trabalho Controlável Aceitável* como sendo o conjunto de todas as posições que satisfazem as EQs. 3.6 e 3.8 e nas quais a plataforma seja capaz de exercer esforços e apresentar os graus de liberdade desejados. Logo o *Espaço de Trabalho Controlável* de (VERHOEVEN, 2004) é função da aplicação a que a plataforma estará sujeita.

d) Por último, (FANG, 2005) define o *Espaço de Trabalho Controlável Usável* como sendo o conjunto de todas as posições pertencentes ao *Espaço de Trabalho Controlável*, onde para determinados limites de torque nos atuadores U_{min} e U_{max} possa-se atender as EQs. 3.6, 3.7 e 3.8, e a condição $U_{min} < U < U_{max}$

Quanto as definições citadas acima podem ser feitas as seguintes considerações:

a) O Espaço de Trabalho com Respeito às Tensões se aplica somente ao caso de carregamento homogêneo sobre a plataforma;

b) Nos Espaços de Trabalho definidos por (VERHOEVEN, 2004) e (FANG, 2005) deve-se atender as Equações Básicas do problema para dados \mathbf{x} , \mathbf{w} , f_{min} e f_{max} ;

c) O espaço de trabalho definido pelos limites mínimos e máximos de torques propostos por (FANG, 2005), constitui-se no estudo mais completo da Plataforma de Stewart acionada por cabos dentre as quatro definições apresentadas; e,

d) Esta Dissertação baseia seu estudo no *Espaço de Trabalho Controlável* de (VERHOEVEN, 2004) e irá referir-se a ele simplesmente como “espaço de trabalho”.

São requisitos do espaço de trabalho que:

a) A plataforma seja controlável;

b) As tensões sejam todas positivas e pertencentes ao intervalo definido;

c) O atuador final seja livre de singularidades;

d) A estrutura do sistema seja suficientemente rígida; e,

e) Não hajam auto-colisões entre tendões.

No entanto verifica-se que o atendimento a estes requisitos reduz consideravelmente o espaço de trabalho, podendo ser inferior a de um manipulador serial. Logo as vantagens de utilização deste tipo de sistema devem estar claras na fase inicial do projeto.

Dentre os requisitos citados, os que mais contribuem para a redução do espaço de trabalho são:

- a) A controlabilidade da plataforma nos graus de liberdade necessários a aplicação; e,
- b) Os limites de força nos cabos, definidos pelo fabricante e por critérios de segurança.

(FANG, 2005) em sua definição de “*Espaço de Trabalho Controlável Aceitável*” demonstra que a controlabilidade da plataforma reduz-se a medida que esta se aproxima do limite do espaço de trabalho e que a orientação da plataforma é função do espaço de trabalho controlável.

Verifica-se também que ao se mover a plataforma para próximo do limite do espaço de trabalho, as tensões nos cabos vão se aproximando de seus limites, o que reduz gradativamente sua capacidade de emprego.

A partir do conceito de espaço de trabalho é possível apresentar as características principais de manipuladores seriais e paralelos, e ratificar a afirmação de que manipuladores seriais são inadequados ao objetivo deste trabalho.

Uma definição do comportamento de manipuladores seriais e paralelos é dada segundo (VERHOEVEN, 2004). Para ele, o comportamento tradicional de manipuladores **seriais** é descrito em termos de mobilidade, devido ao objetivo principal de um manipulador serial ser a habilidade do atuador final **se mover** em determinada direção de interesse, em todo o *Espaço de Trabalho*, sem que os limites de junta sejam exercidos. Em contrapartida, sistemas **paralelos** são tipicamente descritos em termos de controlabilidade, que é a habilidade de **exercer esforços** em determinada direção de interesse.

Supondo que o espaço de trabalho desejado permita uso de manipuladores seriais, caso sua utilização não preservaria os limites de junta em posturas próximas dos limites do espaço de trabalho, principalmente quanto a esforços aplicados sobre o mecanismo. O mesmo problema seria verificado em manipuladores paralelos com atuadores rígidos.

A FIG. 4.1 ilustra o *Espaço de Trabalho Controlável Aceitável* para o SEGESTA, apresentado por (FANG, 2005).

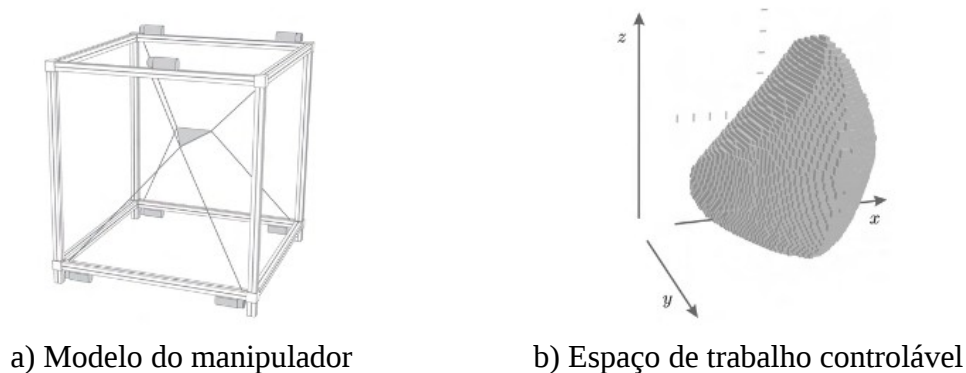


FIG. 4.1 – Espaço de trabalho definido por (FANG, 2005) para o SEGESTA (BRUCKMANN et al, 2008)

4.1 SINGULARIDADES

Singularidades do sistema são função da configuração do manipulador. (VERHOEVEN, 1998) classifica a singularidade de manipuladores paralelos em dois tipos:

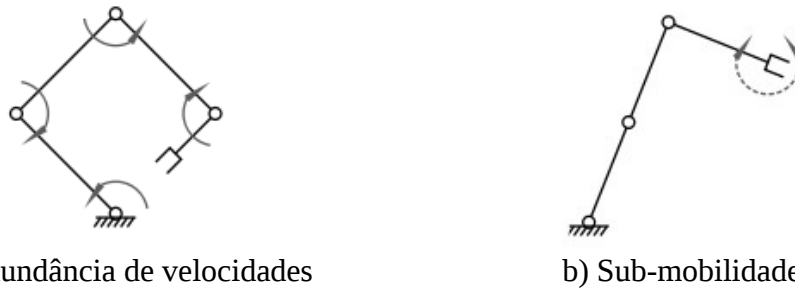
a) Tipo I (*Sub-mobilidade ou Redundância de velocidade*): situação em que há determinado deslocamento infinitesimal δx do atuador que não pode ser afetado por uma variação infinitesimal δI das juntas; e,

b) Tipo II (*Sobre-mobilidade ou Redundância de Forças*): situação em que há um deslocamento δx que não altera nenhuma variável de junta I .

(VERHOEVEN, 1998) propõe ainda que plataformas de Stewart acionadas por cabos nunca serão singulares do Tipo I, pois todo movimento de cabo implica em movimento da plataforma, e que uma singularidade do Tipo II poderá ir ocorrer se $Posto(A^T) < n$.

A seguir são apresentadas duas figuras que ilustram os casos de sub-mobilidade e sobre-mobilidade. Como não se verifica um caso de singularidade do Tipo I ou sub-mobilidade em manipuladores paralelos, esta é apresentada em manipuladores seriais com atuadores rígidos e

em seguida é apresentado o caso de singularidade do Tipo II ou Sobre-Mobilidade em manipuladores paralelos atuados por cabos.

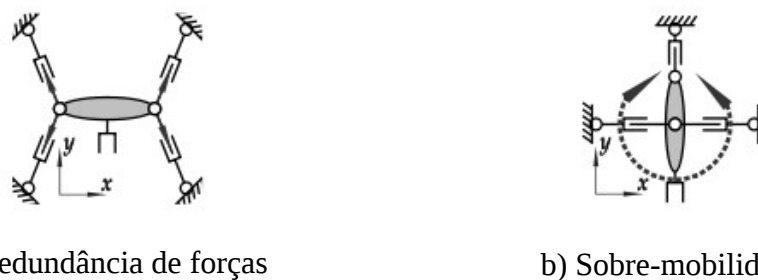


a) Redundância de velocidades
b) Sub-mobilidade
FIG. 4.2 – Singularidade do Tipo I ou Sub-mobilidade (VERHOEVEN, 2004)

Na FIG. 4.2 a) verifica-se que há uma posição no espaço de juntas, nas quais a velocidade não afeta a posição do atuador final, caracterizando a redundância de velocidades, e em b) verifica-se que não há solução no espaço de junta que exerça o movimento rotacional desejado no atuador final.

Ao contrário do ilustrado na FIG. 4.2, em manipuladores paralelos acionados por cabos, caso a posição pertença ao Espaço de Trabalho Controlável, qualquer variação de comprimento de cabo afetará a posição da plataforma, não sendo possível verificar singularidades do Tipo I nestes sistemas.

Analisando agora a FIG. 4.3 tem-se:



a) Redundância de forças
b) Sobre-mobilidade
FIG. 4.3 – Singularidade do Tipo II ou Sobre-Mobilidade (VERHOEVEN, 2004)

A FIG. 4.3 a) representa uma situação em que a resultante das forças exercidas pelos atuadores não permitem a plataforma exercer esforços, caracterizando a redundância de forças, e em b) não é possível que a plataforma realize o movimento de rotação ou exerça

torques para a posição e pontos de ancoragem dados. Logo verifica-se que determinados casos caracterizam singularidades do Tipo II em manipuladores paralelos.

(VERHOEVEN, 2004) define o conceito de *mobilidade* como a relação entre o movimento dos atuadores e da plataforma, e (FANG, 2005) define o conceito de *manipulabilidade* (M) como a razão entre a menor e maior tensões nos cabos para determinada postura e orientação pertencentes ao Espaço de Trabalho Controlável.

Analisando o conceito de *manipulabilidade* de (FANG, 2005) é possível verificar que a plataforma perde graus de liberdade a medida que M aumenta ou que esta se aproxime do limite do Espaço de Trabalho Controlável. Nesta situação as forças se aproximam dos limites máximos e mínimos, não sendo possível controlar a plataforma. (FANG, 2005) define ainda uma região de obtenção das forças nos cabos, em espaço vetorial distinto da solução, chamada região admissível (ou região viável como será vista adiante). Esta região diminui gradativamente, até que em qualquer posição do limite do espaço de trabalho se torna pontual e a manipulabilidade atinge seu valor mínimo, correspondente a razão entre f_{min} e f_{max} . Assim tem-se que $f_{min}/f_{max} < M < 1$.

4.2 RIGIDEZ DO SISTEMA

Manipuladores paralelos acionados por cabos são sistemas consideravelmente mais flexíveis e leves que os manipuladores com atuadores rígidos. Por este fato, um manipulador atuado por cabos requer uma rigidez mínima do sistema para que seja efetivo, evitando efeitos indesejáveis devido a inercia do sistema, tais como perda da posição e vibração.

A rigidez passiva é definida por (VERHOEVEN, 2004) como o comportamento do sistema mecânico sujeito a um esforço infinitesimal δw , quando não há resposta ativa gerada pelos atuadores, e seu entendimento constitui-se na base de estratégias de controle da rigidez ativa, que é o mecanismo responsável por manter o sistema adequadamente tensionado.

Aplicando um esforço $\delta \mathbf{w}$ sobre a plataforma, obtêm-se um deslocamento $\delta \mathbf{x}$ no espaço operacional segundo a relação linear dada pela Lei de Hooke para o sistema:

$$\delta \mathbf{w} = [\mathbf{K}(x)]_{[n,m]} \delta \mathbf{x} \quad (4.1)$$

Aplicando a Lei de Hooke para o espaço de juntas, obtêm-se a relação entre a deformação longitudinal do cabo e a tração resultante:

$$\delta \mathbf{f} = \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_m \end{bmatrix} \delta \mathbf{l} \quad (4.2)$$

$$k_i = \frac{Ar_i \cdot E_i}{L_{0,i}} \quad (4.3)$$

onde tem-se para o i -ésimo cabo: k_i a rigidez, Ar a área nominal de referência, dada pelo fabricante, E é o módulo de elasticidade efetivo do cabo e L_0 seu comprimento inicial quando da aplicação da força.

Sabe-se, da EQ. 3.6, que para um esforço aplicado sobre a plataforma, $\mathbf{A}^T \delta \mathbf{f} = \delta \mathbf{w}$, e pode-se deduzir da EQ. 3.18 que $\delta \mathbf{l} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x}$. Por meio das expressões acima, obtém-se a *Matriz de Rigidez do Sistema*, necessária à EQ. 4.1.

$$\delta \mathbf{w} = \mathbf{A}^T \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_m \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}]} \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{x} \quad (4.4)$$

$$[\mathbf{K}] = \mathbf{A}^T \cdot \text{diag}(k_i) \cdot \mathbf{A} \quad (4.5)$$

A EQ. 4.5 representa a transformação linear que leva a rigidez do cabo em \mathbf{R}^L para a rigidez do sistema em \mathbf{R}^G , $[\mathbf{K}]$ representa a matriz de rigidez do sistema, define-se \mathbf{A} em \mathbf{R}^G e os deslocamentos angulares e torques são expressos de forma infinitesimal.

Os autovalores e autovetores da matriz $[\mathbf{K}]$ indicam a rigidez do sistema e suas respectivas direções principais no referencial global. Por este motivo a Matriz de Estrutura

deve estar no mesmo referencial. Como $\dim(\mathbf{K}) = [n \times n]$, as direções principais nas quais a rigidez é expressa são dadas para cada direção controlável da plataforma na posição em que se encontra.

A FIG. 4.4 ilustra o caso de dois manipuladores 2T0R.

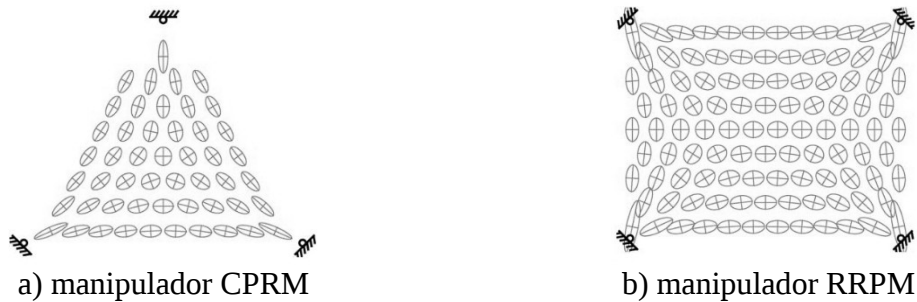


FIG. 4.4 - Rigidez para manipuladores 2T0R (HILLER et al ,2005)

Na FIG. 4.4, é possível visualizar a solução quanto a rigidez para cada posição analisada, representada pelo centro das elipses. O autor representou graficamente a rigidez da plataforma por meio do raio da elipse, indicando suas direções principais. Em um manipulador 3T0R a representação espacial se daria por elipsoides centrados nas posições desejadas da plataforma.

4.3 MÉTODO DE DETERMINAÇÃO DO ESPAÇO DE TRABALHO CONTROLÁVEL PARA MANIPULADORES COM CABOS DE MASSA NULA

Por definição, “Espaço de Trabalho Controlável é o conjunto de posições e orientações, tais que para cada esforço externo $\mathbf{w}(\mathbf{r}, \Theta) \in \mathbf{R}^n$ aplicado sobre a plataforma, existe uma distribuição de forças \mathbf{f} tal que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{f} + \mathbf{w} = \mathbf{0}, \text{ e } \mathbf{f} > \mathbf{0},$$

onde $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^m_+$ é dito uma solução positiva”

Esta definição atende as EQ. 3.6 e 3.7, e o problema da rigidez obriga o sistema a atender a EQ. 3.8. Logo as *Equações Básicas* são atendidas, e de acordo com a definição, verifica-se

que o *Espaço de Trabalho com Respeito as Tensões* está contido no *Espaço de Trabalho Controlável*.

Sendo assim, para a determinação do espaço de trabalho, deve-se determinar a solução da EQ. 3.6. O método de solução do problema para cabos de massa nula apresenta o cálculo de uma distribuição de forças que atendam as *Equações Básicas*. Esta distribuição de forças, representada por um vetor em \mathbf{R}^m chama-se de *forças viáveis*.

Sabe-se que a EQ. 3.6 representa um sistema indeterminado de equações lineares. Sua solução pertence ao espaço *r-dimensional* onde $r = m - n$. No caso homogêneo, em que $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, a EQ. 3.6 fica $\mathbf{A}^T \mathbf{f} = \mathbf{0}$. Desta forma, o vetor \mathbf{f} representa o núcleo da *Matriz de Estrutura* por ser o transformador linear que a leva ao *espaço nulo*.

Assim para o caso homogêneo tem-se a solução

$$\mathbf{f} = \mathbf{N}(\mathbf{A}^T) \cdot \boldsymbol{\lambda} \quad (4.6)$$

onde:

- $\mathbf{N}(\mathbf{A}^T)$ é o núcleo de \mathbf{A}^T e as colunas de $\mathbf{N}(\mathbf{A}^T)$ representam as bases do espaço nulo de \mathbf{A}^T ; e,
- $\boldsymbol{\lambda}$ representa o vetor de coordenadas que percorre este espaço.

Considerando os limites mínimo e máximo de tração, a solução da EQ. 4.6 restringe-se a:

$$f_{min} \leq \mathbf{N}(\mathbf{A}^T) \cdot \boldsymbol{\lambda} \leq f_{max} \quad (4.7)$$

ou pelo sistema

$$\begin{cases} \mathbf{N}(\mathbf{A}^T) \cdot \boldsymbol{\lambda} \geq f_{min} \\ \mathbf{N}(\mathbf{A}^T) \cdot \boldsymbol{\lambda} \leq f_{max} \end{cases} \quad (4.8)$$

Para o caso não-homogêneo, recorrendo-se a *pseudo-inversa de Moore-Penrose* da matriz \mathbf{A}^T , a distribuição de forças leva a EQ. 4.9:

$$\mathbf{f} = -\mathbf{A}^{+T} \mathbf{w} + \mathbf{N}(\mathbf{A}^T) \cdot \boldsymbol{\lambda} \quad (4.9)$$

Analogamente ao sistema da EQ. 4.8, para o caso não-homogêneo obtêm-se a EQ. 4.10 que é o *Sistema Geral de Inequações do Problema Linear*.

$$\begin{cases} N(A^T) \cdot \lambda \geq f_{min} + A^{+T} \cdot w \\ N(A^T) \cdot \lambda \leq f_{max} + A^{+T} \cdot w \end{cases} \quad (4.10)$$

O *Sistema de Inequações* da EQ. 4.10 possui $2m$ inequações e $m - n$ incógnitas. Assim, transformando as inequações em equações para f_{min} e f_{max} , todos os $C(2m, m-n)$ subsistemas de equações devem ser resolvidos em busca de soluções válidas para λ , que satisfaçam a EQ. 3.8 por meio da EQ. 4.9. As soluções válidas dos $C(2m, m-n)$ subsistemas indicam os $\lambda(s)$ limites, onde $dim(\lambda) = [m - n, 1]$, relativos aos limites de forças nos cabos.

Assim, a tarefa de encontrar uma distribuição de forças válidas nos cabos em um sistema indeterminado dá lugar ao problema de encontrar $\lambda \in R^n$ por meio de um sistema linear. De acordo com o que foi definido na Seção 2.1, isto caracteriza o problema ou caso linear.

Matematicamente, pela definição de núcleo de uma matriz, pode-se dizer ainda que a combinação linear das colunas de $N(A^T)$ sempre apresentará uma distribuição de forças que atenda a EQ. 3.6, contudo não necessariamente atenderá a EQ. 3.8.

Define-se como “*Região Viável Λ* ” a região delimitada pelos $\lambda(s)$ no R^n e de acordo com a solução do sistema obtido a partir da EQ. 4.10, tem-se que qualquer $\lambda \in \Lambda$ corresponde a uma solução válida.

Os limites de força nos m cabos, não necessariamente idênticos, podem ser representados por um *hipercubo m -dimensional* $C \subset R^m$, e todas as distribuições de força segundo EQ. 4.10 podem ser representadas por um *hiperplano r -dimensional* $S \subset R^m$ gerado por $N(A^T) \cdot \lambda$. Desta forma a intersecção $\Gamma = C \cap S$ representa a imagem da *Região Viável Λ* no hiper-cubo de forças segundo $\Gamma = N(A^T) \cdot \Lambda$.

Caso a intersecção Γ do hiper-cubo C com o subespaço S seja não-nula, esta representa a “*Solução aceitável ou Conjunto de soluções aceitáveis*” de forças no espaço R^m e existem soluções para f . Matematicamente, tem-se $\Gamma = C \cap S \neq \emptyset$. O método de solução é detalhado em (OH & AGRAWAL, 2005; e MIKELSONS et al, 2008).

A FIG. 4.5 apresenta como exemplo um manipulador RRPM 3m1T0R linear.

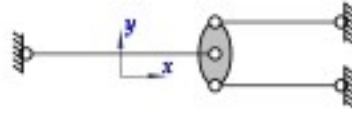


FIG. 4.5 – Manipulador 3m1T0R (VERHOEVEN, 2004)

A região viável e a transformação linear $\Gamma = N(A^T) \cdot \Lambda$ para este caso são apresentadas conforme a FIG. 4.6. Inicialmente verifica-se que $m = 3$, $n = 1$ e $r = m - n = 2$. O hiper-cubo $C \in \mathbf{R}^3$ representa os limites de forças nos 3 cabos e o hiperplano S indica o espaço vetorial gerado pela solução da EQ. 4.9 para todo λ . O espaço vetorial Λ de \mathbf{R}^2 é o espaço de redundâncias e a região Γ de S indica os valores de f que atendem simultaneamente as EQ. 3.8 e 4.9, e conseqüentemente 4.10.

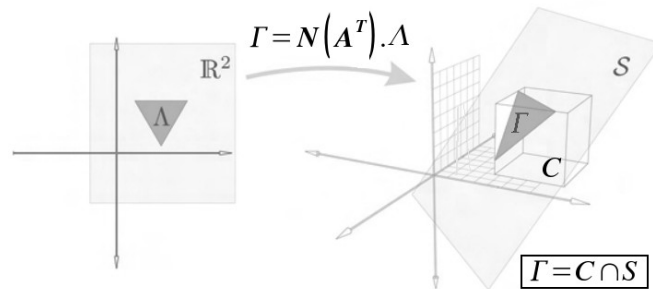


FIG. 4.6 – Região Viável e Λ e Transformação Linear $\Gamma = N(A^T) \cdot \Lambda$.
(BRUCKMAN et al, 2008)

Pode-se verificar também que a solução no espaço r -dimensional permite calcular várias distribuições de força com características diferentes. Segundo (KAWAMURA et al, 2000; e FANG, 2005) para movimentos rápidos, recomenda-se uma solução com as menores trações possíveis. Em aplicações que requerem alta rigidez, elevados são mais vantajosos. Embora o valor de f possa variar, a resultante de forças dos cabos sobre a plataforma não é alterada, satisfazendo assim a EQ. 3.6.

A solução do caso geral é obtida por meio das EQs. 4.9 e 4.10. Dados x , b , w , f_{min} e f_{max} , obtêm-se A^T , $N(A^T)$ e A^{+T} . Em seguida é obtido o conjunto de soluções do Sistema Geral de Inequações dado pela EQ. 4.10 em $\lambda_{[rx1]}$. Havendo solução para EQ. 4.10, são fornecidos os

$\lambda(\mathbf{s})$ limites da Região Viável Λ . Por fim, para obtenção dos valores de tração nos cabos $f \in [f_{min}, f_{max}]$ seleciona-se adequadamente $\lambda \in \Lambda$ e aplica-se na EQ. 4.9.

Em (VERHOEVEN, 2004; FANG, 2005; OH e AGRAWAL, 2005; BRUCKMANN et al, 2008; e MIKELSONS et al, 2008) são apresentadas técnicas de otimização para obtenção de $\lambda_{[rx1]}$.

4.4 DETERMINAÇÃO DE FORÇAS PELO MÉTODO DO BARICENTRO

(MIKELSONS et al, 2007) apresentam um algoritmo não-iterativo para obtenção de uma distribuição de forças contínuas, segundo o centro de gravidade (CoG ou baricentro) da região viável Λ .

Tem-se que o núcleo da *Matriz de Estrutura* define uma função $\gamma : \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^m$, para todo $\lambda \in \Lambda$, onde Λ é convexo, e a região Γ representa a imagem da *Região Viável* Λ sob a transformação $\lambda \rightarrow -\mathbf{A}^{+T} \mathbf{w} + \mathbf{N}(\mathbf{A}^T) \cdot \lambda$ no espaço de forças.

Para determinação do centro de gravidade da região viável, Λ é dividido em volumes *r-dimensionais*. Aplicando este método no exemplo apresentado pelas FIG. 4.5 e 4.6, onde $r = 2$, Λ é apenas dividido em triângulos.

A Triangulação fornece uma lista de n_s polígonos P_k cada um tendo $r+1$ vértices $v_{k,j}$ onde $k=1, \dots, n_s$ e $j=1, \dots, r+1$. Determina-se o baricentro da cada n-polígono, em função de seus vértices, separadamente pela EQ. 4.11

$$\lambda_{s_k,i} = \frac{1}{r+1} \left(\sum_{v=1}^{r+1} v_{k,v,i} \right), \quad 1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq k \leq n_s \quad (4.11)$$

Em seguida, o centro de gravidade λ_s da região viável é obtido pela EQ. 4.12. Os volumes V_k do podem ser determinados por integração.

$$\lambda_s^i = \frac{\sum_{k=1}^{n_s} (\lambda_{s_k, i} \cdot V_k)}{\sum_{k=1}^{n_s} V_k} \quad (4.11)$$

As trações nos cabos obtidas por este método chamam-se *Solução Segura* f_s é são calculadas por meio da transformação linear citada, apresentada na EQ. 4.12.

$$f_s = -A^{+T} w + N(A^T) \cdot \lambda_s \quad (4.12)$$

Esta solução se caracteriza por f_s estar o centro de gravidade da superfície T .

Desta forma, (MIKELSONS et al, 2008) fornecem o detalhamento do equacionamento completo, sua demonstração e um exemplo claro de obtenção de forças pelo método do baricentro em comparação com o método de otimização por forças mínimas.

5 ESTUDO DE CASO DE MANIPULADORES DE CABOS COM MASSA NULA

Neste capítulo são apresentados exemplos de manipuladores CRPM e RRPM, ambos com solução homogênea e não homogênea, para diferentes massas da plataforma e limites de forças nos cabos. Embora a solução homogênea tenha sido demonstrada por meio das EQ. 4.6 e 4.8, todos os casos apresentados serão resolvidos pelas EQ. 4.9 e 4.10 por se tratar do caso mais geral.

5.1 SOLUÇÃO HOMOGÊNEA

Define-se como homogêneo o caso em que o manipulador não sofra carregamentos externos, ou do próprio peso. Matematicamente tem-se $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Para a análise da solução homogênea, são apresentados os casos planos CPRM 3m2T0R e RRPM 4m2T0R. Por convenção, todos os índices utilizados são orientados no sentido anti-horário, iniciando na direção $(1,0)$, o que facilita a compreensão do problema.

Dada a geometria da base \mathbf{b} , os limites de força como $f_{min}=1,0N$ e $f_{max}=5,0N$, e a posição da plataforma $\mathbf{x}=[6,6]$ obtêm-se \mathbf{A}^T em \mathbf{R}^G e $\mathbf{N}(\mathbf{A}^T)$. Para o caso 3m2T0R tem-se:

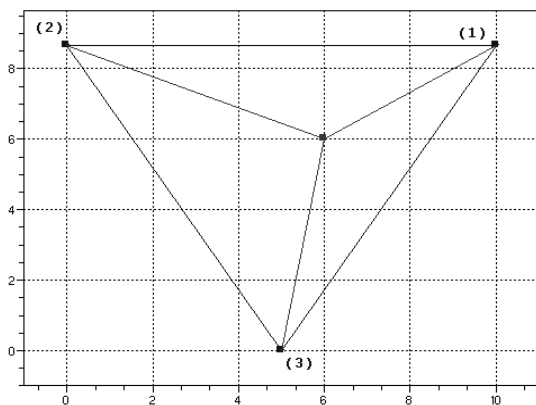


FIG. 5.1 – Manipulador 3m2T0R

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10,0 & 0,0 & 5,0 \\ 8,660254 & 8,660254 & 0,0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0,8326659 & -0,141738 & -0,1643990 \\ 0,5537757 & 0,4053224 & -0,9863939 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{A}^T) = \begin{bmatrix} 0,6554152 \\ 0,4942815 \\ 0,5710663 \end{bmatrix}$$

Neste caso verifica-se que $m=3$ e $n=2$, conseqüentemente $r=1$. Logo existem $C(6,1)$ possíveis de soluções para λ segundo o Sistema Geral de Inequações dado pela EQ. 4.10. As soluções obtidas numericamente são apresentadas abaixo¹.

$$\lambda = [1,5257504 \quad 2,0231388 \quad 1,7511100 \quad 7,6287520 \quad 10,115694 \quad 8,7555502]^T$$

Neste caso $r=1$, e tem-se uma matriz $\lambda_{[6 \times 1]}$ com 6 valores de $\lambda_{[1 \times 1]}$ que necessariamente atendem a EQ. 3.6. Obtendo-se a solução de forças por meio da EQ. 4.9 e verificando o atendimento a EQ. 3.8, obtém-se os limites da região viável como

$$\lambda_{\text{viável}} = [2,0231388 \quad 7,6287520]^T$$

Segundo a EQ. 4.6, a a solução da equação $A^T f = 0$ dentro dos limites $f_{\min}=1,0N$, $f_{\max}=5,0N$ é dada por $f = N(A^T) \cdot \lambda$ onde: $2,023 \leq \lambda_{\text{viável}} \leq 7,269$, devido a convexidade de Λ . A tração dos cabos nos limites da região viável é dada pelas colunas da matriz $f(\lambda_{\text{viável}})^2$:

$$f(\lambda_{\text{viável}}) = \begin{bmatrix} 1,3259959 & 5,0 \\ 1,0 & 3,7707506 \\ 1,1553465 & 4,3565234 \end{bmatrix}$$

Para $m=3$, $f(\lambda_{\text{viável}}) = [f_1, [3 \times 1], f_2, [3 \times 1]]_{[3 \times 2]}$, onde $f_1 = N(A^T) \cdot 2,023$ e $f_2 = N(A^T) \cdot 7,269$. A distribuição de forças em função de λ é apresentada na FIG. 5.2.

1 Em geral, a solução viável obtida numericamente é apresentada na forma de uma matriz de soluções, com as $C(2m,r)$ soluções λ , onde os pontos solução de Λ em R^m são as linhas desta matriz.

2 De maneira semelhante como ocorre com $\lambda_{\text{viável}}$, as forças limites obtidas numericamente, em geral são apresentadas como colunas de uma matriz $f(\lambda_{\text{viável}})$

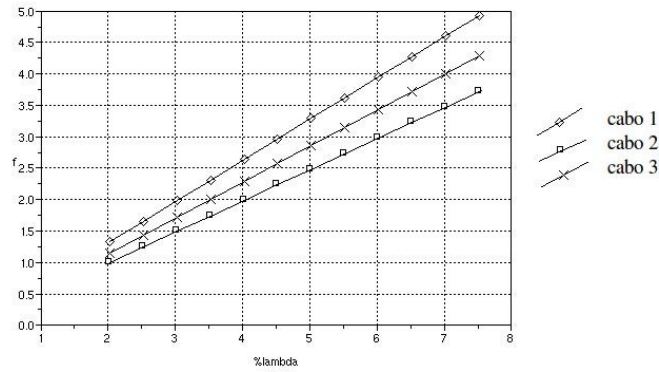


FIG. 5.2 – Curvas de tensão do manipulador 3m2T0R em função da *Região Viável*.

Agora, analisando o caso 4m2T0R são dados:

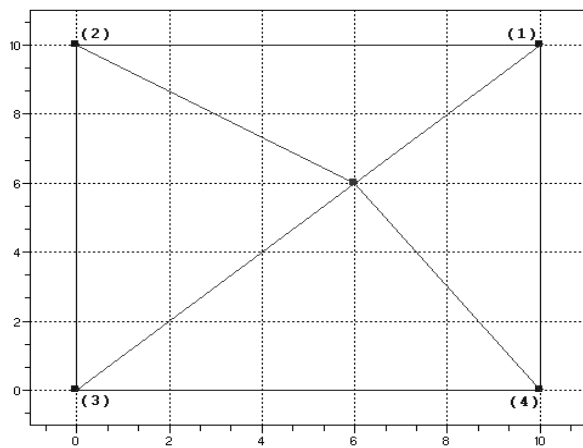


FIG. 5.3 – Manipulador 4m2T0R

$$b = \begin{bmatrix} 10,0 & 0,0 & 0,0 & 10,0 \\ 10,0 & 10,0 & 0,0 & 0,0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0,7071 & -0,8321 & -0,7071 & 0,5547 \\ 0,7071 & 0,5547 & -0,7071 & -0,8321 \end{bmatrix}$$

$$N(A^T) = \begin{bmatrix} 0,0943274 & 0,7138773 \\ 0,6926914 & 0,0407444 \\ -0,1773685 & 0,6978961 \\ 0,6926914 & 0,0407444 \end{bmatrix}$$

Como $\dim(N(A^T)) = [4 \times 2]$, o Sistema Geral de Inequações possui 8 equações e 2 incógnitas. Verifica-se que dos $C(8,2)=28$ subsistemas possíveis, 20 possuem solução, $\dim(\lambda) = [2 \times 1]$, conforme a EQ. 4.10, e deste apenas 4 atendem a EQ. 3.8 por meio da EQ. 4.9.

Abaixo são apresentados os valores de $\lambda_{viável}$ e a FIG. 5.4 apresenta Λ em \mathbf{R}^2 .

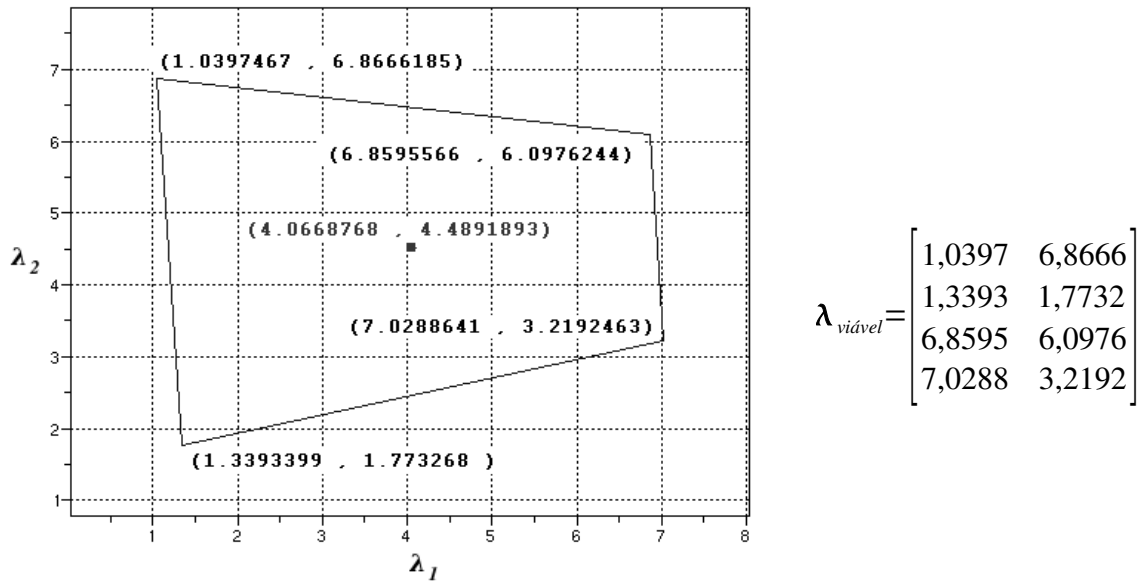


FIG. 5.4 - Região viável do caso 4m2TOR

Abaixo são apresentadas, as forças limite nos cabos referentes aos $\lambda(s)_{viablel}$

$$f(\lambda_{viablel}) = \begin{bmatrix} 5,0 & 1,3922 & 5,0 & 2,9611 \\ 1,0 & 1,0 & 5,0 & 5,0 \\ 4,06077 & 1,0 & 3,0388 & 1,0 \\ 1,0 & 1,0 & 5,0 & 5,0 \end{bmatrix}$$

Conforme mencionado para o caso 3m2TOR, qualquer ponto λ interior a região viável A fornece trações válidas e que atendam as EQ. 3.6 e 3.8.

Analogamente a FIG. 5.2, para o caso RRPM 4m2TOR as forças podem ser representadas em função do valor de λ , no entanto, devido a $dim(\lambda)=[2 \times 1]$ deve-se representar a tensão em cada cabo segundo uma superfície plana.

A FIG. 5.5 representa a tração no cabo 1 deste manipulador em função da região viável, segundo a EQ. 4.9, para os dados do problema e a área desta superfície delimitada pela Região Viável.

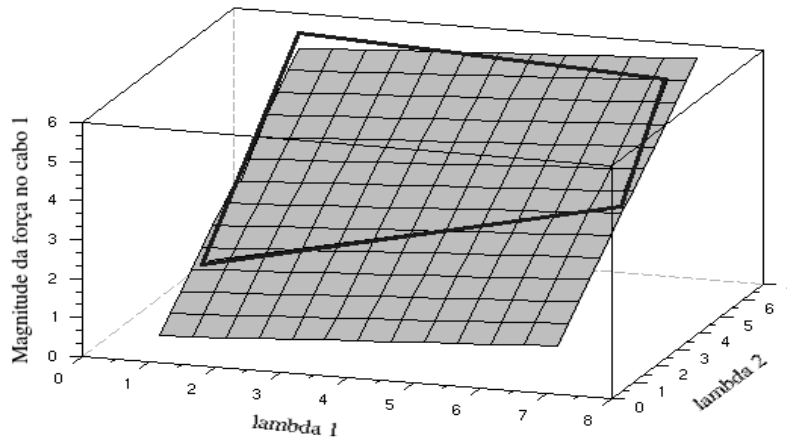


FIG. 5.5 – Tensão no cabo 1 do Manipulador RRPM 4m2T0R, obtida em função do domínio da Região Viável.

5.2 SOLUÇÃO NÃO-HOMOGÊNEA

Para o estudo da solução não-homogênea dos casos 3m2T0R e 4m2T0R considera-se que estes possuam plataformas pontuais com massas de 50g e 250g, e os resultados obtidos são comparados com o caso homogêneo. Todos os parâmetros do caso homogêneo são mantidos.

Com respeito ao caso 3m2T0R, a tabela abaixo apresenta os valores de $\lambda_{viável}$ e $f(\lambda_{viável})$ para os valores de massa analisados:

TAB. 5.1 – Valores de $\lambda_{viável}$ e $f(\lambda_{viável})$ para as massas 0g, 50g e 250g no caso 3m2T0R

$m=0$ (caso homogêneo)	$\lambda_{viável} = \begin{bmatrix} 2,0231388 \\ 7,6287520 \end{bmatrix}$	$f(\lambda_{viável}) = \begin{bmatrix} 1,3259 & 5,0 \\ 1,0 & 3,7707 \\ 1,1553 & 4,3565 \end{bmatrix}$
$m=50g$	$\lambda_{viável} = \begin{bmatrix} 2,3500672 \\ 7,4011559 \end{bmatrix}$	$f(\lambda_{viável}) = \begin{bmatrix} 1,6894 & 5,0 \\ 1,3587 & 3,8556 \\ 1,0 & 3,8845 \end{bmatrix}$
$m=250g$	$\lambda_{viável} = \begin{bmatrix} 4,7458959 \\ 6,4907714 \end{bmatrix}$	$f(\lambda_{viável}) = \begin{bmatrix} 3,8563 & 5,0 \\ 3,3327 & 4,1951 \\ 1,0 & 1,9964 \end{bmatrix}$

Comparando as soluções dos três casos é possível observar que o intervalo viável de λ é reduzido a medida que a massa da plataforma aumenta. Pode-se deduzir que há um valor de massa limite $m_L \geq 0$ para cada posição e orientação x onde haja solução homogênea, e na qual a região viável se torne pontual. A partir deste valor da massa limite (m_L) não há solução em x .

Analisando agora o caso 4m2T0R, obtém-se a seguinte solução:

TAB. 5.2 – Valores de $\lambda_{viável}$ e $f(\lambda_{viável})$ para as massas 0g, 50g e 250g no caso 4m2T0R

$m=0g$	$\lambda_{viável} = \begin{bmatrix} 1,0397 & 6,8666 \\ 1,3393 & 1,7730 \\ 6,8595 & 6,0976 \\ 7,0288 & 3,2192 \end{bmatrix}$	$f(\lambda_{viável}) = \begin{bmatrix} 5,0 & 1,3922 & 5,0 & 2,9611 \\ 1,0 & 1, & 5,0 & 5,0 \\ 4,6077 & 1,0 & 3,0388 & 1,0 \\ 1,0 & 1,0 & 5,0 & 5,0 \end{bmatrix}$
$m=50g$	$\lambda_{viável} = \begin{bmatrix} 1,3647 & 6,5852 \\ 1,6291 & 2,0908 \\ 6,6599 & 5,885 \\ 6,8057 & 3,4064 \end{bmatrix}$	$f(\lambda_{viável}) = \begin{bmatrix} 5,0 & 3,5135 & 5,0 & 4,3753 \\ 2,8027 & 2,8027 & 5,0 & 5,0 \\ 2,4864 & 1,0 & 1,6246 & 1,0 \\ 1,0 & 1,0 & 3,1972 & 3,1972 \end{bmatrix}$
$m=250g$	$\lambda_{viável} = \begin{bmatrix} 2,6647 & 5,4596 \\ 2,7882 & 3,3610 \\ 5,8616 & 5,0371 \\ 5,9130 & 4,1553 \end{bmatrix}$	$f(\lambda_{viável}) = \begin{bmatrix} 5,0 & 3,5135 & 5,0 & 4,3753 \\ 2,8027 & 2,8027 & 5,0 & 5,0 \\ 2,4864 & 1,0 & 1,6246 & 1,0 \\ 1,0 & 1, & 3,1972 & 3,1972 \end{bmatrix}$

Comparando os casos verifica-se que do mesmo modo como ocorre com a solução para o manipulador de três cabos, a região viável é reduzida a medida que a massa aumenta. A mesma consideração a respeito do valor de massa limite pode ser feita, além do qual somente

haverá solução caso o manipulador se torne IRPM.

A FIG. 5.6 apresenta a evolução da região viável em função da variação de massa da plataforma.

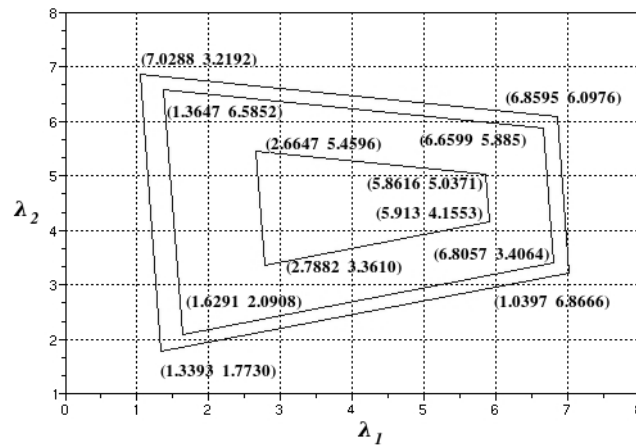


FIG. 5.6 – Evolução da região viável do caso 4m2T0R não-homogêneo em função da massa da plataforma

O polígono externo apresenta a região viável para o caso 4m2T0R homogêneo³. Em seguida tem-se a região viável para a plataforma de massa 50g e o polígono interno, menor, representa a região viável do sistema quando a massa plataforma é aumentada para 250g.

Com a progressão do aumento da massa da plataforma, ter-se-ia um triângulo e em seguida o caso limite onde a região viável é representada por um ponto.

³ Ver FIG. 5.4.

5.3 ESPAÇO DE TRABALHO COM RESPEITO ÀS TENSÕES

De modo geral, define-se como *Espaço de Trabalho* a região onde as *Equações Básicas do Problema* possuem solução. Como este trabalho não pretende gerar um método de programação em tempo real, será utilizado o método de varredura ponto a ponto de uma região pré-determinada que englobe o polígono de ancoragem. (BRUCKMANN et al, 2008) apresenta métodos de passo variável que otimizam a busca pelo limite do espaço de trabalho.

Para descrever o método utilizado, será analisado o caso RRPM 4m2T0R com solução homogênea. Definidos os parâmetros \mathbf{b} , \mathbf{p} , f_{min} e f_{max} , define-se o limite de varredura, que consiste da borda ou região que será analisada, e o passo de varredura. Em cada ponto desta região verifica-se a existência de solução válida para o *Sistema de Equações Básicas* pelos métodos citados⁴. Havendo pelo menos uma solução, tem-se que este ponto pertence ao espaço de trabalho para as condições descritas.

A FIG. 5.7 apresenta o espaço de trabalho do manipulador RRPM 4m2T0R. A região de varredura é representada pelo polígono exterior, tracejado, e o polígono de ancoragem representado por linhas continuas.

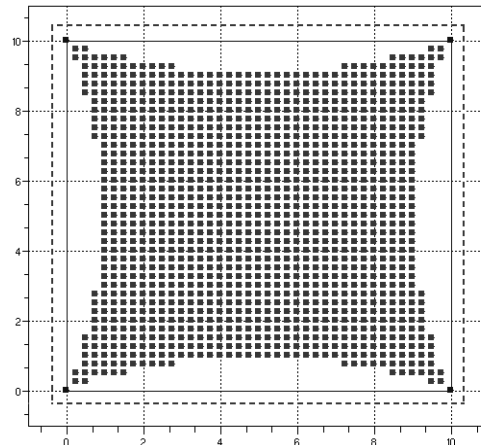


FIG. 5.7 – Espaço de Trabalho com respeito as tensões $f_{min}=1,0N$ e $f_{max}=5,0N$ para o manipulador RRPM 4m2T0R

4 Ver Seção 4.3

Cada ponto plotado na FIG. 5.7 indica uma posição na qual há pelo menos uma solução válida para a distribuição de forças do manipulador.

(VERHOEVEN, 1998) define o *Espaço de Trabalho com Respeito as Tensões para a solução homogênea de manipuladores CRPM⁵* em função da razão entre os limites máximo e mínimo dada pela EQ. 5.1 e o chama de $WST(k_{max})$.

$$k_{max} = \frac{f_{max}}{f_{min}} \quad (5.1)$$

visto que a solução da EQ. 3.6 é dada pela EQ. 4.6 somente para o caso homogêneo, tem-se que cada f_i será dado por:

$$f_i = \mathbf{a}_i \cdot \boldsymbol{\lambda}, \text{ onde } \mathbf{a}_i = \mathbf{N}(\mathbf{A}^T) \quad (5.2)$$

Assim para dado $\boldsymbol{\lambda}$ válido, a relação k_{max} é dada por:

$$k_{max} = \frac{f_{max}}{f_{min}}, \text{ desde que: } \mathbf{a}_{max} \cdot \mathbf{a}_{min} > 0, \quad (5.3)$$

pois caso contrário não haveria $\boldsymbol{\lambda}$ capaz de gerar tensões positivas.

Agora deseja-se analisar o comportamento do espaço de trabalho de um manipulador em função de k_{max} . A FIG. 5.8 apresenta o espaço de trabalho $WST(k_{max})$, de um manipulador 3m2T0R homogêneo, para vários valores de f_{min} e f_{max} . No caso específico de manipuladores com carregamento nulo e $k_{max}=1$, a distribuição de forças é chamada *isotrópica* e a plataforma estará restrita à posição central dos pontos de ancoragem. Analisando o resultado obtido, pode-se verificar que o espaço de trabalho é função de k_{max} e varia em magnitude com este parâmetro.

5 Ver início do Capítulo 4, onde são apresentadas as definições de espaço de trabalho.

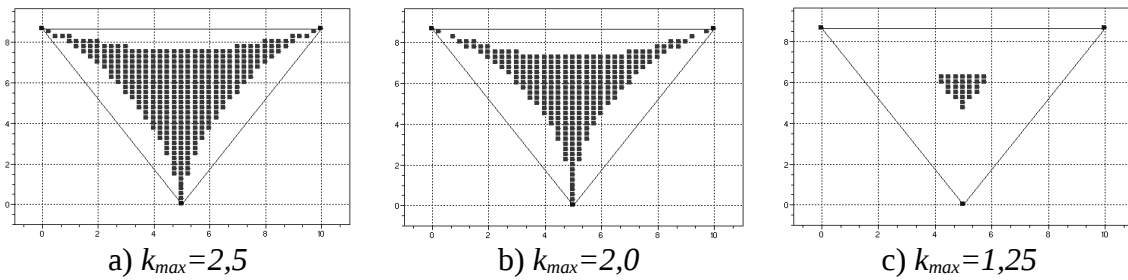


FIG. 5.8 – Espaço de Trabalho com Respeito às Tensões, de uma manipulador CRPM homogêneo, para vários valores de k_{max}

Verifica-se ainda que a propriedade que relaciona k_{max} a extensão do espaço de trabalho pode ser estendida *qualitativamente* para manipuladores CPRM e RRPM quaisquer. A seguir são apresentadas as análises de *WST* para manipuladores com solução homogênea e os resultados são comparados com casos não-homogêneos similares.

5.3.1 ESPAÇO DE TRABALHO COM RESPEITO ÀS TENSÕES COM SOLUÇÃO HOMOGÊNEA

Em primeiro lugar serão analisados os espaços de trabalho com respeito as tensões para o caso homogêneo. Como não existem esforços externos aplicados sobre a plataforma, manipuladores CRPM e RRPM não poderão se comportar como IRPM, logo posturas externas ao polígono de ancoragem não serão analisadas.

O método de determinação do espaço de trabalho com respeito as tensões é representado pelo fluxograma da FIG. 5.9:

ESQUEMA DE DETERMINAÇÃO DO ESPAÇO DE TRABALHO

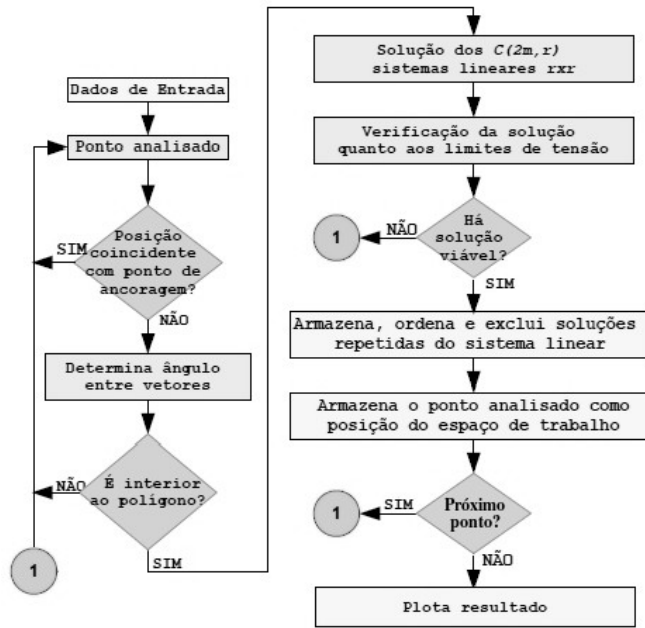


FIG. 5.9 – Método básico de determinação do espaço de trabalho

A verificação da posição da plataforma em relação ao polígono de ancoragem, no caso plano, é realizada pela soma de todos os ângulos entre dois vetores comprimento de cabo consecutivos. Caso a soma dos ângulos seja menor que 2π , o ponto é considerado exterior ao polígono de ancoragem e não é possível obter o equilíbrio estático da plataforma. Matematicamente:

$$\text{Se } \sum_{i=1}^m \theta_{(i,i+1)} < 2\pi \quad \text{Então } x \text{ é exterior ao polígono;} \quad (5.4)$$

onde $\theta_{(i,i+1)} = \arccos(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_{i+1})$ e \mathbf{v}_i é o vetor unitário de comprimento de cabo do i -ésimo cabo.

No caso geral, pode-se utilizar o método segundo os produtos escalares com os vetores ortonormais em \mathbf{R}^L .

Foram analisados os espaços de trabalho com respeito as tensões para manipuladores:

- CRPM 3m2T0R;
- RRPM 4m2T0R; e,
- RRPM 6m2T0R,

para vários valores de k_{max} e mantendo-se $f_{max}=5,0N$ constante. Como polígono de ancoragem

são utilizados polígonos regulares de m lados. Também é possível verificar, que o espaço de trabalho se retrai das bordas para o centro, de acordo com o decréscimo de k_{max} .

Nos casos de solução homogênea, é bastante interessante verificar que para manipuladores pontuais, isto é, que não executam rotação, a *Matriz de Estrutura* é adimensional. Isto significa que as dimensões métricas do manipulador são indiferentes. Em todos os casos foram utilizados polígonos com lado de valor 10.

A FIG. 5.10 apresenta o caso com 3 cabos.

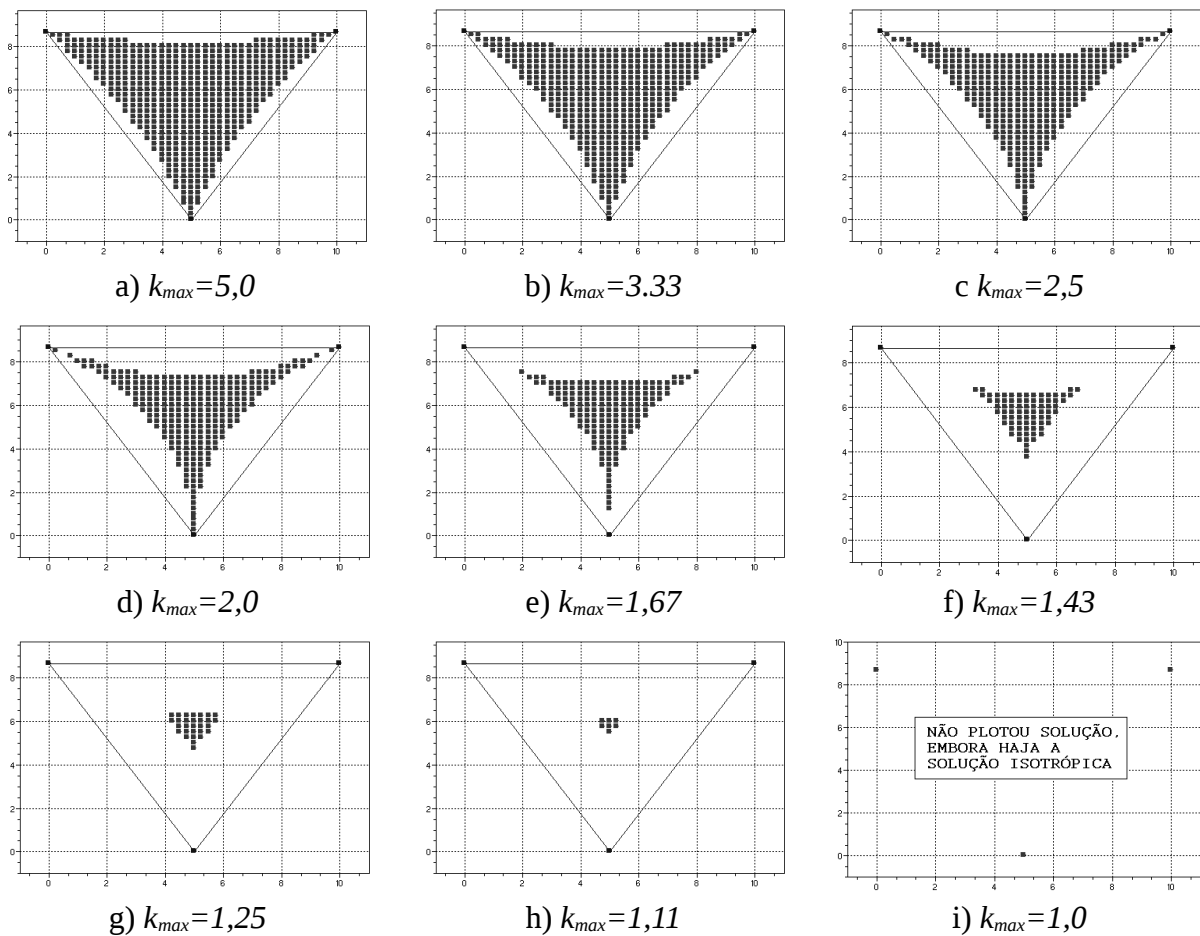


FIG. 5.10 – Espaço de trabalho com respeito às tensões para o manipulador CRPM 3m2T0R

No manipulador 3m2T0R não é possível verificar a solução isotrópica de tensão nos cabos pois o centro do polígono não coincidiu com nenhum ponto da varredura. Neste caso, outros métodos de análise devem ser utilizados. (BRUCKMANN et al, 2008) apresentada outros métodos de análise do espaço de trabalho.

A FIG. 5.11 apresenta os espaço de trabalho para o manipulador RRPM 4m2T0R, onde é possível verificar o comportamento do espaço de trabalho em função de diferentes valores de k_{max} , até a solução isotrópica.

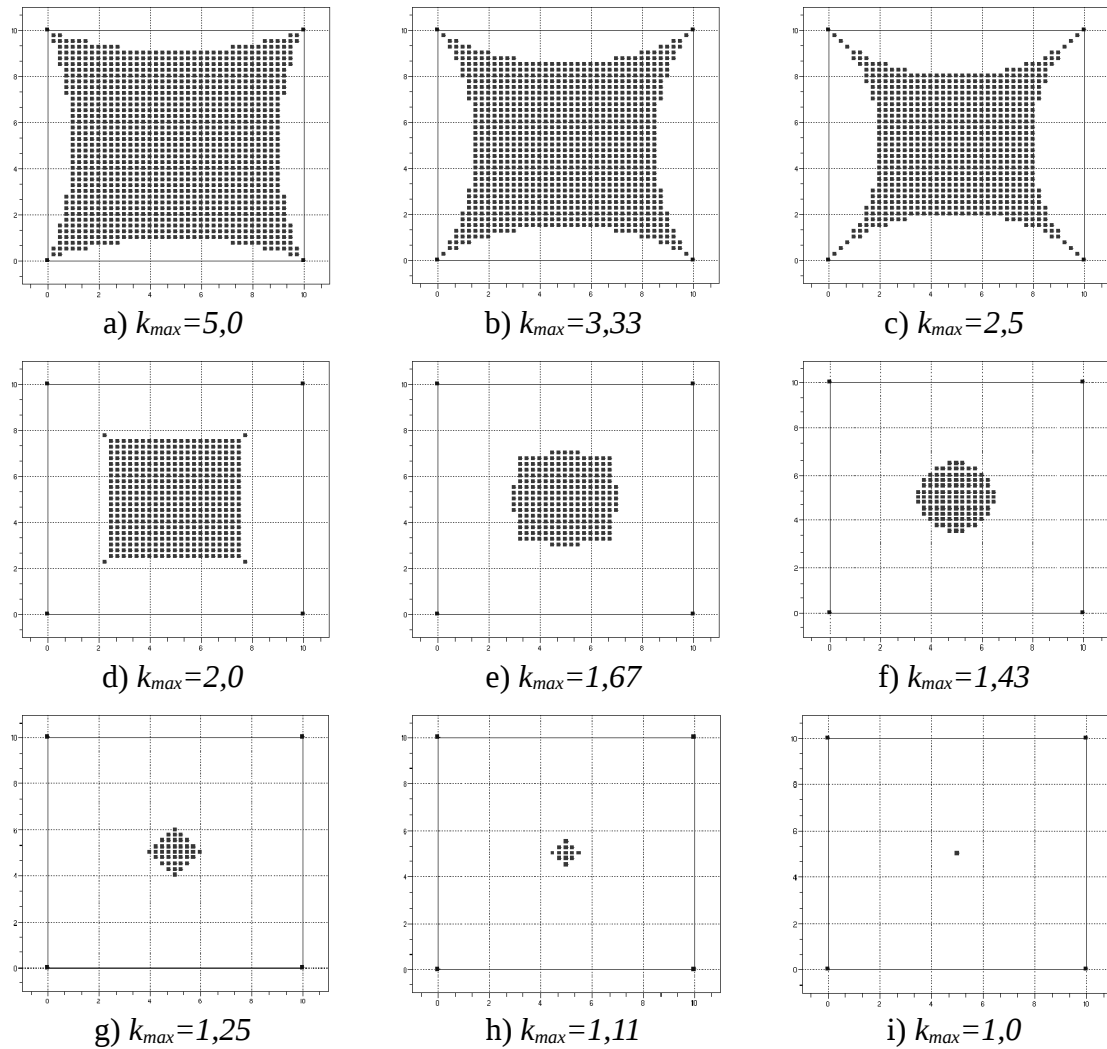


FIG. 5.11 – Espaço de trabalho com respeito às tensões para o manipulador RRPM 4m2T0R

A FIG. 5.12 apresenta os espaços de trabalho para um manipulador RRPM 6m2T0R. Novamente é possível observar que o comportamento do espaço de trabalho acompanha a variação de k_{max} .

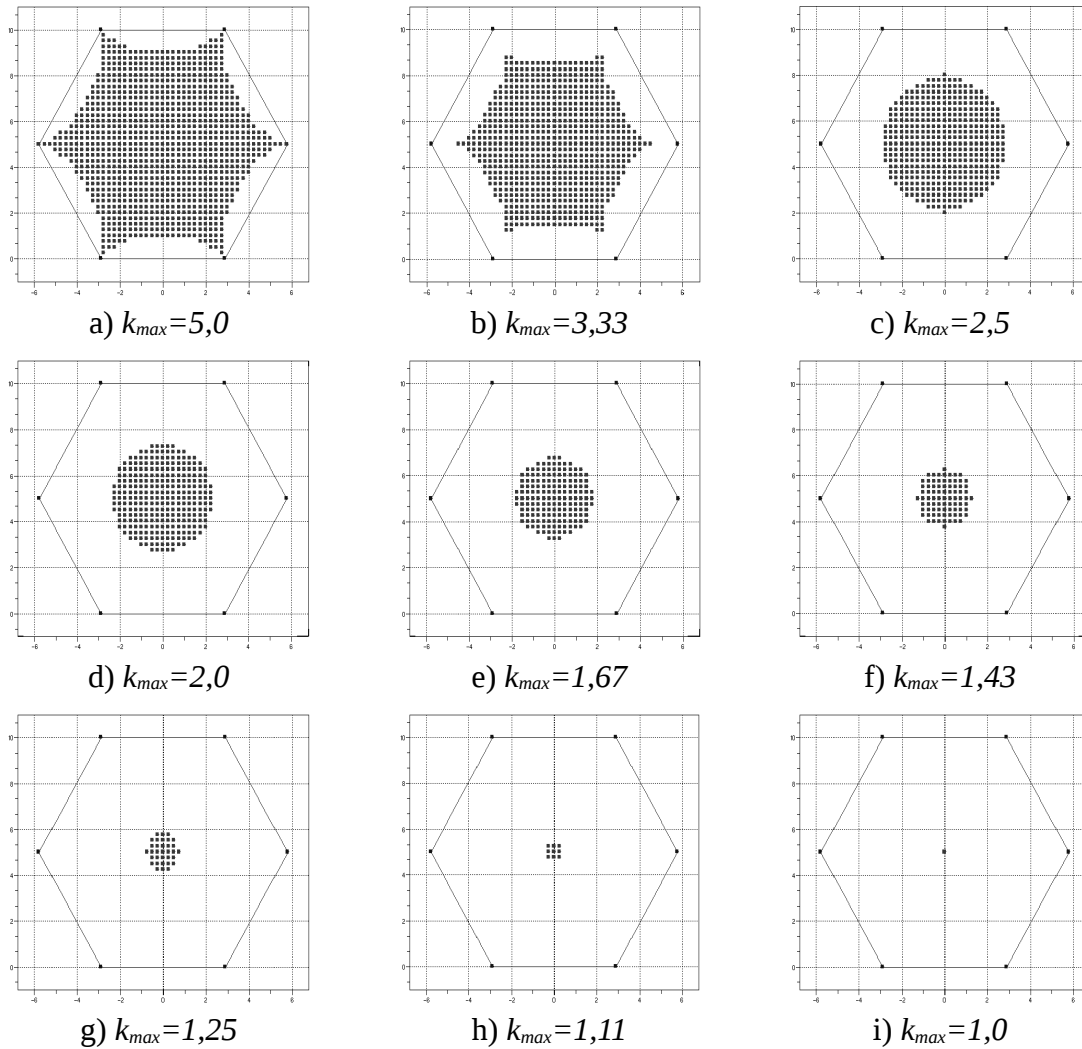


FIG. 5.12 – Espaço de trabalho com respeito às tensões para o manipulador RRPM 6m2T0R

Os resultados das FIG. 5.10, 5.11 e 5.12 apresentam qualitativamente o comportamento de manipuladores homogêneos com respeito as tensões, segundo a variação do parâmetro k_{max} e mantido constante o limite de tensão superior.

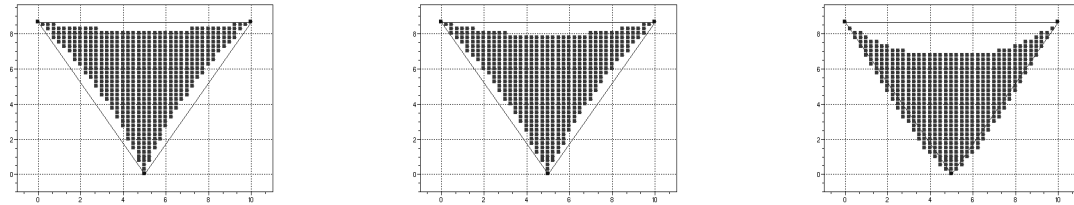
- É verificado que para valores altos de k_{max} o espaço de trabalho tende a aproximar-se dos pontos de ancoragem, gerando uma figura côncava;
- Para valores baixos de k_{max} o espaço de trabalho se concentra no centro do polígono de ancoragem, até o limite da solução isotrópica;
- Independente da geometria do polígono de ancoragem, estas características poderão ser observadas, inclusive para polígonos de ancoragem côncavos. Neste caso, o interesse em um cabo interior ao maior polígono convexo gerado deve estar claro, pois dependendo da posição da plataforma, um mesmo cabo poderá assumir forças ascendentes ou descendentes.
- Este comportamento pode ser observado inclusive em manipuladores espaciais e que apresentem rotações, pois a razão k_{max} , em qualquer caso, está relacionada diretamente com a capacidade de redistribuição de tensão entre os cabos em função da postura ocupada pela plataforma.

5.3.2 ESPAÇO DE TRABALHO COM RESPEITO ÀS TENSÕES COM SOLUÇÃO NÃO-HOMOGÊNEA

O método de solução para o caso de manipuladores com carregamento não-nulo sobre a plataforma utiliza o esquema apresentado na FIG. 5.9, conforme o caso anterior. Caso o comportamento IRPM seja admissível, a verificação quanto a posição no interior do polígono de ancoragem não deve ser realizada.

Para a verificação do espaço de trabalho com solução não-homogênea, foram analisadas as distribuições de tensões em manipuladores com plataforma pontuais de diferentes massas. Também foi verificado o comportamento do sistema em relação aos limites de tração nos cabos.

Na FIG. 5.13 são plotados os espaços de trabalho para o caso 3m2T0R com massas $m=0g$, $m=50g$ e $m=250g$, e limites de tração $f_{min}=1,0N$ e $f_{max}=5,0N$.



a) $m = 0g$ (caso homogêneo)

b) $m = 50g$

c) $m = 250g$

FIG. 5.13 – Espaços de trabalho para manipuladores 3m2T0R com diferentes massas

Pode-se verificar que o espaço de trabalho para $m = 50g$ se aproxima bastante do caso homogêneo, e que a deformação do espaço de trabalho é mais acentuada para a massa $m = 250g$. (FANG, 2005) propõe uma modelagem, onde o peso é equacionado como o $(m+1)$ -ésimo cabo posicionado no infinito e de tração constante, assim caso o único esforço presente no sistema seja a força peso, o vetor w desaparece da EQ. 3.6 e o sistema recebe o mesmo tratamento que um sistema homogêneo.

Na FIG. 5.13 c) é possível verificar o comportamento IRPM nas bordas inferiores do espaço de trabalho. Caso fossem buscadas soluções para o espaço de trabalho abaixo do polígono de ancoragem, seria verificada uma *região parabolica* que extender-se-ia constantemente para baixo. Neste caso o manipulador comportaria como mero guindaste, tendo a capacidade de posicionamento e rigidez comprometida em relação as características de projeto desejadas. Para grandes comprimento de cabo o manipulador poderá pendular, se sujeito a esforços externos transversais.

Em casos não homogêneos, abrangendo a grande maioria de manipuladores reais, o comportamento IRPM é frequentemente observado. Uma condição para que subconjuntos do espaço de trabalho fora do polígono de ancoragem sejam eliminados é a elevação de f_{min} até determinado valor que não permita a distribuição de trações em condições IRPM.

Visando estabelecer uma relação entre a solução não-homogênea do espaço de trabalho e o parâmetro k_{max} , são apresentados dois casos com diferentes massas, para $k_{max}=2,5$. A FIG. 5.14 apresenta os limites de tração $f_{min}=1,0N$ e $f_{max}=2,5N$ e a FIG. 5.15, $f_{min}=2,0N$ e $f_{max}=5,0N$.

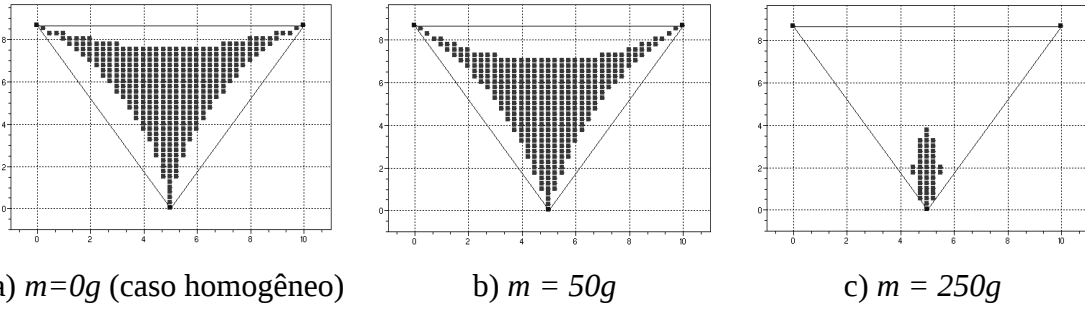


FIG. 5.14 – Espaço de trabalho para 3m2T0R com $f_{min}=1,0N$ e $f_{max}=2,5N$

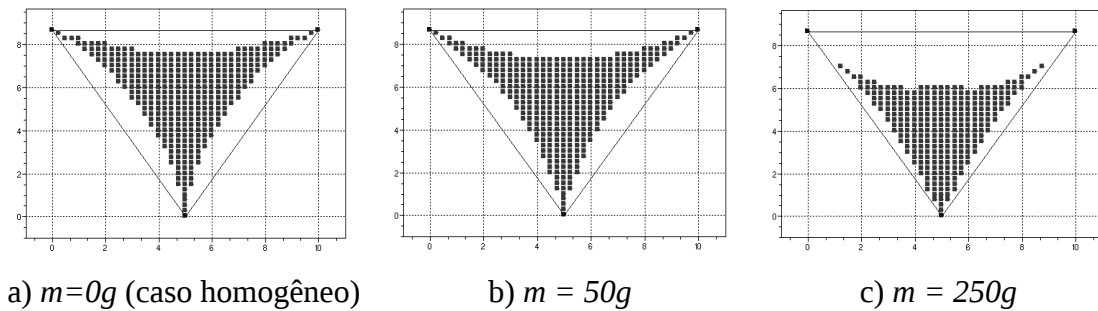


FIG. 5.15 – Espaço de trabalho para 3m2T0R com $f_{min}=2,0N$ e $f_{max}=5,0N$.

Inicialmente verifica-se nas FIG. 5.14 a) e 5.15 a) que o espaço de trabalho homogêneo é função de k_{max} , independentemente dos limites de força. Nas FIG. 5.14 b) e c), e em seguida na FIG. 5.15 b) e c) verifica-se que conforme ocorre no caso homogêneo, o espaço de trabalho acompanha a variação de k_{max} , contudo comparando as FIG. 5.14 b) e 5.15 b) e as FIG. 5.14 c) e 5.15 c) verifica-se que o valor dos limites de força são significativos para a solução e devem ser analisados.

Na FIG. 5.14, onde utilizam-se forças relativamente inferiores, verifica-se que a elevação do carregamento reduz gradativamente o espaço de trabalho, não apresentando solução nas posições onde os cabos superiores possuem ângulos menores com o vetor peso (ou maiores ângulos com a direção do carregamento), e o espaço de trabalho fica restrito a regiões onde a direção destes cabos se aproximem da direção de carregamento da plataforma. Este princípio pode ser utilizado para qualquer cabo oposto a determinado carregamento.

Em contrapartida, na FIG. 5.15, onde os limites de força são maiores, a evolução do espaço de trabalho se aproxima mais do esperado para o caso homogêneo, visto haver maior disponibilidade do sistema em suportar esforços segundo as EQ. 3.5 e 3.8.

Observa-se também que na FIG. 5.15 c) a plataforma não se comporta como IRPM,

devido ao limite de força inferior ser elevado.

As FIG. 5.16, 5.17 e 5.18 apresentam espaços de trabalho para manipuladores RRPM 4m2T0R, com valores de $k_{max}=5,0$ e $k_{max}=2,5$, para diferentes massas.

Verifica-se que a FIG. 5.16 apresenta o intervalo entre os limites de tensão mais amplo em relação aos demais e que a plataforma possui liberdade para atuar em um espaço de trabalho ampliado, ao longo de todo o polígono de ancoragem. Na FIG. 5.16 c) verifica-se o surgimento de uma região IRPM devido a força peso ser significativa em relação ao limite superior de tração nestas posições.

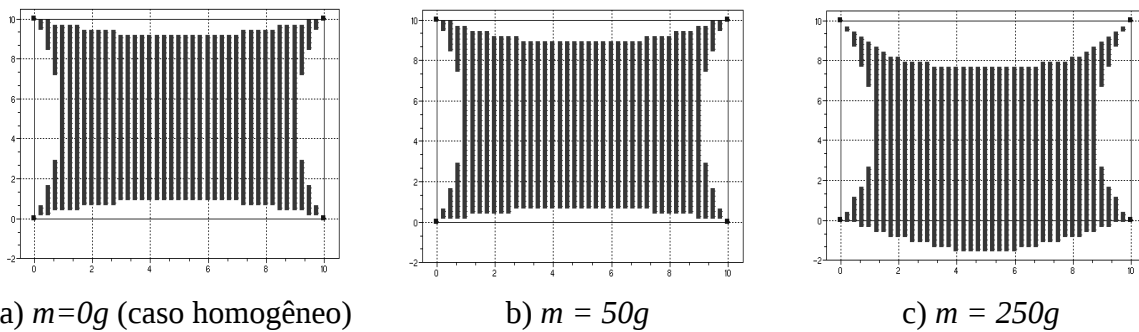


FIG. 5.16 - Espaço de trabalho para 4m2T0R com $f_{min}=1,0N$ e $f_{max}=5,0N$.

Nas FIG. 5.17 e 5.18 é verificado que a compressão dos limites de tração na razão de $k_{max}=5,0$ para $k_{max}=2,5$ reduz consideravelmente.

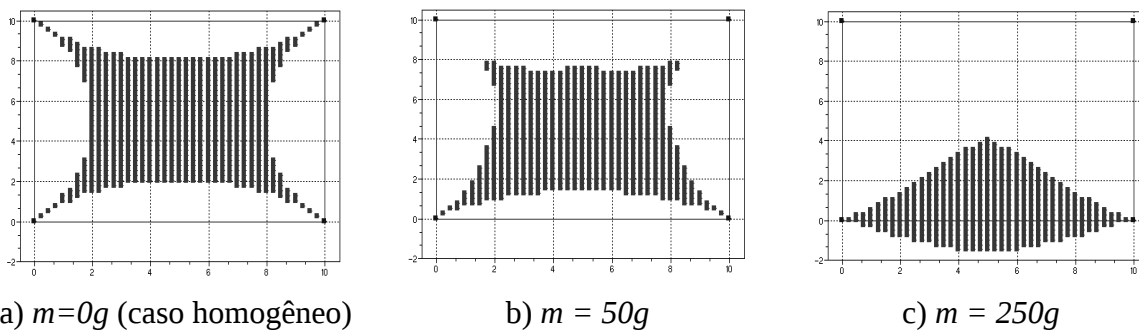


FIG. 5.17 - Espaço de trabalho para 4m2T0R com $f_{min}=1,0N$ e $f_{max}=2,5N$.

Em 5.17 b) e c) verifica-se a redução gradual do espaço de trabalho na região superior do polígono de ancoragem em relação a 5.17 a), e em 5.17 c) o comportamento IRPM na parte inferior do espaço de trabalho devido ao aumento da força peso.

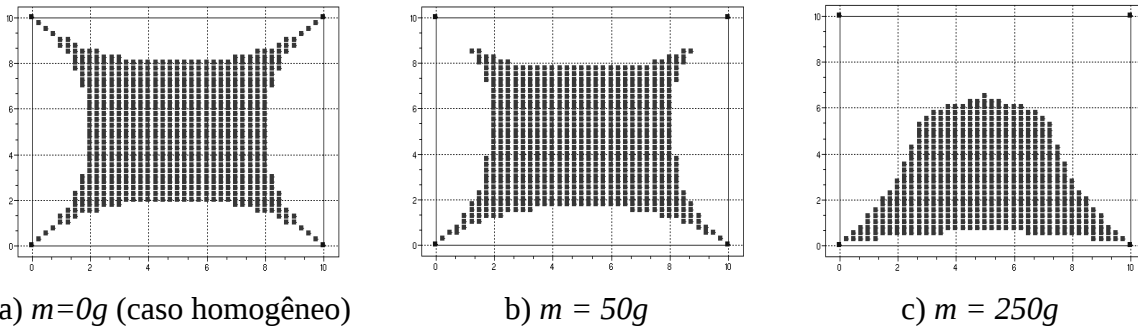


FIG. 5.18 - Espaço de trabalho para 4m2T0R com $f_{min}=2,0N$ e $f_{max}=5,0N$.

Nas FIG. 5.17 e 5.18 são verificados os seguintes comportamentos:

- a) Para limites de força relativamente menores, o espaço de trabalho é consideravelmente deformado na direção do carregamento, podendo apresentar regiões IRPM;
- b) Comparando os resultados apresentados pelas FIG. 5.17 e 5.18 para os mesmos valores de massa da plataforma, o limite de tração mínima da FIG. 5.18, superior ao de 5.17, permite que este se aproxime mais dos pontos de ancoragem.
- c) Concentração do espaço de trabalho, em relação ao centro do polígono de ancoragem, e deformação na direção do carregamento.
- d) O comportamento do espaço de trabalho deste tipo de manipulador é análogo ao apresentado pelo manipulador 3m2T0R para $k_{max}=2,5$.
- e) Comparando os casos com 3 e 4 cabos para os mesmos valores de carregamento externo, limites de força e k_{max} , verifica-se que a presença de um ponto de ancoragem privilegia o espaço de trabalho em sua direção comprovando a afirmação de que um atuador pode ser considerado um aplicador de esforços.

Analisando-se as FIG. 5.13 a 5.18 observa-se que, para valores de k_{max} mais elevados, o espaço de trabalho se aproxima mais do polígono de ancoragem, mesmo que apresente regiões de comportamento IRPM. Outra característica observada em todas as figuras é a deformação do espaço de trabalho na direção de aplicação do esforço, neste caso a força peso, acompanhando a diminuição do parâmetro k_{max} .

Baseados no resultados, algumas conclusões a respeito do comportamento da plataforma e espaço de trabalho podem ser obtidas.

Analisando-se determinados parâmetros de forma isolada, a menos que o contrário seja dito, pode-se observar que:

- Há uma forte relação de k_{max} com a magnitude do espaço de trabalho em relação ao polígono de ancoragem;
- Para plataformas de massa não-nula, que representam o caso real, não somente o valor de k_{max} deve ser analisado, mas também: os limites de força em relação ao carregamento aplicado; e, a geometria de ancoragem do manipulador;
- Verifica-se que o espaço de trabalho é deformado na direção de aplicação de um carregamento, e que a presença do $(m+1)$ -ésimo cabo no manipulador privilegia o espaço de trabalho nesta direção. Desta forma, ratifica-se a função do cabo como um aplicador de esforços sobre a plataforma e não somente como um atuador em seu sentido estrito de ferramenta ou manipulador

6 MODELO DO MANIPULADOR COM CABOS DE MASSA NÃO-NULA

Este Capítulo apresenta o modelo do manipulador paralelo acionado por cabos de massa não-nula e apresenta um método de solução para o sistema não-linear gerado pela EQ. 3.6 aplicada a este caso. De acordo com o modelo linear, a determinação do espaço de trabalho é necessária à solução do problema. As *Equações Básicas do Problema*, EQ. 3.6 e 3.8, devem ser satisfeitas para a obtenção das trações nos cabos que sustentam a plataforma.

De acordo com a definição do modelo matemático¹, a Matriz de Estrutura do problema A^T é composta pelos vetores de fixação \mathbf{p}_j e pelos vetores unitários de comprimento de cabo \mathbf{v}_i .

Com a inclusão de massa nos cabos, ocorre a formação de catenária e a direção de \mathbf{v}_i se altera, não sendo mais válida sua aplicação direta. Contudo, como deseja-se que o modelo apresente um limite inferior de tração capaz de manter o sistema rígido e atender as necessidades de projeto, supõe-se que os cabos estarão constantemente tracionados e que a solução do problema linear constitui uma boa condição inicial para a determinação da solução.

Utilizando a teoria em torno de fios e cabos em catenária², o sistema não linear é resolvido pelo *Método de Newton* em função das componentes horizontais de forças do sistema, tomando-se como condição inicial os dados obtidos a partir da solução do modelo linear. As componentes horizontais de força \mathbf{h} são utilizadas como incógnitas do sistema por serem um parâmetro constante ao longo de toda uma catenária definida.

Em relação a aplicação do método descrito na FIG. 5.9³ como condição inicial, a determinação do espaço de trabalho para cabos de massa não-nula exclui todas as posturas que não possuem solução para o sistema com cabos de massa nula.

Em contrapartida, para cada postura linear válida o *Método de Newton* deve ser aplicado, aumentando o tempo de análise do espaço de trabalho. Conforme dito no início desta

1 Ver Capítulo 3 – Modelo Matemático

2 Ver APÊNDICE 1 – Definições sobre fios e cabos em catenária, em especial as equações da TAB. 13.1

3 FIG. 5.9 – Método básico de determinação do espaço de trabalho

dissertação, sua aplicação não é voltada para a programação em tempo real. Ainda assim, caso se deseje utilizá-lo como tal é recomendado que o espaço de trabalho obtido a partir da solução não-linear seja armazenado junto ao sistema de controle do manipulador.

Para a solução do problema com cabos de massa não-nula são feitas as seguintes considerações:

- a) O cabo é analisado no plano vertical que o contém, para cada postura da plataforma;
- b) Os cabos são considerados como catenárias estáticas;
- c) Novamente, os “*pontos de ancoragem*” são considerados pontuais. A abordagem de (BRUCKMAN et al, 2008) para utilização de polias não é adotada neste modelo, embora esta questão seja discutida em *Trabalhos Futuros*; e,
- d) Todas as juntas nos pontos de fixação são consideradas esféricas e sem atrito.

A solução do problema é obtida em quatro etapas. Inicialmente o problema de determinação das forças atuantes na plataforma para cabos flexíveis e com massa não-nula é resolvido para o caso plano com translações (Caso 1. Plataforma 3m2T0R), em seguida para o caso de translações espaciais (Caso 2. Plataforma 4m3T0R), sendo que este é a mera extensão do primeiro.

Resolvidos estes dois casos as rotações são incluídas na solução do problema de determinação do espaço de trabalho para o caso plano 2T1R e em seguida para 3T3R (Caso 3. e Caso 4. , respectivamente), que é o objetivo deste trabalho.

6.1 CASO 1: PLATAFORMA PONTUAL 3m2T0R

A FIG. 6.1 ilustra o Caso 1, em um plano vertical, cujo único esforço externo é o próprio peso da plataforma. As massas dos cabos estão inclusas no modelo. São utilizados três pontos de ancoragem, sendo 2 superiores a fim de ampliar o espaço de trabalho controlável. Os ângulos β_i , $i=1, \dots, m$, são definidos como os ângulos de aplicação de força na plataforma,

contidos em um plano vertical, e em relação a horizontal. Como condição inicial v_i e β_i são tomados para cabos lineares e sem massa.

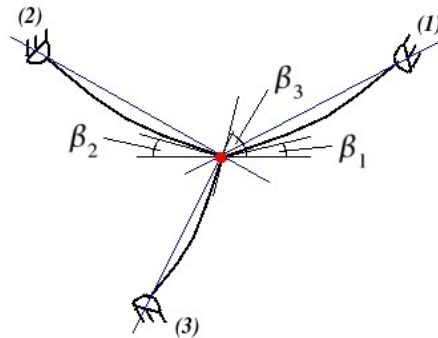


FIG. 6.1 – Modelo do manipulador 3m2T0R, com cabos em catenária

Aplicando a EQ. 3.6 em termos das componentes horizontais de forças nos cabos, obtém-se as *Equações de Equilíbrio* do sistema, $f_1(\mathbf{h})$ e $f_2(\mathbf{h})$, nas direções $0x$ e $0y$, respectivamente, em função do vetor de forças horizontais $\mathbf{h}=[h_1, \dots, h_m]$. Como $\mathbf{h}=[h_1, h_2, h_3]$ é função da tração no cabo, tem-se que $h_i \geq 0$, para todo $i=1, \dots, m$.

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{h}) = +1 \cdot h_1 - 1 \cdot h_2 - 1 \cdot h_3 + w_x = 0 \\ f_2(\mathbf{h}) = +1 \cdot \text{tg}(\beta_1)h_1 + 1 \cdot \text{tg}(\beta_2)h_2 - 1 \cdot \text{tg}(\beta_3)h_3 + w_y = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

Neste ponto, surge o problema de que as funções trigonométricas determinadas numericamente normalmente se referem aos menores ângulos entre dois vetores. A exemplo da EQ. 6.1, o termo $\text{tg}(\beta_3) \cdot h_3$ é negativo pois se trata de um cabo inferior, no entanto esta tangente é obtida numericamente como positiva. Posteriormente será citado que os valores das tangentes devem sempre estar em módulo, de modo que apresentem somente valores positivos. Aliado a isto, tem-se a necessidade de definir valores que indiquem a orientação das componentes da força \mathbf{h} , nos respectivos pontos de fixação.

Dai, define-se a *Matriz Direcional* $[\mathbf{U}] = u_{j,i}$, com $j=x,y,z$ e $i=1, \dots, m$, onde as linhas indicam as direções de aplicação das forças, nas direções $0x$, $0y$ e $0z$, e as colunas, a que cabos estes valores se aplicam. As componentes $u_{j,i}$ são definidas em função das componentes $v_{j,i}$, do respectivo vetor unitário de comprimento de cabo.

Escrevendo os termos “+1” e “-1” da EQ. 6.1 como componentes $u_{j,i}$, esta pode ser

reescrita na forma matricial como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_{x,1} & u_{x,2} & u_{x,3} \\ u_{y,1} \cdot |\operatorname{tg}(\beta_1)| & u_{y,2} \cdot |\operatorname{tg}(\beta_2)| & u_{y,3} \cdot |\operatorname{tg}(\beta_3)| \end{bmatrix}}_{A_F \mathbf{h} + \mathbf{w} = \mathbf{0}} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.2)$$

onde a matriz direcional é dada por:

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

A EQ. 6.2 é análoga a EQ. 3.6 e descrita como $A_F \mathbf{h} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$, onde A_F representa a Matriz de Estrutura em termos das componentes horizontais de força e em relação ao sistema $F(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$.

A função da Matriz Direcional vai além de sua aplicação na EQ. 6.2, também sendo utilizada na obtenção dos parâmetros relacionados a catenária. Sabe-se da teoria de cabos em catenária que o referencial com respeito a catenária está localizado sob seu vértice, e considera-se $x_1 < x_2$ ⁴. Logo, outra função da Matriz Direcional é indicar uma mudança de direção e/ou posicionar o referencial da catenária próximo ao ponto de fixação para cabos superiores e próximo ao ponto de ancoragem para cabos inferiores.

Duas características bastante interessantes de $[U]$: Os termos $u_{j,i}$, para determinada postura, são invariantes em relação a \mathbf{h} , pois suas componentes horizontais estão relacionadas ao plano vertical que contém a catenária; e, sua componente vertical assume somente os valores -1 e $+1$, determinando a direção da componente de força vertical em A_F .

Neste caso, os $u_{j,i}$ são definidos em função da EQ. 3.1 e determinados pela EQ. 6.4.

$$u_{j,i} = \frac{v_{j,i}}{|v_{j,i}|} \quad (6.4)$$

Onde $j=x,y$ e $i=1, \dots, m$ e $v_{j,i}$ é componente do vetor unitário de comprimento de cabo.

⁴ Ver FIG. 12.4 da seção 12.1.2 e FIG. 12.6 da seção 12.1.4 do APÊNDICE 1.

Desta forma, $u_{j,i}$ não assume outros valores apesar da variação de β_i e $v_{j,i}$ durante a solução do problema.

Voltando as EQ. 6.1 e 6.2, o valor de $tg(\beta_i)$ deve estar em módulo, pois no caso específico de um cabo superior apresentar inclinação negativa no ponto de fixação, a parcela da componente de força vertical deste cabo em $\mathbf{A}_F \cdot \mathbf{h}$ será positiva, enquanto deveria ser negativa, como condição inicial em $f_2(\mathbf{h})$.

A FIG. 6.2 apresenta três posições de cabo possíveis no ponto de fixação com os respectivos termos $u_{j,i}$.

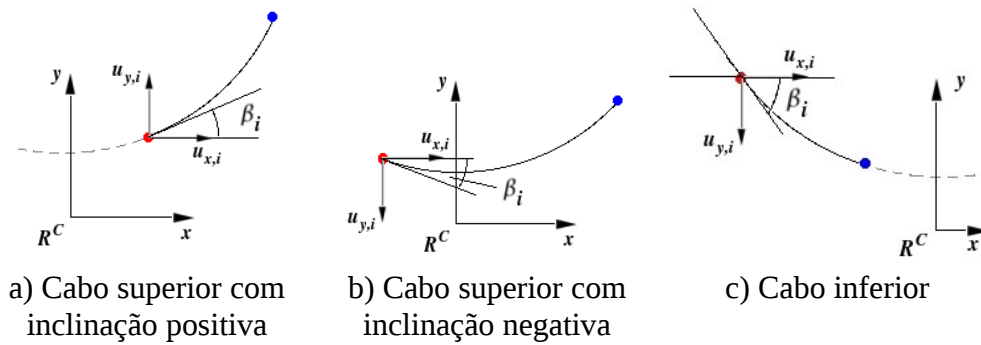


FIG. 6.2 – Posições possíveis de cabos nos pontos de fixação

Em qualquer configuração que o cabo se apresente, o ângulo β_i é obtido no referencial \mathbf{R}^C em relação à horizontal. Assim x_1 e x_2 , no referencial da catenária, serão designados como $x_{1,i}$ e $x_{2,i}$ para o i -ésimo cabo. Logo os pontos de fixação e ancoragem são designados como $x_{1,i}$ e $x_{2,i}$, respectivamente, para cabos superiores e inversamente para cabos inferiores. As FIG. 6.2 a) e c) apresentam os pontos de fixação e ancoragem de cabos superiores e inferiores, respectivamente.

A EQ. 6.1 fornece as funções $f_1(h_1, h_2, h_3) = 0$ e $f_2(h_1, h_2, h_3) = 0$ para a solução do sistema não-linear pelo Método de Newton conforme a EQ 6.5.

$$F(h_1, h_2, h_3) = \begin{bmatrix} f_1(h_1, h_2, h_3) \\ f_2(h_1, h_2, h_3) \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Aplicando o Método de Newton ao sistema, o vetor solução de forças horizontais \mathbf{h} é obtido através das iterações:

$$\mathbf{h}^k = \mathbf{h}^{k-1} - J^{-1}(\mathbf{h}^{k-1}) \cdot F(\mathbf{h}^{k-1}) \quad (6.6)$$

Onde $J^{-1}(\mathbf{h}^{k-1})$ é a pseudo-inversa da matriz Jacobiana de $F(\mathbf{h}^{k-1})$ obtida numericamente pela rotina “pinv()” do *Scilab-4.1.2*. Recorrendo-se a EQ. 6.2 é possível obter as componentes de $J(\mathbf{h}^{k-1})$. Primeiramente para as componentes relativas a f_1 :

$$\frac{\partial f_1}{\partial h_i} = u_{x,i}, \text{ onde } i=1, \dots, m \quad (6.7)$$

Para os componentes de $J(\mathbf{h}^{k-1})$ relativas a f_2 tem-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_2}{\partial h_1} = \frac{\partial}{\partial h_1} (u_{y,i} \cdot |tg(\square_1)| h_1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial h_2} = \frac{\partial}{\partial h_2} (u_{y,i} \cdot |tg(\square_2)| h_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial h_3} = \frac{\partial}{\partial h_3} (u_{y,i} \cdot |tg(\square_3)| h_3) \end{cases} \quad (6.8)$$

Sabe-se que $\beta_i = \beta(\mathbf{h}_i)$. Logo a derivada dos termos da EQ. 6.8 em função de h_i : são:

$$\frac{\partial f_2}{\partial h_i} = u_{y,i} \left(|tg(\square_i)| + h_i \frac{1}{\cos^2(\square_i)} \cdot \frac{\partial \square_i}{\partial h_i} \right) \quad (6.9)$$

Tem-se das expressões 1, 2 e 4 da TAB. 12.1, que β_i e \mathbf{h}_i se relacionam pela regra da cadeia. De acordo com estas equações sabe-se que:

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial h_i} = \frac{\partial \beta_i}{\partial x_{1,i}} \cdot \frac{\partial x_{1,i}}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial a_i}{\partial h_i} \quad (6.10)$$

Onde $x_{1,i}$ corresponde a x_1 do i -ésimo cabo, indicando que esta é a extremidade inferior de um cabo superior. Caso o cabo seja inferior, será utilizado $x_{2,i}$.

Para a aplicação da EQ. 6.10 em 6.9, são necessárias suas derivadas parciais. Da

expressão “Nr 2” da TAB. 12.1, referente a β_i para cabos superiores, obtém-se:

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial x_{1,i}} = \frac{1}{a_i \cosh\left(\frac{x_{1,i}}{a_i}\right)} \quad (6.11)$$

Da expressão “4” da TAB. 12.1 obtém-se:

$$\frac{\partial x_{1,i}}{\partial a_i} = \frac{d}{\left(\sinh\left(\frac{x_{1,i}+l}{a_i}\right) \cdot (x_{1,i}+l) - \sinh\left(\frac{x_{1,i}}{a_i}\right) \cdot (x_{1,i})\right)} \quad (6.12)$$

E da expressão “1”, também da TAB. 12.1:

$$\frac{\partial a_i}{\partial h_i} = \frac{\partial}{\partial h_i} \left(\frac{h_i}{\gamma} \right) = \frac{1}{\gamma} \quad (6.13)$$

Para cabos inferiores, neste caso o cabo 3, a expressão “Nr 2” da TAB. 12.1 deve se referir a extremidade superior da catenária. Assim, a EQ. 6.11 fica:

$$\frac{\partial \beta_3}{\partial x_{1,3}} = \frac{1}{a_3 \cdot \cosh\left(\frac{x_{1,3}+l_3}{a_3}\right)}, \text{ pois } x_{2,3} = x_{1,3} + l_3 \quad (6.14)$$

Das EQ. 6.11 a 6.14, e da expressão “Nr 2” da TAB. 12.1, as derivadas parciais $\frac{\partial \beta_i}{\partial h_i}$, tanto para cabos superiores e como para inferiores, são dadas pela EQ. 6.15, onde β_i corresponde unicamente ao ângulo do cabo com a horizontal no ponto de fixação, em relação a R^C .

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial h_i} = \frac{d_i \cdot \cos(\beta_i)}{h_i \left(\sinh\left(\frac{x_{1,i} + l_i}{a_i}\right) \cdot (x_{1,i} + l_i) - \sinh\left(\frac{x_{1,i}}{a_i}\right) \cdot (x_{1,i}) \right)} \quad (6.15)$$

Assim o termo do Jacobiano de $F(\mathbf{h})$ em relação a f_2 , tanto para cabos superiores como para inferiores, conforme as EQ. 6.9 e 6.15, é dado pela EQ. 6.16.

$$\frac{\partial f_2}{\partial h_i} = u_{y,i} \left(\left| \operatorname{tg}(\beta_i) \right| + \frac{d_i}{\cos(\beta_i) \left(\sinh\left(\frac{x_{1,i} + l_i}{a_i}\right) \cdot (x_{1,i} + l_i) - \sinh\left(\frac{x_{1,i}}{a_i}\right) \cdot (x_{1,i}) \right)} \right) \quad (6.16)$$

6.2 CASO 2: PLATAFORMA PONTUAL 4m3T0R

O Caso 2 apresenta uma plataforma pontual, fixa por três cabos superiores, cujos pontos de ancoragem formam a face superior de um prisma triangular, e um cabo inferior a face oposta, conforme a FIG. 6.3. São apresentados também os eixos coordenados do referencial local.

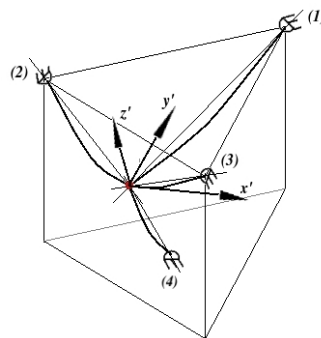


FIG. 6.3 - Modelo do manipulador 4m3T0R, com cabos em catenária

Em relação ao sistema 4m3T0R, a Equação de Equilíbrio do sistema linear $\mathbf{A}^T \mathbf{f} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$ pode ser escrita para determinada direção na forma:

$$\sum_{i=1}^m v_{j,i} f_i + w_j = 0, \text{ onde } j=x,y,z \quad (6.17)$$

Deseja-se escrever o sistema da EQ. 3.6 em termos de \mathbf{h} , da forma $\mathbf{A}_F \mathbf{h} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$. Para isso devem ser determinadas as componentes de $[\mathbf{U}]$. Neste caso, a matriz $[\mathbf{U}]$ contém um vetor horizontal $\mathbf{u}_{h,i}=[u_{x,i}, u_{y,i}]^T$ e um escalar $u_{z,i}=[-1,+1]$, para o i -ésimo cabo. O vetor $\mathbf{u}_{h,i}$ determina a direção da força h_i no plano horizontal, isto é, determina o plano vertical que contém o cabo em catenária, e $u_{z,i}$ indica o sentido de aplicação da componente de força vertical correspondente a h_i .

O ângulo de inclinação α_i do plano vertical do i -ésimo cabo com o eixo $0x$ é determinado em função de \mathbf{v}_i por:

$$\alpha_i = \left| \text{arc tg} \left(\frac{v_{y,i}}{v_{x,i}} \right) \right| \quad (6.18)$$

Assim $u_{j,i}$, com $j=x,y$, em função de α_i e $v_{j,i}$, e $u_{z,i}$ são dados por:

$$u_{x,i} = \frac{v_{x,i}}{|v_{x,i}|} \cdot \cos(\alpha_i) \quad (6.19)$$

$$u_{y,i} = \frac{v_{y,i}}{|v_{y,i}|} \cdot |\text{sen}(\alpha_i)| \quad (6.20)$$

$$u_{z,i} = \frac{v_{z,i}}{|v_{z,i}|} \quad (6.21)$$

Assim obtém-se $F(\mathbf{h})$ para o caso de translações tridimensionais, onde:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^m u_{x,i} h_i + w_x = 0 \\ f_2(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^m u_{y,i} h_i + w_y = 0 \\ f_3(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^m u_{z,i} |tg(\beta_i)| h_i + w_z = 0 \end{cases} \quad (6.22)$$

Obtendo-se o Jacobiano da função $F(\mathbf{h})$, tem-se para as direções $0x$ e $0y$:

$$\frac{\partial f_j}{\partial h_i} = u_{j,i}, \text{ onde } j=x,y \text{ e } i=1, \dots, m \quad (6.23)$$

e com respeito a direção $0z$, utiliza-se a EQ. 6.16 de maneira análoga ao caso anterior, bastando substituir $u_{y,i}$ por $u_{z,i}$.

6.3 CASO 3: PLATAFORMA EM BARRA 4m2T1R

Este caso é a extensão do Caso 1. Apresenta um manipulador contido plano $0xy$, com uma rotação no eixo $0z$. A plataforma é apresentada na FIG. 6.4.

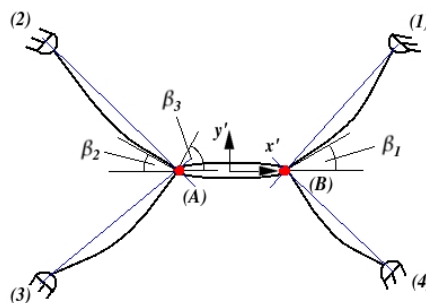


FIG. 6.4 - Modelo do manipulador 4m2T1R, com cabos em catenária

Este caso introduz a idéia sobre os equacionamentos envolvendo a rotação da plataforma. Por se tratar de uma rotação plana, os eixos Z e Z' coincidem.

Novamente neste exemplo é utilizada uma plataforma CRPM, do tipo 4m2T1R com 1 grau de rotação em torno do eixo Z' da plataforma. Não é apresentado β_4 , embora seja análogo a β_3 no ponto (B). Escrevendo a EQ. 3.6 por extenso, tem-se:

$$\begin{bmatrix} v_{x,1} & v_{x,2} & v_{x,3} & v_{x,4} \\ v_{y,1} & v_{y,2} & v_{y,3} & v_{y,4} \\ \vec{p}_1 \times \vec{v}_1 & \vec{p}_2 \times \vec{v}_2 & \vec{p}_2 \times \vec{v}_3 & \vec{p}_1 \times \vec{v}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ \tau \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.24)$$

Reescrevendo a EQ. 6.24 em termos da componente \mathbf{h} de força horizontal, tem-se:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^m u_{x,i} h_i + w_x = 0 \\ f_2(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^m u_{y,i} |\tan(\beta_i)| h_i + w_y = 0 \\ f_3(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^m (\vec{p}_j \times [u_{x,i} \quad u_{y,i} |\tan(\beta_i)| \quad 0]) h_i + \tau = 0 \end{cases} \quad (6.25)$$

Escrevendo $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{f}_i$ e f_i em termos de h_i tem-se, $\mathbf{v}_i = [u_{x,i} \cos(\beta_i) \quad u_{y,i} |\sin(\beta_i)| \quad 0]$ e $f_i = h_i / \cos(\beta_i)$. Considera-se que $\cos(\beta_i)$ seja sempre positivo. Assim, utiliza-se modulo de $\sin(\beta_i)$ pelos mesmos motivos que em $\tan(\beta_i)$ para a solução do problema não-linear. Resta determinar a matriz Jacobiana aplicada na EQ. 6.6.

O termo $\frac{\partial f_1}{\partial h_1}$ é dado pela EQ. 6.7, e o termo $\frac{\partial f_2}{\partial h_2}$ é dado pela EQ. 6.16. Baseado nestas duas equações obter a derivada parcial de $f_3(\mathbf{h})$, expressa pela EQ. 6.26.

$$\frac{\partial f_3}{\partial h_i} = \vec{p}_j \times \left[u_{x,i} \quad u_{y,i} \left(|\tan(\beta_i)| + \frac{d_i}{\cos(\beta_i) \left(\sinh\left(\frac{x_{1,i} + l_i}{a_i}\right) \cdot (x_{1,i} + l_i) - \sinh\left(\frac{x_{1,i}}{a_i}\right) \cdot (x_{1,i}) \right)} \right) \right], \quad 0 \quad (6.26)$$

A EQ. 6.26 constitui-se em uma das bases para as equações a serem determinadas no caso 3T3R. O Caso 4 é extensão do Caso 2 no espaço tridimensional.

6.4 CASO 4: PLATAFORMA EM PLACA PLANA 8m3T3R

Este caso representa o caso geral pois modela o movimento nos seis graus de liberdade segundo a formação de catenária nos cabos. Desta forma constitui-se no principal caso analisado, utilizando o resultado obtido nos três primeiros e se resume ao objetivo deste trabalho que é a “*Análise da Plataforma de Stewart com seis graus de liberdade para grandes espaços de trabalho*”.

Analogamente ao que foi dito no caso anterior, as equações referentes a translação foram desenvolvidas no Caso 2, e o método para desenvolvimento das equações referentes à rotação da plataforma está descrito no Caso 3. Desta forma, resta apenas expandi-las para o caso 3T3R.

Embora a geometria da plataforma e dos pontos de ancoragem não modifiquem o método de solução, neste caso será utilizada uma plataforma quadrilátera, com oito cabos, representada pela FIG. 6.5.

A escolha de uma plataforma quadrilátera e não triangular se justifica não somente pela simetria, mas pelo aproveitamento do modelo para o estudo da redundância nos cabos, e pela possibilidade de ocorrência de singularidades no centro do espaço de trabalho quanto a rotação em torno do eixo Oz .

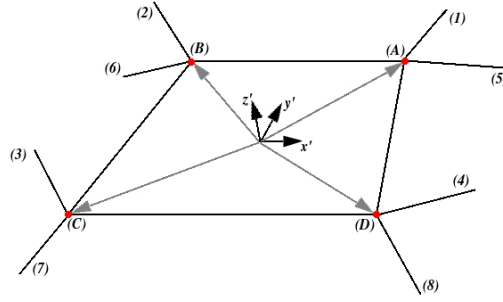


FIG. 6.5 - Modelo do manipulador 8m3T3R, com cabos em catenária

Para se obter a solução do sistema não-linear, as equações $F(\mathbf{h})=\mathbf{0}$ e suas derivadas devem ser determinadas. Do Caso 2, as equações referentes a translação da plataforma são dadas pela EQ. 6.22 e suas derivadas por 6.16 e 6.23 em termos de \mathbf{h} .

Em seguida devem ser determinadas as equações referentes a rotação. Neste trabalho utiliza-se a sequencia de rotação tridimensional ZYX. De acordo com a FIG. 6.5, para o sistema linear, tem-se:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i f_i + \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{0} & (6.27) \\ \sum_{i=1}^m (\mathbf{p}_j \times \mathbf{v}_i) f_i + \boldsymbol{\tau}_{ext} = \mathbf{0} & (6.28) \end{cases}$$

A equação vetorial de rotação do sistema pode ser escrita como:

$$\mathbf{f}_4(\mathbf{h}) = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ j=A, \dots, D}}^m (\mathbf{p}_j \times \mathbf{v}_i) f_i \right) + \boldsymbol{\tau}_{ext} = \mathbf{0}_{[3 \times 1]} \quad (6.29)$$

Para obter-se a EQ. 6.29 em função de h_i , deve-se ter v_i em termos de β_i . O ângulo α_i representa a inclinação do plano vertical que contem a catenária com a direção Ox e é dado pela EQ. 6.18.

A FIG. 6.6 apresenta graficamente os ângulos α_i e β_i .

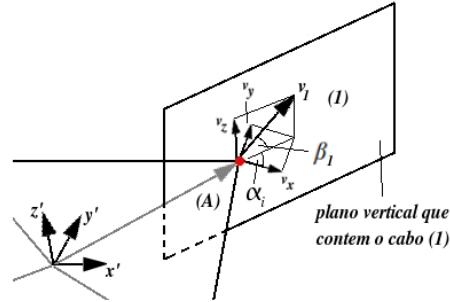


FIG. 6.6 – Vetor \mathbf{v}_1 no plano vertical que contem a catenária

Considerando as EQ. 6.18 a 6.21 e a definição de \mathbf{v}_i dada pela EQ. 3.1, $\mathbf{v}_i(\varpi_i)$ é dado por:

$$v_{x,i}(\varpi_i) = u_{x,i} \cdot \cos(\varpi_i) \quad (6.30)$$

$$v_{y,i}(\varpi_i) = u_{y,i} \cdot \cos(\varpi_i) \quad (6.31)$$

$$v_{z,i}(\varpi_i) = \sin(\varpi_i) \quad (6.32)$$

Deve-se ter em mente que $u_{j,i}$ em $\mathbf{v}_i = [v_{x,i} \cos(\varpi_i) \quad v_{y,i} \cos(\varpi_i) \quad \sin(\varpi_i)]^T$ é função de ϖ_i .

Escrevendo a EQ. 6.29 em termos de h_i , tem-se:

$$f_4(\mathbf{h}) = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ j=A, \dots, D}}^m (\mathbf{p}_j \times [u_{x,i} \ ; \ u_{y,i} \ ; \ u_{z,i} | \operatorname{tg}(\varpi_i)|]) \cdot h_i \right) + \varpi_{ext} = \mathbf{0}_{[3 \times 1]} \quad (6.33)$$

Analogamente a determinação da derivada de $f_3(\mathbf{h})$ em 6.22, recorrendo-se a EQ. 6.16, obtém-se a derivada parcial de $f_4(\mathbf{h})$.

$$\frac{\partial f_4}{\partial h_i} = \mathbf{p}_j \times \left[u_{x,i} \ ; \ u_{y,i} \ ; \ u_{z,i} | \operatorname{tg}(\varpi_i)| + \frac{d_i}{\cos(\varpi_i) \cdot \left(\sinh\left(\frac{x_{1,i} + l_i}{a_i}\right) \cdot (x_{1,i} + l_i) - \sinh\left(\frac{x_{1,i}}{a_i}\right) \cdot (x_{1,i}) \right)} \right] \quad (6.34)$$

Analisando como exemplo o cabo (1) pode-se verificar que, *por definição*, o vetor \mathbf{v}_1 indica a direção de aplicação de força deste cabo sobre a plataforma. Porém, como os cabos

possuem massa, \mathbf{v}_I não pode ser determinado como vetor unitário de \mathbf{l}_I , por não possuir necessariamente a mesma direção da reta formada pelos “ponto de fixação \mathbf{p}_A e de ancoragem \mathbf{b}_I ”. Logo a direção de \mathbf{v}_I é determinada por β_i em função de h_i .

Na TAB. 6.1 são apresentadas as expressões referentes ao caso geral 3T3R, e que são utilizadas na análise do espaço de trabalho. Todas as equações apresentadas na TAB. 12.1 são utilizadas nas deduções destas equações.

TAB. 6.1 - Tabela de fórmulas para o Caso 3T3R

	Expressão	EQ.
1	$\begin{cases} f_1(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^m u_{x,i} h_i + w_x = 0 \\ f_2(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^m u_{y,i} h_i + w_y = 0 \\ f_3(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^m u_{z,i} tg(\alpha_i) h_i + w_z = 0 \end{cases}$	(6.22)
2	$f_4(\mathbf{H}) = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ j=A, \dots, D}}^m (\mathbf{p}_j \times [u_{x,i} ; u_{y,i} ; u_{z,i} tg(\alpha_i)]) \cdot h_i \right) + \mathbf{p}_{ext} = \mathbf{0}_{[3 \times 1]}$	(6.33)
	<p>$\mathbf{A}_F \cdot \mathbf{h} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$, onde:</p> $\mathbf{A}_F = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{F,1} & \cdots & \mathbf{v}_{F,m} \\ \mathbf{p}_A \times \mathbf{v}_{F,1} & \cdots & \mathbf{p}_D \times \mathbf{v}_{F,m} \end{bmatrix}, \text{ e}$ $\mathbf{v}_{F,i} = [u_{x,i} ; u_{y,i} ; u_{z,i} tg(\alpha_i)]$	
3	$F(\mathbf{h}) = \begin{cases} f_1(\mathbf{h}) = 0 \\ f_2(\mathbf{h}) = 0 \\ f_3(\mathbf{h}) = 0 \\ f_4(\mathbf{h}) = 0 \end{cases}$	
	$\alpha_i = \left \text{arc tg} \left(\frac{v_{y,i}}{v_{x,i}} \right) \right $	(6.18)
	$u_{x,i} = \frac{v_{x,i}}{ v_{x,i} } \cdot \cos(\alpha_i)$	(6.19)
	$u_{y,i} = \frac{v_{y,i}}{ v_{y,i} } \cdot \text{sen}(\alpha_i)$	(6.20)

TAB. 6.1 - Tabela de fórmulas para o Caso 3T3R

	Expressão	EQ.
	$u_{z,i} = \frac{v_{z,i}}{ v_{z,i} }$	(6.21)
4	$\frac{\partial f_j}{\partial h_i} = u_{j,i}$, onde $j=1,2$ e $i=1,\dots,m$	(6.23)
5	$\frac{\partial f_3}{\partial h_i} = u_{z,i} tg(\beta_i) + \frac{d_i}{\cos(\beta_i) \left(\sinh\left(\frac{x_{1,i}+l_i}{a_i}\right) \cdot (x_{1,i}+l_i) - \sinh\left(\frac{x_{1,i}}{a_i}\right) \cdot (x_{1,i}) \right)}$	(6.16)
6	$\frac{\partial f_4}{\partial h_i} = p_j \times \left[u_{x,i} ; u_{y,i} ; u_{z,i} tg(\beta_i) + \frac{d_i}{\cos(\beta_i) \left(\sinh\left(\frac{x_{1,i}+l_i}{a_i}\right) \cdot (x_{1,i}+l_i) - \sinh\left(\frac{x_{1,i}}{a_i}\right) \cdot (x_{1,i}) \right)} \right]$	(6.34)
7	$\frac{\partial \beta_i}{\partial h_i} = \frac{d_i \cdot \cos(\beta_i)}{h_i \left(\sinh\left(\frac{x_{1,i}+l_i}{a_i}\right) \cdot (x_{1,i}+l_i) - \sinh\left(\frac{x_{1,i}}{a_i}\right) \cdot (x_{1,i}) \right)}$	(6.15)
	Parâmetros referentes a catenária como: Tensão em um ponto qualquer do cabo; Comprimento de cabo utilizado; e, Deformação longitudinal do cabo sob tensão, são apresentados na TAB. 12.1 do APÊNDICE 1 – Definições sobre fios e cabos em catenária.	

Lembrando que f_i , para $i=1, \dots, 3$ são escalares e que f_4 é uma função vetorial em \mathbf{R}^3 , tem-se que $F(\mathbf{h})=\mathbf{0}$ possui seis equações de restrição quanto ao forçamento.

6.5 MÉTODO ALTERNATIVO DA SOLUÇÃO BASEADA EM COMPONENTES DE FORÇAS HORIZONTAIS PARA CASOS EM QUE EXISTEM CABOS NA VERTICAL

Todo o método de solução desenvolvido baseia-se determinação das forças nos cabos a partir se suas componentes horizontais, devido a esta componente ser constante ao longo de toda a catenária.

Contudo não é raro o caso em que um ou mais cabos se encontrem totalmente na vertical, ou tão próximos desta que inviabilizem a solução numérica. Para contemplar estes casos foi desenvolvido um método de solução alternativo.

Baseando-se nas expressões Nr 1 e Nr 2 da TAB. 6.1, a equação de equilíbrio dinâmico é escrita como:

$$F(\mathbf{h}) = \begin{cases} u_{x,1}h_2 + u_{x,2}h_2 + \dots + u_{x,m}h_m + w_x = 0 \\ u_{y,1}h_2 + u_{y,2}h_2 + \dots + u_{y,m}h_m + w_y = 0 \\ u_{z,i}|\operatorname{tg}(\beta_1)|h_1 + u_{z,i}|\operatorname{tg}(\beta_2)|h_2 + \dots + u_{z,i}|\operatorname{tg}(\beta_m)|h_m + w_z = 0 \\ \mathbf{p}_A \times \mathbf{v}_1 \frac{h_1}{\cos(\beta_1)} + \mathbf{p}_B \times \mathbf{v}_2 \frac{h_2}{\cos(\beta_2)} + \dots + \mathbf{p}_D \times \mathbf{v}_m \frac{h_m}{\cos(\beta_m)} + \boldsymbol{\tau}_{ext} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (6.35)$$

Analogamente ao Caso 1, esta equação pode ser escrita matricialmente na forma $\mathbf{A}_F \mathbf{h} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$ onde \mathbf{A}_F , de modo semelhante a Matriz de Estrutura \mathbf{A}^T é composta por:

$$\mathbf{A}_F = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{F,1} & \dots & \mathbf{v}_{F,m} \\ \mathbf{k}_{F,1} & \dots & \mathbf{k}_{F,m} \end{bmatrix}_{[n \times m]} \quad (6.36)$$

Observando as EQ. 6.35 e 6.36 é fácil verificar que cada coluna de \mathbf{A}_F corresponde a um \mathbf{h}_i , exceto no caso em que determinado cabo se aproxime da vertical. Neste caso, o valor da componente de força horizontal tenderá a zero e os coeficientes do sistema representados por esta *i-ésima* coluna se tornarão ineficazes. Desta forma o método de solução alternativa considera estes cabos como retilíneos e com massa definida. Desta forma considerações como deformação elástica, peso do cabo e compensação nos atuadores continuam válidas para o sistema.

Suponha que o sistema da EQ. 6.35 $n \times m$ possui o *i-ésimo* cabo na vertical. Assim é atribuído zero a toda *i-ésima* coluna de \mathbf{A}_F e uma nova coluna $(m+1)$ -ésima é acrescentada a esta matriz. A variável referente ao modulo da força neste cabo deixa de ser a componente horizontal h_i . Em seu lugar é acrescentada uma variável de tração $f_{(m+1)}$ no vetor \mathbf{h} conforme a EQ. 6.37.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_F & \vdots & \mathbf{A}_{(:,i)}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \dots \\ f_{m+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ext} \\ \boldsymbol{\tau}_{ext} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.37)$$

Este procedimento se repete para quantos cabos houverem na vertical simultaneamente, na posição da plataforma analisada. Um sistema $[nxm]$ com q cabos na vertical se torna um sistema $[n \times m+q]$, onde q elementos de \mathbf{h} são substituídos na solução pelos f_{m+1}, \dots, f_{m+q} . Assim o sistema é resolvido pelos métodos conhecidos e ao i -ésimo cabo é atribuído diretamente o valor f_{m+1} .

O comprimento do cabo vertical é dado diretamente pelo vetor comprimento de cabo. Para determinar a deformação longitudinal do cabo vertical, recorre-se a EQ. 6.38 que descreve a curva de tensão em um ponto qualquer do cabo, partindo-se da plataforma ($l=0$ no ponto de fixação).

$$T(l) = f_i + v_{z,i} P_C l \quad (6.38)$$

Onde

- f_i é a tração do cabo no ponto de fixação na plataforma;
- P_C é o peso do unidade de comprimento de cabo; e,
- l é o comprimento de cabo medido à partir do ponto de fixação.

Aplicando a expressão “Nr 5” da Tab 12.1, do APÊNDICE 1, na EQ. 12.24, obtém-se a expressão da deformação longitudinal para um cabo vertical.

$$\Delta L = \int_0^L \frac{f_i + v_{z,i} P_C l}{A \cdot E} dl = \frac{1}{AE} \left(f_i L + v_{z,i} P_C \frac{L^2}{2} \right) \quad (6.39)$$

onde L é o módulo do vetor comprimento de cabo, visto que o cabo é considerado retilíneo⁵.

⁵ $L = \|\mathbf{l}_i\|$

6.6 ETAPAS DO MÉTODO DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO-LINEAR

Foi demonstrado que a obtenção do vetor de força nos cabos se dá pela solução numérica de um sistema não-linear. Logo de acordo a Seção 2.1, define-se o caso como não-linear.

Para a aplicação deste método de solução, inicialmente deve-se resolver o problema linear de acordo com a FIG. 5.7. O espaço de trabalho obtido como solução será utilizado como condição inicial. As posturas excluídas do espaço de trabalho controlável linear, não serão utilizadas como dados de entrada à solução do problema não-linear.

A FIG. 6.7 apresenta as etapas da solução do problema com cabos de massa não-nula.

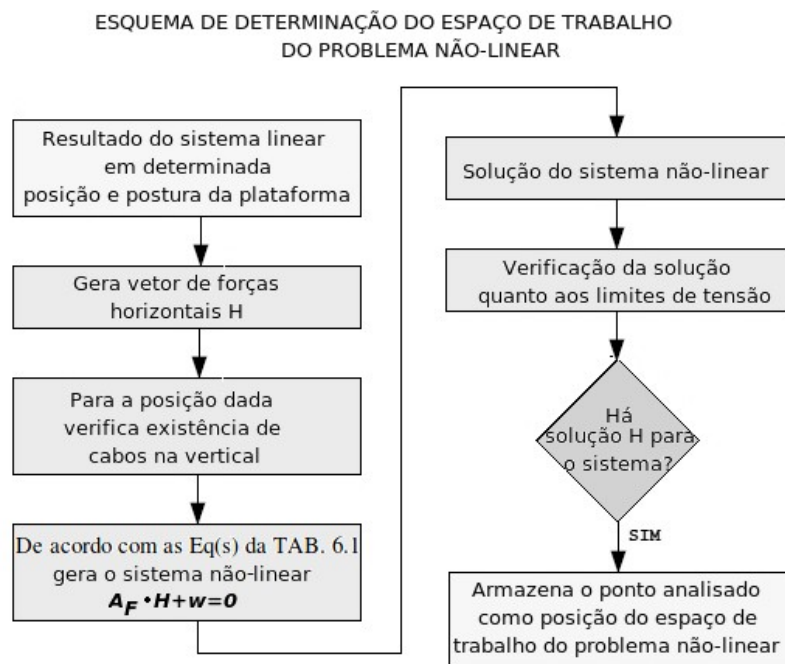


FIG. 6.7 – Esquema de determinação do Espaço de Trabalho Controlável não-linear

A condição inicial de forças horizontais, obtida a partir da solução em f do problema linear pode ser obtida por:

$$h_i = \sqrt{(f_{x,i})^2 + (f_{y,i})^2} = \sqrt{(f_i v_{x,i})^2 + (f_i v_{y,i})^2} = f_i \sqrt{(v_{x,i})^2 + (v_{y,i})^2} \quad (6.40)$$

Conforme o método aplicado no sistema linear, os passos apresentados na FIG. 6.7 são

executados para cada postura da plataforma. Assim todos os pontos do espaço de trabalho obtido anteriormente são verificados em busca de solução. O quadro que indica “*Solução do sistema não-linear*” inclui o Método de Newton e após a verificação quanto aos limites de tensão, pode-se ainda verificar se os limites de torque nos atuadores são atendidos, conforme é citado em (FANG, 2005).

Caso haja solução para o sistema, a postura e todos os parâmetros referentes a configuração da catenária são armazenados como pertencentes ao espaço de trabalho não-linear.

6.7 RESULTADOS ESPERADOS

Devido a solução do problema não-linear ser obtida a partir da solução linear, alguns resultados podem ser previstos. Basicamente, em relação ao espaço de trabalho com cabos de massa nula, são esperados os seguintes comportamentos:

- a) Redução do espaço de trabalho no modelo não-linear; e,
- b) Obtenção de trações mais próximas dos limites permissíveis.

Os dois resultados citados estão relacionados a mudança de direção do vetor \mathbf{v} devido a consideração de massa nos cabos. Ocorrendo a formação de catenária, em geral, a direção e intensidade da tensão nos pontos de fixação e ancoragem serão diferentes.

A FIG. 6.8 apresenta a variação de \mathbf{v} em um manipulador CRPM 2T0R.

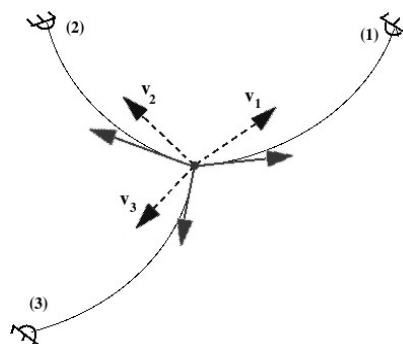


FIG. 6.8 – Representação dos vetores unitários em um manipulador CRPM 2T0R

A EQ. 3.6 deve ser satisfeita para que uma mesma postura da plataforma pertença tanto ao espaço de trabalho de sistemas com cabos de massa nula como em sistemas com cabos de massa não-nula.

Os vetores unitários v_i tracejados se referem a cabos de massa nula, sendo retilíneos na direção do ponto de ancoragem, e os contínuos de referem a cabos de massa não-nula, tangentes a catenária no ponto de fixação.

É possível verificar, em cabos superiores e inferiores, que a formação da catenária rotaciona o vetor v em torno do ponto de fixação, na direção da força peso. Considerando que a curva formada por determinado cabo seja estritamente crescente, conforme apresentado pela FIG. 12.6, o ponto superior do cabo, seja ele de fixação ou ancoragem suportará a tração do ponto inferior acrescida dos efeitos da força peso.

De acordo com o equacionamento descrito no APÊNDICE 1, o cabo 3 possuirá tração $T_{3,1} = H / \cos(\alpha_1)$ no ponto de ancoragem e $T_{3,2} = H / \cos(\alpha_2)$ no ponto de fixação⁶, onde $\alpha_1 > \alpha_2$. Logo, $T_{3,2} > T_{3,1}$. Analogamente, os cabos superiores apresentam $T_{1,1} < T_{1,2}$ e $T_{2,1} < T_{2,2}$. Considerando que $T_{3,2} > T_{3,Linear}$, os cabos 1 e 2 devem suportar esforços maiores nos pontos de fixação.

Analisando a tensão ao longo dos cabos superiores, tem-se que $T_{1,2} > T_{1,1}$ e $T_{2,2} > T_{2,1}$. Acrescido a isto tem-se que, para suportar $T_{3,2}$ devem possuir $T_{1,1}$ e $T_{2,1}$ maiores que $T_{1,Linear}$ e $T_{2,Linear}$. Por este fato espera-se obter como resultado tensões mais elevadas.

Supondo agora que determinado ponto do espaço de trabalho já possua tensões próximas aos limites permissíveis, sua diminuição ou elevação pode excluir tal ponto do espaço de trabalho solução.

Como normalmente estes pontos estão próximos do limite do espaço de trabalho, ocorrerá sua redução.

6 Em $T_{i,j}$, i refere-se ao i -ésimo cabo e $j=1,2$ refere-se a: 1-ponto inferior e 2-ponto superior da catenária.

7 DADOS DE PROJETO E ESPECIFICAÇÃO DO CABO DE AÇO

Como região de ancoragem foram buscados exemplos reais, com dimensões apropriadas ao manipulador. Para a simulação de resultados, foram pesquisados cabos de aço da empresa KRK Hidroserv®, representante da Cabos de Aço CASAR no Brasil, e da CIMAF CABOS S.A. Foram feitos contatos com as duas empresas, que forneceram material técnico para a análise das características de projeto dos cabos de aço e de sua utilização.

7.1 DEFINIÇÃO DA REGIÃO DE ANCORAGEM

Para a simulação do manipulador em grandes espaços de trabalho, são utilizados como sólidos de ancoragem:

a) Um hangar construído na França em 1923 descrito em (PORTO, 2009) e apresentado na FIG. 7.1 , com 300 metros de comprimento; e,

b) Um vale hipotético baseado no Patio Marechal Mascarenhas de Moraes, da Academia Militar das Agulhas Negras, com dimensões de 200m de largura, 250m de comprimento e 150m de altura conforme FIG. 7.2.

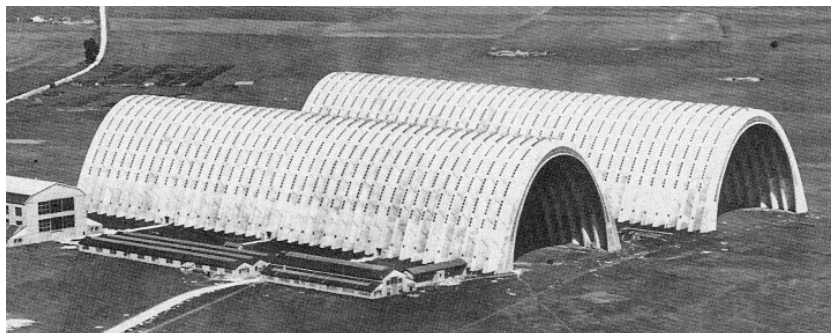


FIG. 7.1 – Duplo hangar de Orly de Eugène Freyssine, 1923 (PORTO, 2009)



FIG. 7.2 – Foto do Pátio Mal Mascarenhas de Moraes (Arquivo pessoal)

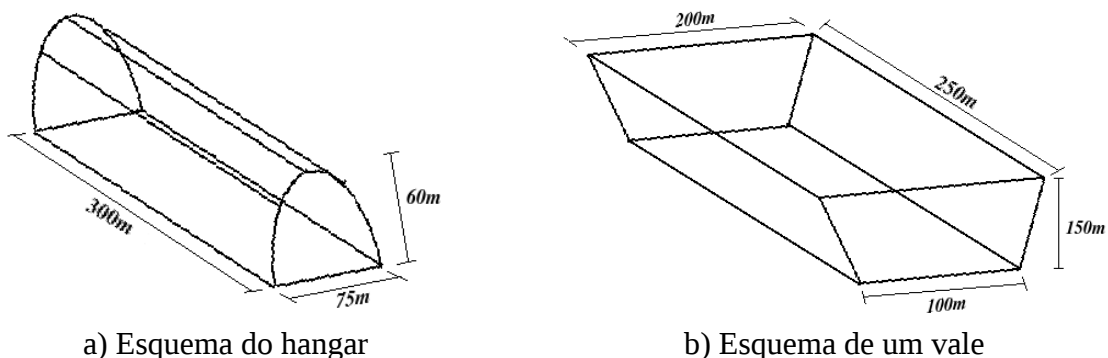
(PORTO, 2009) indica que o hangar, destinado a abrigar dirigíveis, foi construído à partir de arcos parabólicos com vértice 60m acima do chão, 75m de base, e 300m de comprimento.

Assim é possível equacionar a parábola e obter a localização dos pontos de ancoragem. Este trabalho não pretende questionar a resistência da estrutura, mas apenas utilizar um exemplo real de espaço de ancoragem para a simulação. A equação da parábola é dada por:

$$Y = -0,0426667 \cdot X^2 + 60 \quad (7.1)$$

O vale é aproximado para um prisma trapezoidal, onde a face inferior e superior são retângulos de dimensão $100m \times 250m$ e $200m \times 250m$, respectivamente, e altura de 150m, e foi assim proposto devido a este tipo de relevo ser bastante comum na Região Sudeste, onde se encontram os Centros de Pesquisa e o Comando da Aviação do Exército.

A FIG. 7.3 apresenta os espaços de trabalho de maneira esquemática.



a) Esquema do hangar

b) Esquema de um vale

FIG. 7.3 – Sólidos de ancoragem (Esquemático)

Analisando os espaços de trabalho quanto as dimensões e razão de aspecto $R.A._{HANGAR}=5,0$ e vale $R.A._{VALE}=1,6$, e baseado nas conclusões de (KAWAMURA et al, 1995), verifica-se que o espaço de trabalho definido pelo hangar pode ser aplicado a movimentos com grandes acelerações e velocidades longitudinais, e o espaço definido pelo vale trapezoidal garante uma maior utilização do espaço de trabalho como um todo, podendo ser utilizado para manobras que envolvam curvas e inclinações da plataforma.

7.2 DEFINIÇÃO DA PLATAFORMA E ESPECIFICAÇÃO DO CABO DE AÇO

Como uma possível aplicação deste trabalho é voltada para a simulação de aeronaves de asas rotativas, a plataforma será modelada como a cabine de uma aeronave, sem cauda e motor baseado no helicóptero EC-120 Colibri da Helibrás, escolhido por ser de fabricação nacional, visando facilitar a obtenção de dados no caso de implementação de um projeto e por, dentre as aeronaves da Helibrás, ser a menor. A ficha técnica da aeronave disponível no sítio de internet do fabricante se encontra no ANEXO 4. Abaixo são apresentadas as vistas do EC-120 Colibri da Helibrás.

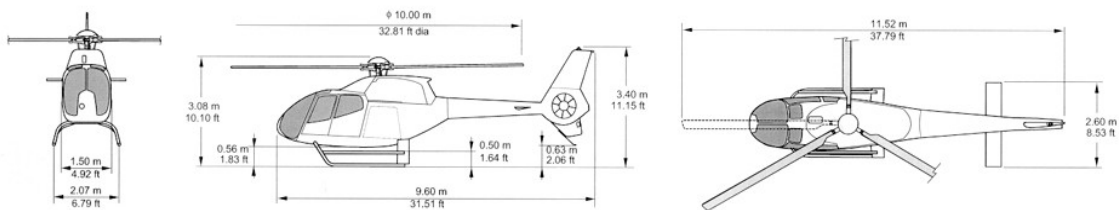


FIG. 7.4 – Vistas de frente, lateral e de topo do helicóptero EC-120 Colibri (http://www.helibras.com.br/produtos_det.php?id=1)

De acordo com a Ficha Técnica, a massa total da aeronave vazia é de 965,0kg. Como a plataforma esta sendo modelada somente como a cabine deste helicóptero, estima-se que seu peso sem cauda, rotor principal e motor seja de 400 kg.

Baseado na FIG. 7.4 a plataforma será modelada como um retângulo de dimensões $4,8m \times 1,5m$ visando manter as dimensões da cabine e apresentar centro de gravidade

centroidal. A ficha da aeronave fornece alguns dados importantes para a simulação, que são apresentados na TAB. 7.1.

TAB. 7.1 – Dados técnicos do EC-120 Colibri

Velocidade máxima	278 km/h
Velocidade de cruzeiro	223 km/h
Razão de subida	5,84 m/s

http://www.helibras.com.br/produtos_det.php?id=1

O cabo utilizado será o CIMAF 6x25F+AACI escolhido por possuir aplicação recomendada pelo fabricante como cabo de tração e segurança em elevadores de obras e por possuir limites de ruptura elevados. Algumas noções básicas sobre a aplicação, utilização e características de cabos de aço são apresentadas no ANEXO 1. A recomendação de uso para elevadores de obras se encontra no ANEXO 2 e a ficha técnica deste cabo no ANEXO 3. Para o cabo especificado, novo, e com alma de aço, são fornecidos pelo fabricante o *Modulo de elasticidade* $E=2500 \text{ N/mm}^2$.

De acordo com a TAB. 12.1 o coeficiente de segurança (CS ou fator de segurança FS) para elevadores de obras é 10 e para elevadores de comerciais e residenciais 12. Foram escolhidos cabos aplicados a elevadores de obras por serem mais robustos e estarem constantemente sujeitos a condições de uso mais severas. Complementando isto e considerando que a plataforma poderá estar sujeita a grandes acelerações e mudanças bruscas de direção aplicou-se o coeficiente de segurança 12, utilizado em elevadores comerciais.

Define-se limite superior de tração como sendo a tração mínima necessária para que um único cabo possa sustentar a plataforma no ponto mais elevado do espaço de trabalho, supondo que nenhum outro exerça forças verticais, conforme apresentado pela FIG. 7.5.

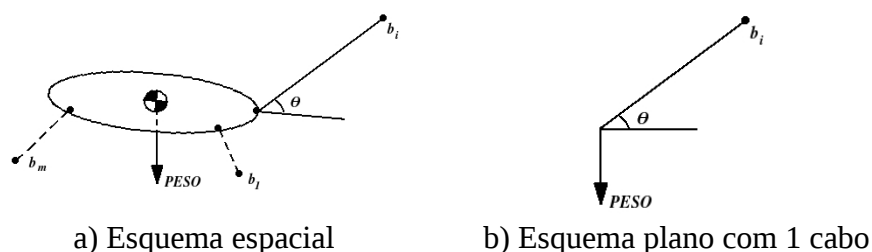


FIG. 7.5 – Esquema de sustentação da plataforma por um único cabo

Para determinar f_{max} , a TAB. 7.2 apresenta vários ângulos de inclinação, conforme esquema da FIG. 7.5 b), e suas respectivas forças de tração e carga de ruptura em KN e tf para CS 12. A carga de ruptura fornece o diâmetro e densidade linear do cabo de acordo com o ANEXO 3.

TAB. 7.2 – Cargas de ruptura para especificação de cabo em função do ângulo de inclinação com a horizontal, para cabos CIMAF 6x25F+AACI.

θ	F_{max} (KN)	F_{rup} (CS=12) (KN)	F_{rup} (tf)	\varnothing do cabo (mm)	Massa Aprox. (Kg/m)
5°	45,0045	540,05	55,07	29,00	3,447
10°	22,5882	271,06	27,64	22,00	2,036
15°	15,1550	181,86	18,55	16,00	1,057
20°	11,4683	137,62	14,03	14,50	0,867

ROCHA, 2009, VERRET, 1997, http://www.cimafbrasil.com.br/produtos_aplic.php,

Por outro lado, define-se como limite inferior de tração a tração mínima para que o sistema mantenha-se tenso. Como proposta inicial, considera-se que 15° sejam uma inclinação razoável. Desta forma, os limites de tração são estimados em $1,0kN$ e $15,0kN$.

De acordo com a Apostila Técnica CIMAF, a área de referência da seção transversal (A) de um cabo de aço é dada pela EQ. 7.2.

$$A = F \cdot d^2 \quad (7.2)$$

Onde F é um fator de multiplicação tabelado pelo fabricante e d é o diâmetro nominal do cabo, segundo a especificação desejada. Para cabos 6x25F tem-se o fator $F=0,418$, e para cabos de 6 pernas AACI deve-se acrescentar 15% a sua área de referência. A área nominal da seção transversal do cabo é dada pela EQ. 7.3.

$$A = (1,15) \cdot (0,418) \cdot d^2 \quad (7.3)$$

Ainda segundo a Apostila Técnica, após o cabo entrar em uso, devido a acomodação de pernas e arames, seu módulo de elasticidade aumenta em 20%.

Utilizando CS 12 e f_{max} $15kN$, obtem-se $f_{rup}=180kN$ que especifica um cabo de 16mm de

diâmetro (5/8”) e massa específica de 1,057 kg/m e Área de referência $A_r=123,06 \text{ mm}^2$.

Para que o cabo se comporte como uma mola linear elástica, as trações aplicadas não devem ultrapassar o limite elástico estimado, correspondente a 55% do valor de f_{rup} . Para a tensão de ruptura de $181,86 \text{ KN}$, tem-se o limite elástico σ_Y em torno de 100 KN . Apesar do limite máximo de tensão permitido ser de 15 KN , o modelo dinâmico da plataforma desconsidera, entre outros, os efeitos da vibração e do arrasto, este devido a correntes de vento, sobre os cabos.

7.3 DADOS DE ENTRADA DO PROBLEMA

Inicialmente são definidos os dados de entrada dos Espaço A e B:

- a) A posição dos referenciais R^G e R^L ;
- b) A Matriz dos pontos de ancoragem; e,
- c) A Matriz dos pontos de fixação, indicando a geometria da plataforma.

Em ambos os casos o referencial global se encontra no centro da aresta anterior, da face inferior, com a orientação em Ox paralela a sua direção longitudinal.

Define-se como *Espaço A* o Hangar e *Espaço B* o vale trapezoidal. A FIG. 7.6 apresenta os sólidos de ancoragem:

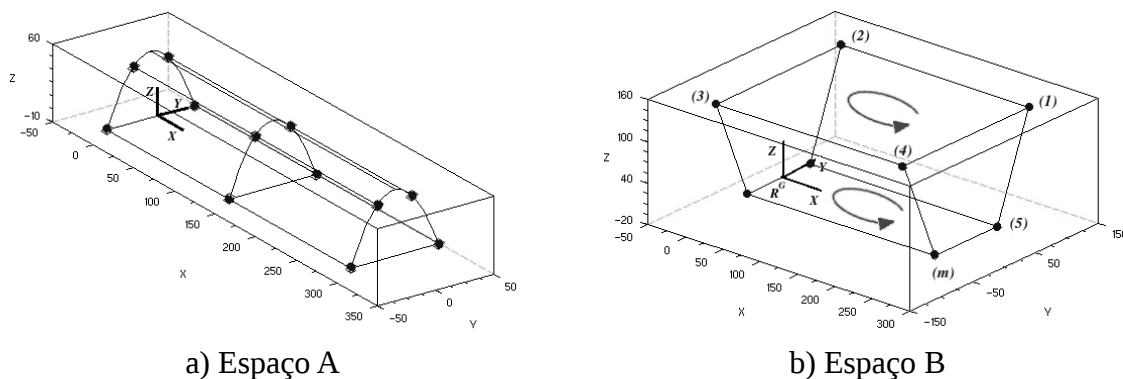


FIG 7.6 – Espaços de Trabalho com os pontos de ancoragem e eixos coordenados

Para o Espaço A, são definidos 12 pontos de ancoragem, dispostos em seções transversais do hangar em $x=0$, $x=150$ e $x=300$. O Espaço B apresenta oito pontos de ancoragem dispostos nos vértices do prisma. Em B, com $n=6$, a região viável é bi-dimensional, sendo possível ilustrá-la se for o caso. Inicialmente desejava-se que os dois sólidos possuíssem o mesmo número de ponto de ancoragem, contudo a razão de aspecto consideravelmente maior levou a inclusão de mais 2 pontos superiores e 2 inferiores no centro do hangar. A inclusão de dois pontos inferiores pretende evitar que a região inferior central se torne não-controlável.

Os pontos de ancoragem são ordenados em relação ao ponto médio de \mathbf{b} , inicialmente na região superior e em seguida na região inferior, e nestas pelo sentido de rotação em Oz à partir de Ox conforme apresentado na FIG. 7.6 b). No código foi gerada uma rotina que verifica e ordena os pontos de ancoragem e fixação de acordo com esta convenção, logo não há necessidade de gerar a matriz \mathbf{B} ordenada.

A Matriz \mathbf{b} para os espaços de trabalho A e B será:

$$\mathbf{B}_A = \begin{bmatrix} 300 & 150 & 0 & 0 & 150 & 300 & 300 & 150 & 0 & 0 & 150 & 300 \\ 15 & 15 & 15 & -15 & -15 & -15 & 37,5 & 37,5 & 37,5 & -37,5 & -37,5 & -37,5 \\ 50,4 & 50,4 & 50,4 & 50,4 & 50,4 & 50,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

$$\mathbf{B}_B = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 0 & 250 & 250 & 0 & 0 & 250 \\ 100 & 100 & -100 & -100 & 50 & 50 & -50 & -50 \\ 150 & 150 & 150 & 150 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

O referencial local é centroidal. A plataforma possui 6 ou 4 pontos de fixação, conforme o caso. As matrizes \mathbf{P} contendo os pontos de ancoragem \mathbf{p}_j no referencial local são dadas.

$$\mathbf{P}_A^L = \begin{bmatrix} 2,4 & 0 & -2,4 & -2,4 & 0 & 2,4 \\ 0,75 & 0,75 & 0,75 & -0,75 & -0,75 & -0,75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

$$\mathbf{P}_B^L = \begin{bmatrix} 2,4 & -2,4 & -2,4 & 2,4 \\ 0,75 & 0,75 & -0,75 & -0,75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

Por convenção, as colunas de \mathbf{b} são indicadas por \mathbf{b}_i onde $i=1, \dots, m$ para os m cabos e as colunas de \mathbf{P} por \mathbf{p}_j , onde $j=A, \dots, F$ para o Espaço A e $j=A, \dots, D$ para o Espaço B. A partir daí as matrizes de estrutura geradas para cada caso são:

$$\mathbf{A}_A^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_6 & \mathbf{v}_7 & \cdots & \mathbf{v}_{12} \\ \mathbf{p}_A \times \mathbf{v}_1 & \mathbf{p}_B \times \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{p}_F \times \mathbf{v}_6 & \mathbf{p}_A \times \mathbf{v}_7 & \cdots & \mathbf{p}_F \times \mathbf{v}_{12} \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

$$\mathbf{A}_B^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_8 \\ \mathbf{p}_A \times \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{p}_D \times \mathbf{v}_8 \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

7.4 VALIDAÇÃO DO ESPAÇO DE TRABALHO

Nesta seção verifica-se a validade dos Espaços de Trabalho obtidos em função dos dados de projeto definidos, quanto a sua funcionalidade e atendimento aos objetivos do trabalho. Para o Espaço A tem-se um manipulador RRPM 12m3T3R, e para o Espaço B um manipulador RRPM 8m3T3R.

De acordo com o método descrito, para cada posição e orientação devem ser resolvidos $C(2m, r)$ sistemas lineares conforme apresentado pela FIG. 5.9, e um sistema não-linear em relação aos parâmetros do cabo, de acordo com a FIG. 6.7. Logo, para o espaço A devem ser resolvidos $C(24, 6) = 134.596$ sistemas lineares 6×6 e um sistema não-linear 7×6 e para o espaço B, $C(16, 2) = 120$ sistemas lineares 2×2 e um sistema não-linear 7×6 , por ponto.

Esta diferença entre o custo computacional de cada caso tem consequências diretas no método numérico, impedindo a apresentação de resultados no Espaço A. As trajetórias propostas e o espaço de trabalho A esperado são apresentados no APÊNDICE 7.

A FIG. 7.7 apresenta as posições pertencentes o espaço de trabalho B, com cabos de massa nula, para a orientação $\Theta = \mathbf{0}_{[3 \times 1]}$. Para a varredura utiliza-se passo de 25 metros.

As posições referentes a cabos de massa não-nula se encontram envoltas como destaque. Comparando as posições ara cabos de massa nula e não-nula verifica-se que ocorre uma

redução significativa do espaço de trabalho para cabos de massa não-nula.

Para visualizar o espaço de trabalho para cabos de massa não-nula a FIG. 7.8 apresentada as vistas frontal e lateral deste caso

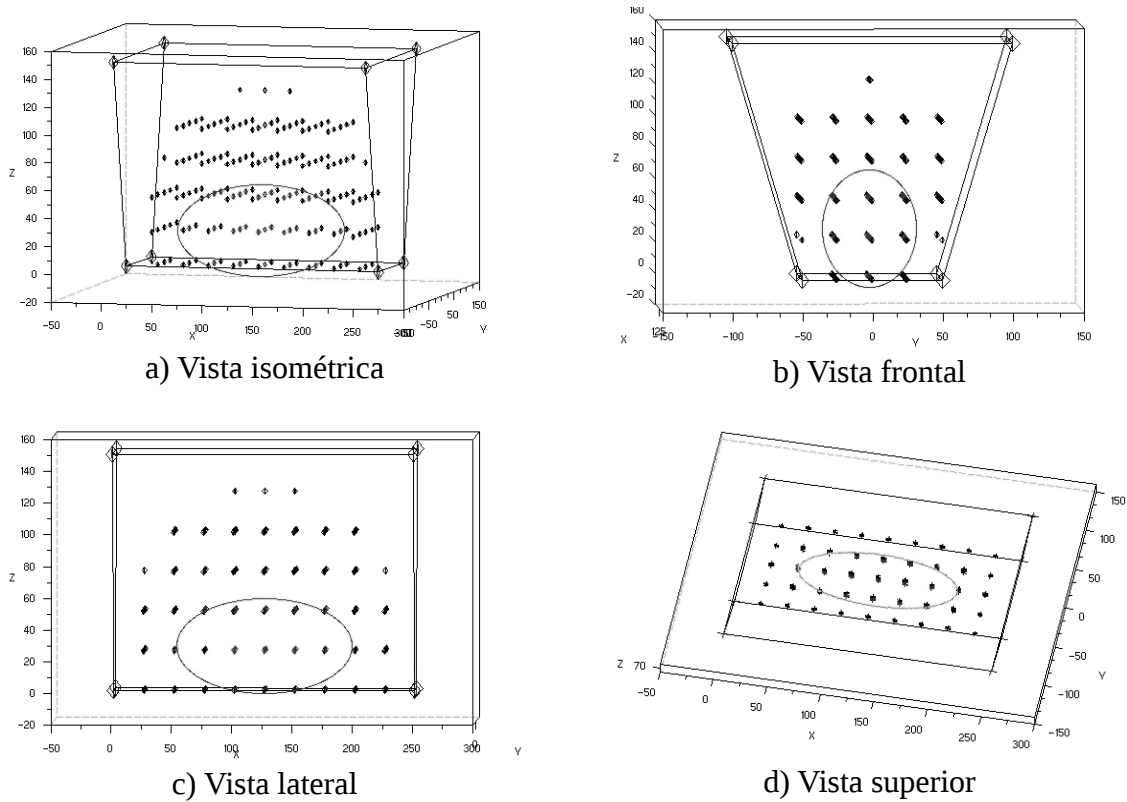


FIG. 7.7 – Vistas do Espaço B

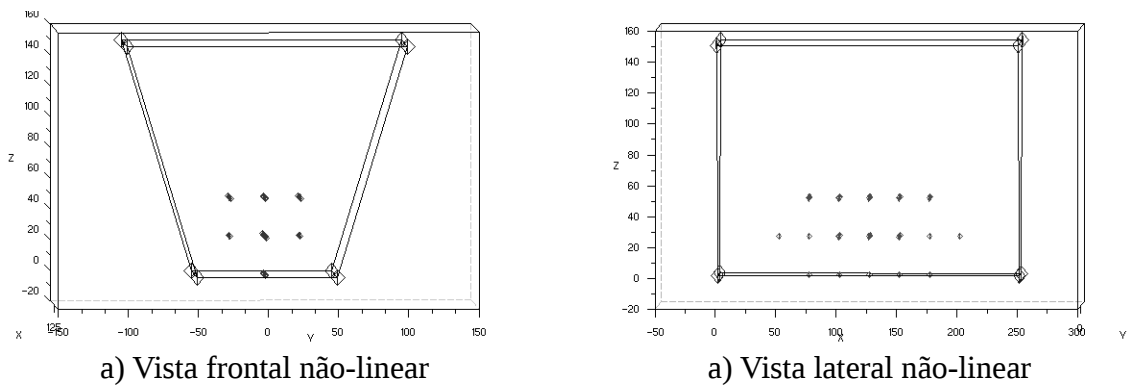


FIG. 7.8 – Vistas do Espaço B (Não-linear)

Comparando as FIG. 7.7 e 7.8 verifica-se que a maior parte do espaço de trabalho linear é perdido quando da consideração de massa nos cabos ratificando os resultados esperados a

cerca da determinação de espaços de trabalho para cabos de massa não-nula.

7.4.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE O ESPAÇO DE TRABALHO OBTIDO

O espaço de trabalho apresentado na FIG. 7.8 se mostra inadequado por não comportar as trajetórias propostas na seção seguinte. Por este motivo propõe-se a modificação das características de projeto. Devido a este problema, são feitas algumas considerações sobre o caso em busca uma solução que apresente um espaço de trabalho razoável.

O método de determinação do espaço não-linear da FIG. 6.7 exige que as tensões nos cabos atendam limites tanto nos pontos de fixação como nos de ancoragem. Isto implica que determinada postura pode ser excluída do espaço de trabalho por não atender os limites de tensão ao longo de todo o comprimento do cabo ou por não possuir solução na Região Viável.

Para ilustrar o fato, a FIG. 7.9 apresenta as trações nos cabos para o ponto $x=[75 \ 10 \ 20]^T$ do espaço B, onde os círculos representam as forças obtidas pela solução linear, os quadrados, as forças da solução não-linear nos pontos de fixação e os losangos as forças da solução não-linear nos pontos de ancoragem. É possível verificar que todas as trações nos cabos de massa não-nula são mais elevadas

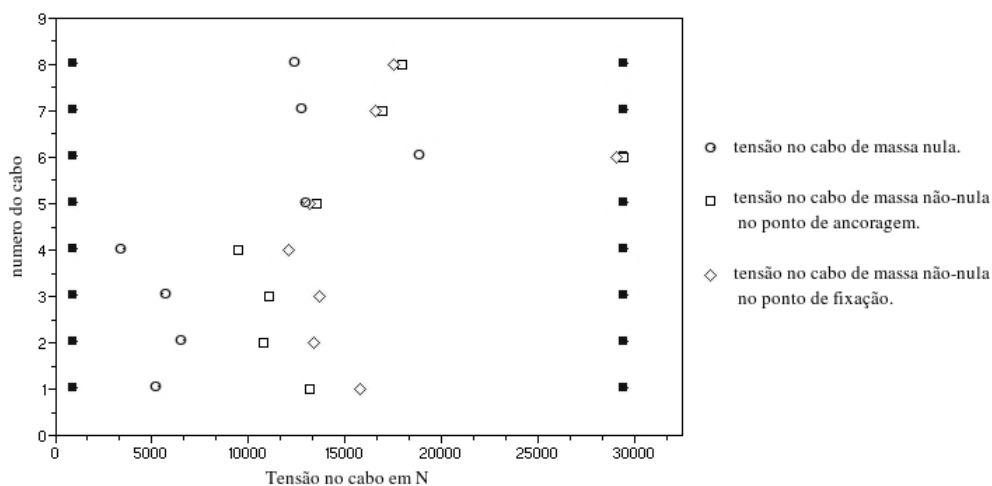


FIG. 7.9 – Forças de tração nos cabos

A tração nos cabos superiores é, em média, menor que nos inferiores devido a posição analisada ser baixa em relação aos pontos de ancoragem, e os cabos possuem ângulos menores com a vertical, se tornando mais eficientes. Ao contrário, os cabos inferiores exercem forças quase que na horizontal e por isso devem manter trações mais altas para suportarem o próprio peso. Pode-se perceber que o limite superior de tração é atingido por um cabo inferior. Confirmando o que foi dito na Seção 6.7, cabos superiores possuem trações mais elevadas nos pontos de ancoragem, enquanto que cabos inferiores apresentam trações maiores nos pontos de fixação.

Analisando a questão do peso do cabo, estima-se que cerca de 1.300 metros de cabos aéreos sejam utilizados para que a plataforma percorra o espaço B. Para as massas específicas da TAB. 7.3, a massa dos cabos será de aproximadamente 1.300 kg a 3.500 kg, excedendo em muito a massa da plataforma, de 400 kg.

Com o objetivo de ampliar o espaço de trabalho buscou-se utilizar cabos de outros diâmetros e verificar os custos e benefícios desta modificação. Foram verificados cabos CIMAF 6x25+AACI de diâmetros 19,0, 22,0 e 26,0mm em comparação ao de 16,0mm. As propriedades destes cabos são apresentadas na TAB. 7.3.

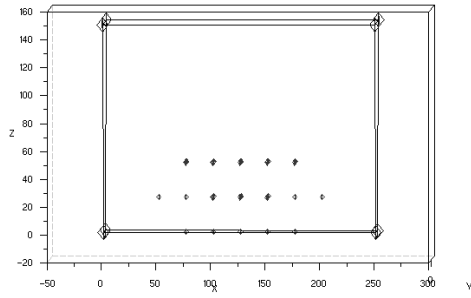
TAB. 7.3 – Propriedades Mecânicas dos cabos CIMAF 6X25F+AACI para os diâmetros 16,0, 19,0, 22,0 e 29,0mm

Diâmetro (mm)	Modulo de Elasticidade (N/mm ²)	Área Nominal (mm ²)	Massa Específica Linear (kg/m)	Tração de Ruptura (kN)	Tração Máxima (kN)
16,0	2500	123,1	1,057	183,4	15,3
19,0		173,5	1,496	261,8	21,8
22,0		232,7	2,036	354,0	29,5
26,0		325,0	2,746	460,0	38,3

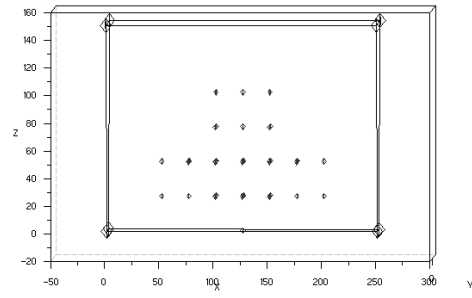
ROCHA, 2009, VERRET, 1997, http://www.cimafbrasil.com.br/produtos_aplic.php,

Para analisar os espaços de trabalho utilizando os quatro cabos citados, os cabos de 16,0, 19,0, 22,0 e 26,0mm serão chamados respectivamente de C1, C2, C3 e C4.

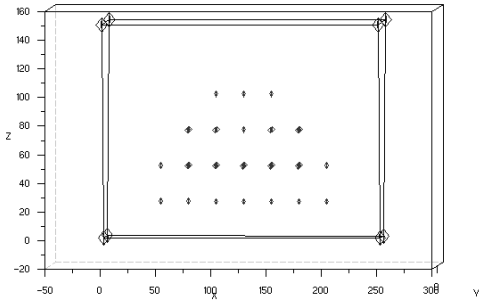
A FIG. 7.10, 7.11 e 7.12 apresentam respectivamente as vistas laterais, frontais e superiores do espaço de trabalho para cabos de massa não-nula referente a C1 para fins de comparação com os espaços de trabalho para os cabos C2, C3 e C4.



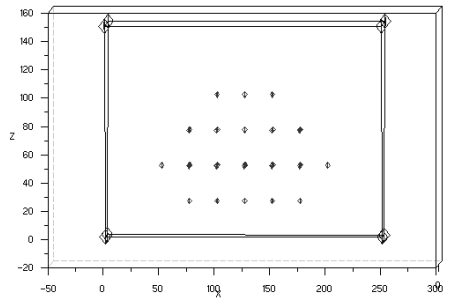
a) Espaço de trabalho para o cabo C1



b) Espaço de trabalho para o cabo C2

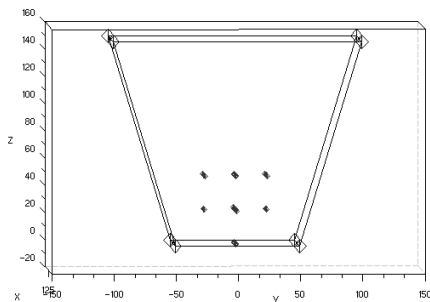


c) Espaço de trabalho para o cabo C3

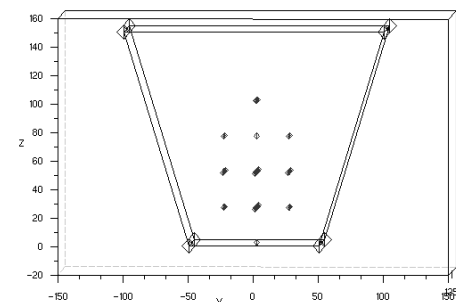


d) Espaço de trabalho para o cabo C4

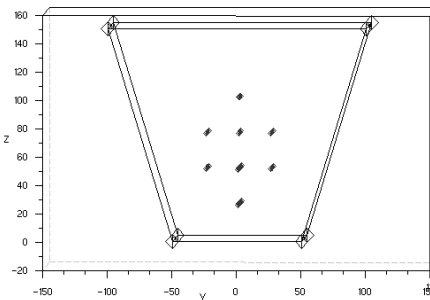
FIG. 7.10 – Vistas laterais dos espaços de trabalho para cabos de massa não-nula



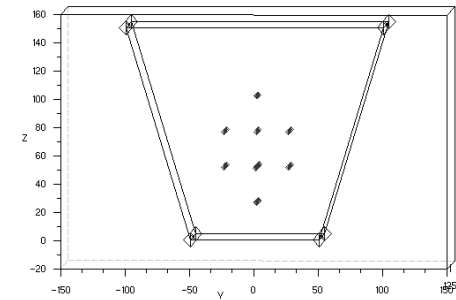
a) Espaço de trabalho para o cabo C1



b) Espaço de trabalho para o cabo C2

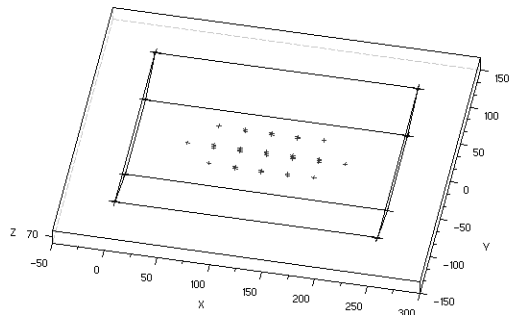


c) Espaço de trabalho para o cabo C3

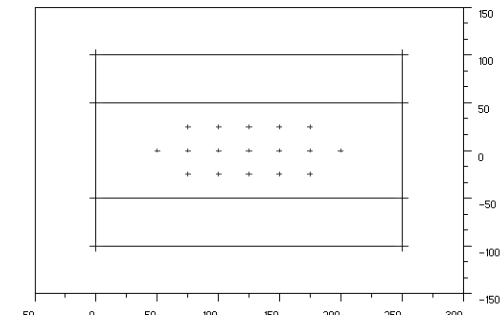


d) Espaço de trabalho para o cabo C4

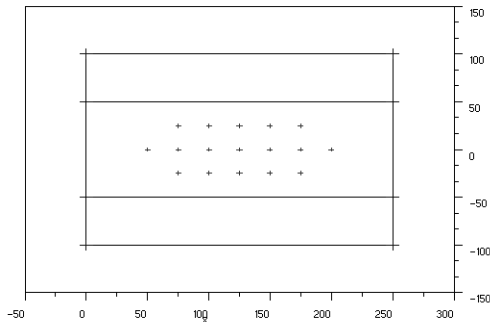
FIG. 7.11 – Vistas frontais dos espaços de trabalho para cabos de massa não-nula



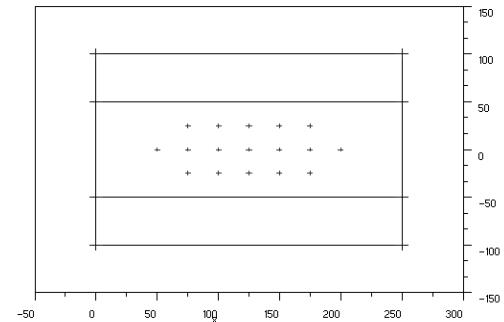
a) Espaço de trabalho para o cabo C2



b) Espaço de trabalho para o cabo C2



c) Espaço de trabalho para o cabo C3



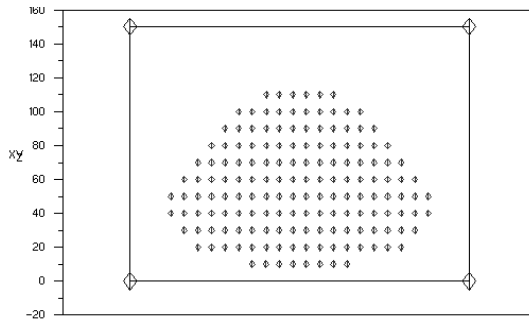
d) Espaço de trabalho para o cabo C4

FIG. 7.12 – Vistas superiores dos espaços de trabalho para cabos de massa não-nula

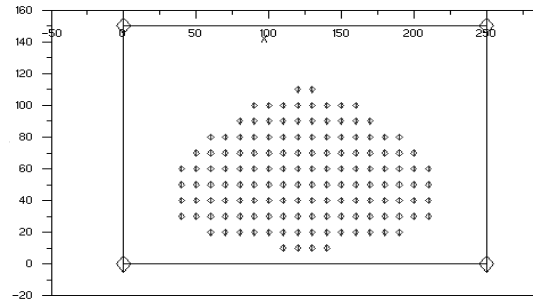
Analisando qualitativamente os espaços de trabalho acima, verifica-se que o espaço de trabalho aumenta gradativamente de a) até c), favorecendo a escolha do cabo C3. A vista lateral de C4 dada pela FIG. 7.10 d) indica uma pequena redução do espaço de trabalho. Sabe-se ainda que a massa específica dos cabos C4 excedem em 37% a de C3. Esta diferença entre as massas específicas de C3 e C4 certamente será refletida em características de projeto como consumo de energia, inércia do sistema e manutenibilidade.

Desta forma pode-se concluir que o cabo C3 se apresenta como o mais adequado a utilização no manipulador. O cabo C4, de 29,0mm, apesar de mais resistente, demonstra ser pesado demais para a aplicação desejada.

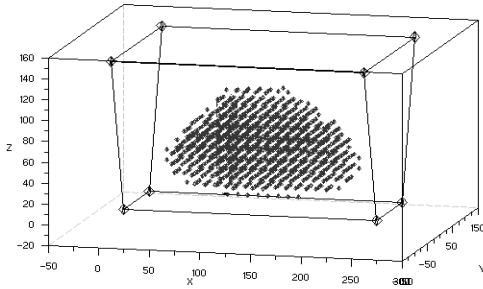
Foi analisada também a aplicação de CS 12 ao sistema. Para que o sistema se torne mais conservativo, foi aplicado um coeficiente de segurança maior do que o recomendado para a aplicação do cabo. O aumento do CS de 10 para 12 acarretou uma diminuição na tensão máxima de aproximadamente 8.3%. Para verificar a possibilidade de redução do CS, foram comparados casos com coeficiente de segurança 10 e 12 quanto as posições limites do espaço de trabalho. Utilizando passo de 10m, obtém-se os seguintes espaços de trabalho:



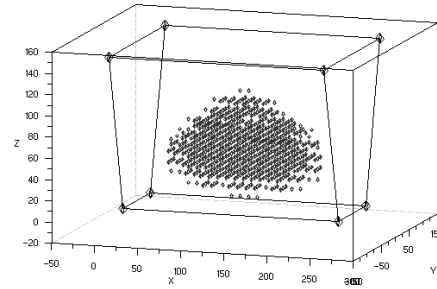
a) Vista lateral – CS 10



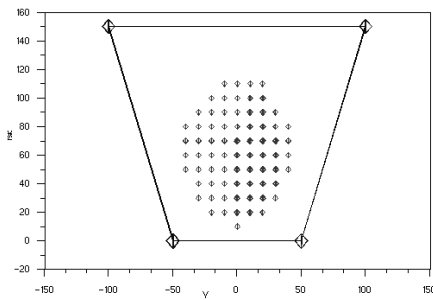
b) Vista lateral – CS 12



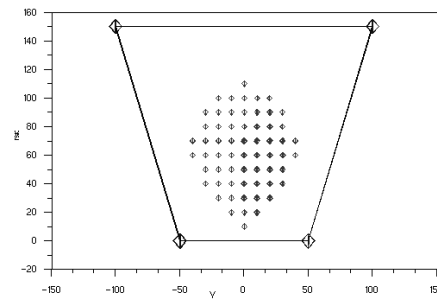
c) Vista isométrica – CS 10



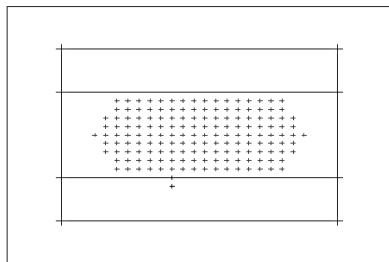
d) Vista isométrica – CS 12



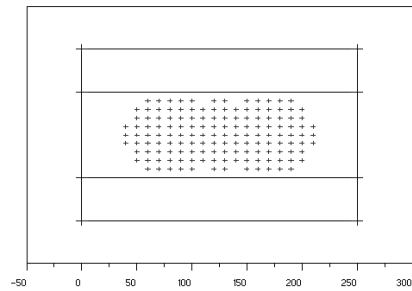
e) Vista frontal – CS 10



f) Vista frontal – CS 12



g) Vista superior – CS 10



h) Vista superior – CS 12

FIG. 7.13 – Comparação entre os espaços de trabalho para o cabo C3, com CS 10 e 12

Analisando a FIG. 7.13 verifica-se que a diminuição do coeficiente de segurança trouxe o alargamento do espaço de trabalho, principalmente na base e no topo. Considerando a

pequena variação das trações máximas em relação aos limites elástico e de ruptura, conclui-se que CS 10 pode ser utilizado.

Para analisar o espaço de trabalho como um todo, sobrepondo as soluções para cabos de massa nula e não-nula, utilizam-se vistas superiores por cotas. Esta técnica consiste em realizar cortes horizontais no espaço de trabalho em cotas pré-determinadas e plotá-las separadamente. Em cada figura são apresentados oito cortes nas cotas 0, 20, 40, 60, 80, 100, 120 e 140 metros. A FIG. 7.14 apresenta a técnica utilizando a FIG. 7.13 c) como exemplo.

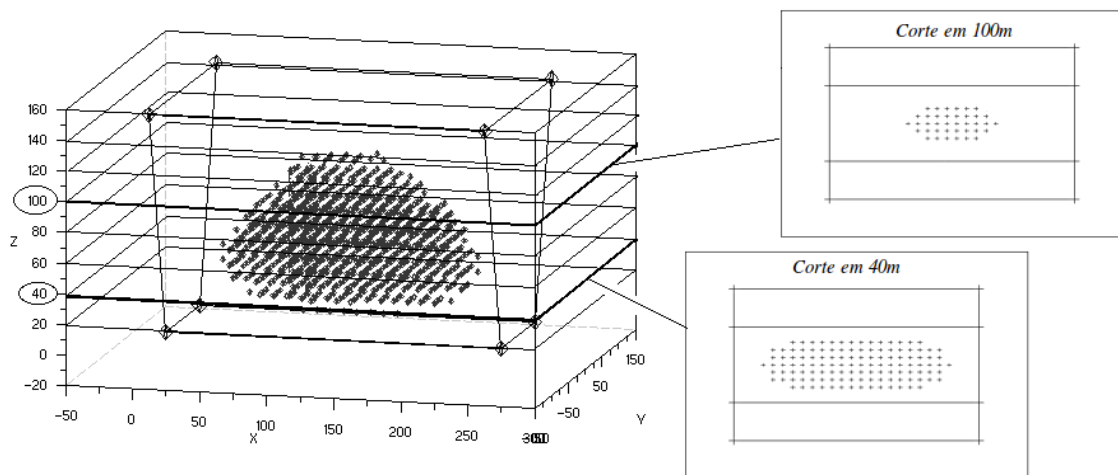
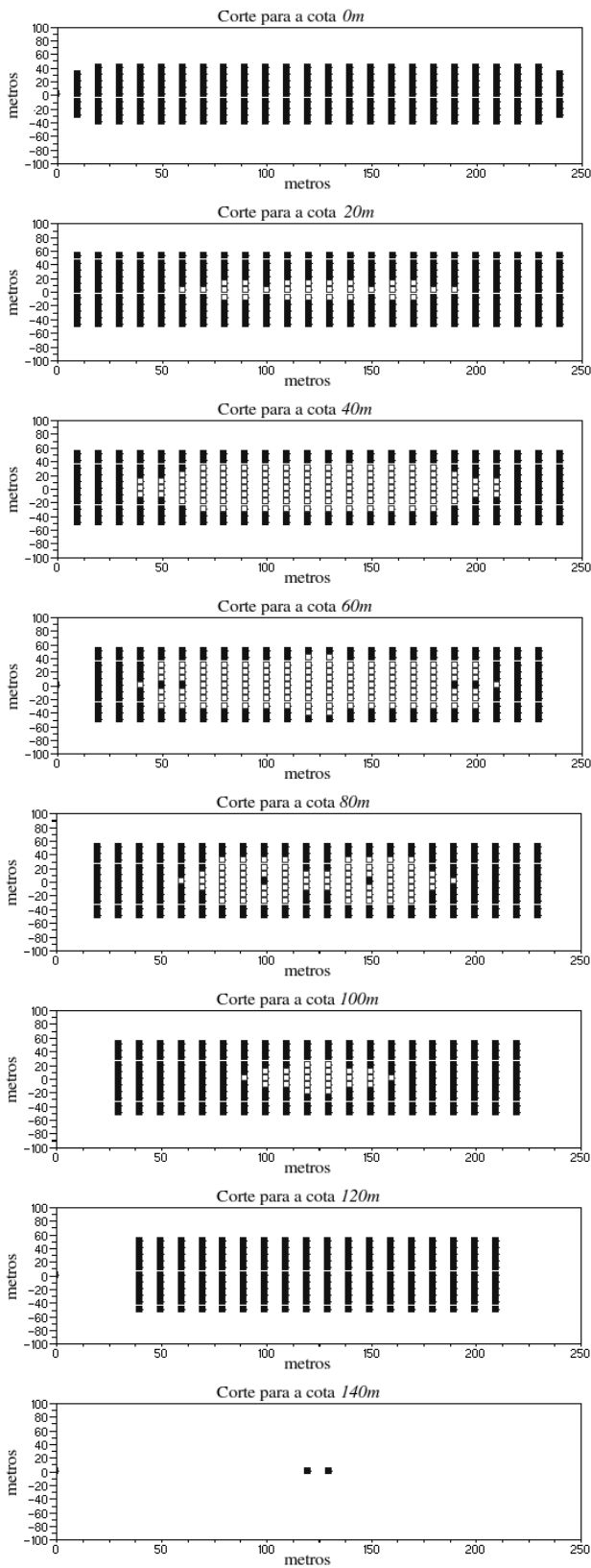
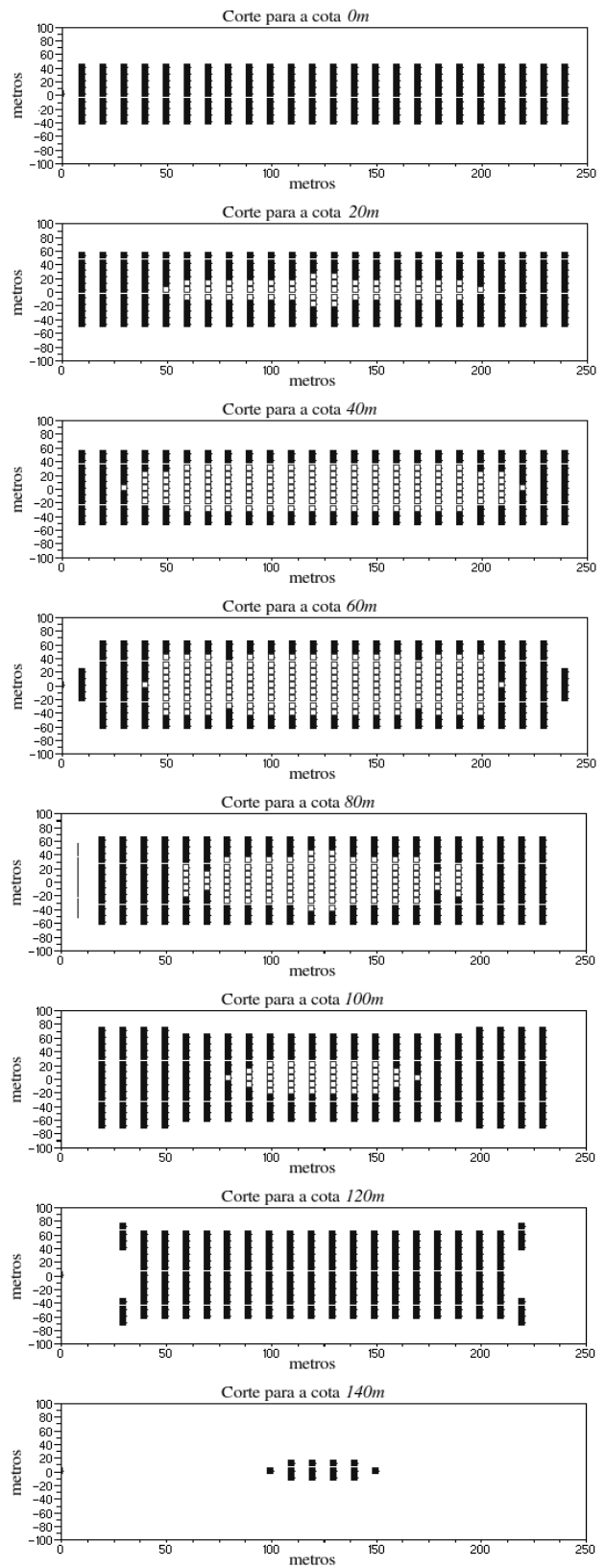


FIG. 7.14 – Técnica de visualização do espaço de trabalho por cotas

Na FIG. 7.15 são comparados os espaços de trabalho com cabos de massa nula e não-nula para CS 10 e 12. Para cada cota, os pontos cheios representam o espaço de trabalho para cabos de massa nula e os pontos vazios, quando existirem, representam o espaço de trabalho para cabos de massa não-nula.



a) Vistas superiores por cotas para CS 12



a) Vistas superiores por cotas para CS 10

FIG. 7.15 – Espaço de trabalho por cotas para a região B com o cabo C3 e CS 12

Comparando as vistas da FIG 7.14 é possível verificar a expansão do espaço de trabalho em função da diminuição do coeficiente de segurança, e conseqüentemente do aumento do limite de força máxima aplicada aos cabos.

Outra proposta para se ampliar o espaço de trabalho controlável é modificar a posição dos pontos de ancoragem. Assim espera-se que um espaço de trabalho menor seja aproveitado de maneira mais eficiente. Por outro lado, a hipótese de inclusão de novos cabos sempre deve considerar o custo computacional envolvido.

Desta forma, percebe-se que a aplicação do cabo C1 não é adequada, e em seu lugar opta-se pela utilização do cabo C3 com 22,0mm de diâmetro. Os dados de projeto e a especificação do cabo utilizado são apresentadas na TAB. 7.4.

TAB. 7.4 – Dados de projeto e especificação do cabo de aço

Matriz de pontos de ancoragem	B_A^G e B_B^G
Matriz de pontos de fixação em R^L	P_A^L e P_B^L
Massa da plataforma	400 kg
Cabo utilizado	CIMAF 6x25F+AACI Ø22,0mm (CS 10)

ROCHA, 2009, VERRET, 1997, http://www.cimafbrasil.com.br/produtos_aplic.php,
http://www.helibras.com.br/produtos_det.php?id=1

Os valores referentes ao cabo C1 são apresentados na TAB. 7.5 para fins de comparação.

TAB. 7.5 – Comparação entre as características do cabo C1 (CS 12) e C3 (CS 10)

	Cabo C1 – 16,0 mm	Cabo C3 – 22,0 mm
Diâmetro do cabo	16,0 mm	22,0 mm
Massa específica do cabo	1,057 kg/m	2,036 kg/m
Modulo de Elasticidade do cabo novo	2500 N/mm ²	
Modulo de Elasticidade do cabo em uso, considerada a acomodação de pernas e arames	3000 N/mm ² elevação do módulo em 20%	
Tração de ruptura do cabo	183,4 KN	354,0 KN
Coeficiente de segurança	CS 12	CS 10
Limites de força nos cabos f_{min} e f_{max}	1,0 KN e 15,0 KN	1,0 KN e 35,4 KN

ROCHA, 2009, VERRET, 1997, http://www.cimafbrasil.com.br/produtos_aplic.php

7.5 TRAJETÓRIAS

Nesta seção são apresentadas as trajetórias utilizadas nas simulações do Espaço B com o objetivo de analisar o perfil de força nos cabos. As trajetórias referentes ao espaço de trabalho A são apresentadas no APÊNDICE 7. As FIG. 7.16 a 7.18 apresentam todas as dimensões em metros.

7.5.1 TRAJETÓRIA ELÍPTICA COM ALTURA VARIÁVEL

A plataforma percorre uma curva em forma de sela, obtida a partir de uma elipse horizontal centrada no ponto $C_0=[125 \ 0 \ 50]$, com altura variável definida por uma função seno e período de 10 minutos. As amplitudes do movimento ao longo das três direções principais no referencial R^G são dadas pelo vetor $A_D=[75 \ 20 \ 10]$ e a orientação da plataforma é mantida constante em $\Theta=0_{[3 \times 1]}$.

As Equações cinemáticas da trajetória são apresentadas pelas EQ. 7.10, 7.11 e 7.12.

$$r = \left[C_{0,1} + A_{D,1} \cos(A.t) \quad C_{0,2} + A_{D,2} \sin(A.t) \quad C_{0,3} + A_{D,3} \sin(2A.t) \right]^T \quad (7.10)$$

, onde $A = 2\pi / t_f$ e $t_f = 600 \text{ seg}$

$$\dot{r} = \left[-A_{D,1} \cdot A \sin(A.t) \quad A_{D,2} \cdot A \cos(A.t) \quad 2 \cdot A_{D,3} \cdot A \cos(2A.t) \right]^T \quad (7.11)$$

$$\ddot{r} = \left[-A_{D,1} \cdot A^2 \cos(A.t) \quad -A_{D,2} \cdot A^2 \sin(A.t) \quad -4 \cdot A_{D,3} \cdot A^2 \sin(2A.t) \right]^T \quad (7.12)$$

A FIG. 7.16 apresenta a trajetória elíptica definida pelas equações acima.

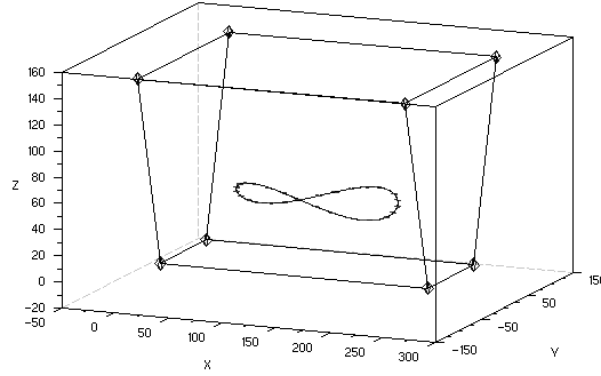


FIG. 7.16 – Trajetória elíptica de altitude variável

7.5.2 TRAJETÓRIA ASCENDENTE HELICOIDAL DE RAIOS VARIÁVEL

A plataforma realiza trajetória ascendente segundo uma helicóide elíptica, com eixo vertical passando pelo ponto C_0 da trajetória anterior. Como a plataforma percorre uma hélice de raio variável as amplitudes nas direções principais $0x$ e $0y$ A_D são dadas por:

$$A_D = \left[\left(\frac{A_{x,2} - A_{x,1}}{r_{z,1} - r_{z,2}} \right) (r_{z,1} - r_z(t)) + A_{x,1} ; \left(\frac{A_{y,2} - A_{y,1}}{r_{z,1} - r_{z,2}} \right) (r_{z,1} - r_z(t)) + A_{y,1} \right] \quad (7.13)$$

Onde as amplitudes são dadas em função das distâncias ao eixo de rotação inicial e final nas direções $0x$ e $0y$, $A_x = [25, 50]$, e $A_y = [10, 20]$ respectivamente, nas altitudes $r_z = [20, 80]$, todos em metros, para a altitude $r_z(t)$.

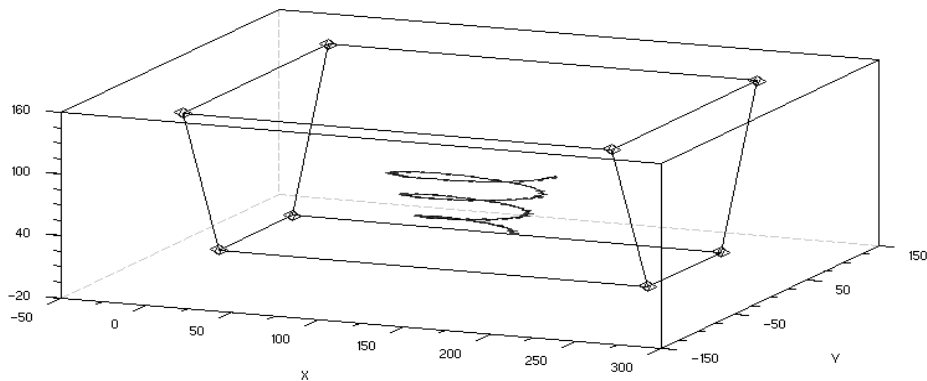
A razão de subida é mantida constante em $v_z = 1$ m/s e a trajetória tem duração de 60 segundos. O parâmetro A é definido como $6\pi/t_f$, onde $t_f = 60$ segundos. As equações cinemáticas que definem a trajetória em R^G são:

$$r = \left[C_{0,1} + A_{D,1} \cos(A.t) \quad C_{0,2} + A_{D,2} \sin(A.t) \quad C_{0,3} + v_z \cdot t \right]^T \quad (7.14)$$

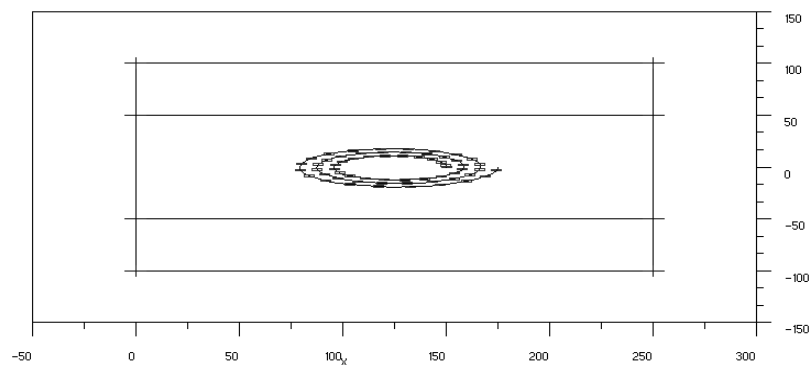
$$\dot{\mathbf{r}} = \left[-\dot{A}_{D,1} \cdot A \sin(A.t) \quad \dot{A}_{D,2} \cdot A \cos(A.t) \quad v_z \right]^T \quad (7.15)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left[-\ddot{A}_{D,1} \cdot A^2 \cos(A.t) \quad -\ddot{A}_{D,2} \cdot A^2 \sin(A.t) \quad 0 \right]^T \quad (7.16)$$

Na FIG. 7.17 é apresentada a trajetória da plataforma durante a helicóide



a) Vista isométrica



b) Vista superior

FIG. 7.17 – Trajetória ascendente helicoidal de raio variável

7.5.3 TRAJETÓRIA PARABÓLICA

A plataforma realiza uma parábola vertical com curvatura negativa, retornando a cota inicial e percorrendo toda altitude controlável do vale. A orientação da plataforma é

modificada gradualmente representando a inclinação da aeronave durante os trechos ascendente e descendente. Aeronaves de asa fixa próprias para este tipo de vôo, descrevem uma trajetória deste tipo para simular um ambiente sem gravidade em seu interior. Em relação a este caso, embora este tipo de vôo não seja realizado por helicópteros, deseja-se explorar a trajetória e acelerações verticais ao longo do espaço de trabalho.

Para definição da parábola foram utilizados três pontos: posição inicial, vértice e posição final, dados por $\mathbf{r}_0=[105 \ 0 \ 20]$, $\mathbf{r}_v=[125 \ 0 \ 80]$ e $\mathbf{r}_f=[145 \ 0 \ 20]$. A equação do segundo grau $z(x)=ax^2+bx+c$, onde $z=r_z(t)$ e $x=r_x(t)$. A componente $r_x(t)$ representa o movimento uniforme na direção Ox . Assim a plataforma executa uma parábola limitada pelas cotas 20 e 80 metros durante 45 segundos. A trajetória é dada pelas EQ. 7.17, 7.18 e 7.19.

$$\mathbf{r}=\begin{bmatrix} r_x(t) & 0 & r_z(t) & 0 & \theta(t) & 0 \end{bmatrix}^T \quad (7.17)$$

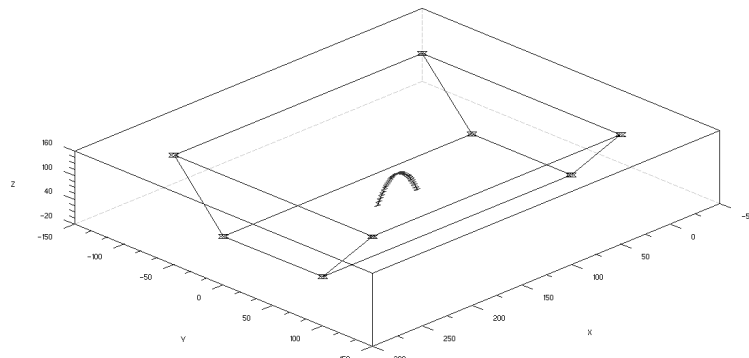
Onde:

- $r_x(t)=\mathbf{r}_{0,1}+v_x \cdot t$;
- $v_x(t)=(\mathbf{r}_{f,1}-\mathbf{r}_{0,1})/45$; e,
- $\square(t)=\begin{cases} \frac{\square_0}{2} \cdot (1-\cos(A_a \cdot t)), & \text{se } t < t_a \\ 0, & \text{se } t_a < t < t_b, e \\ -\frac{\square_0}{2} \cdot (1-\cos(A_b \cdot (t-t_b))), & \text{se } t > t_b \end{cases}$; e,
- $\theta_0=\frac{\pi}{18}$, $A_a=\frac{2\pi}{t_a}$, $A_b=\frac{2\pi}{t_f-t_b}$, $t_a=0,25t_f$ e $t_b=0,75t_f$.

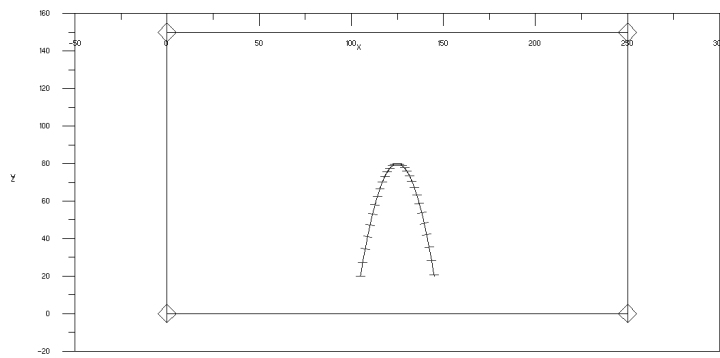
$$\dot{\mathbf{r}}=\begin{bmatrix} v_x & 0 & \dot{z}(t) & 0 & \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (7.18)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{z}(t) & 0 & \ddot{\theta}(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

A FIG. 7.18 a apresenta a trajetória parabólica.



a) Vista isométrica



b) Vista lateral

FIG. 7.18 – Trajetória da plataforma em vôo parabólico

8 SIMULAÇÕES E RESULTADOS OBTIDOS

Neste capítulo são apresentados os resultados das simulações obtidas para a plataforma e sólidos de ancoragem definidos no capítulo anterior, referentes ao espaço de trabalho B.

8.1 RESULTADOS OBTIDOS A PARTIR DAS TRAJETÓRIAS

Para as trajetórias dadas, são apresentadas as curvas de força, de comprimento de cabo e de deformação elástica, para cabos de massa nula como referência, e para sistemas com cabos de massa não-nula nos pontos de fixação e ancoragem. São utilizados os dados da TAB. 7.3.

Para trajetória elíptica, na FIG. 8.1 são apresentadas as curvas de tração nos cabos em *Newtons*, e nas FIG. 8.2 e 8.3 as curvas de comprimento e deformação elástica dos cabos em *metros*. Nos quatro gráficos superiores da FIG. 8.1 pode-se verificar que a curva de tração para cabos de massa nula é inferior as demais. Nos gráficos referentes a cabos inferiores esta informação não é clara devido a inercia da plataforma¹.

1 Em todas as figuras deste capítulo, onde se deseje analisar um determinado parâmetro referente aos oito cabos simultaneamente, os gráficos serão plotados conforme a ordem dada pela FIG. 8.1, do primeiro ao oitavo cabo.

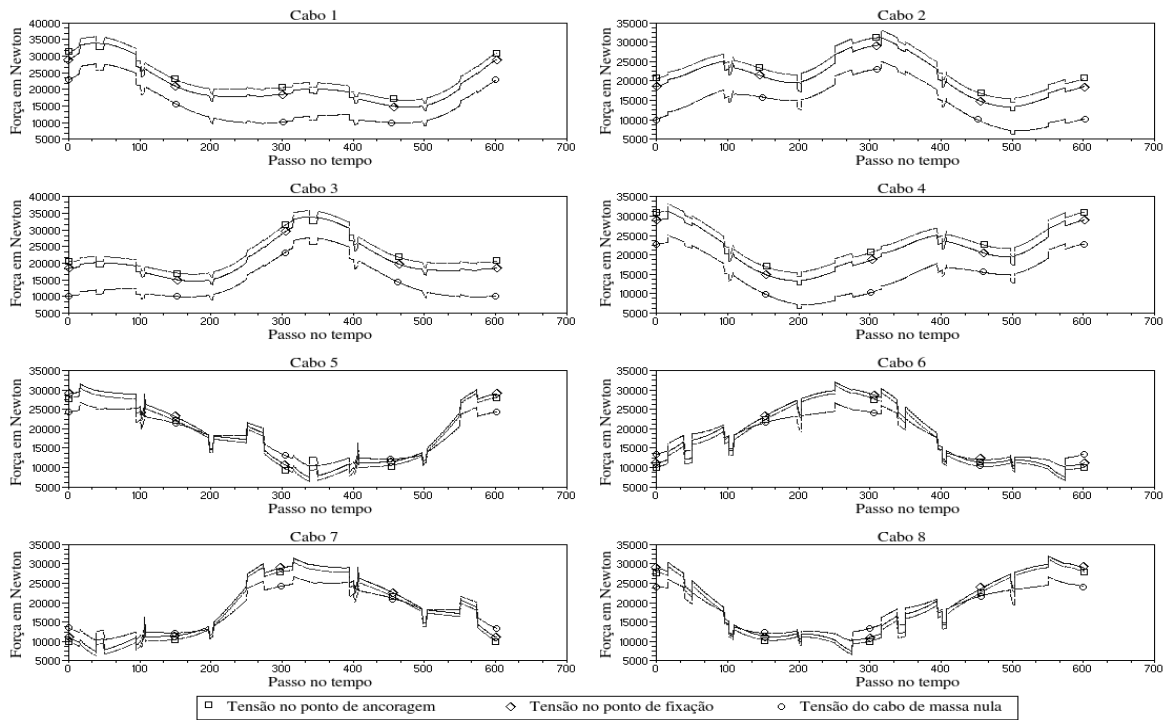


FIG. 8.1 - Curva de forças nos cabos na trajetória elíptica

Em ambas as figuras apresentadas é possível verificar que os gráficos não apresentam uma curva suave. Isto ocorre devido a escolha de $\lambda_{viável}$ na Região Viável, quando da determinação da solução linear. As simulações deste trabalho, Utilizam $\lambda_{médio}$, a fim de reduzir o tempo de execução do código.

(MIKELSONS et al, 2008) apresenta o método do baricentro que consiste na determinação iterativa de λ_{seguro} em \mathbf{R}^r e da solução segura para as forças lineares. Em seu trabalho, demonstram que a solução segura apresenta uma distribuição contínua e derivável de forças nos cabos.

A FIG. 8.2 apresenta as curvas de comprimento de cabo.

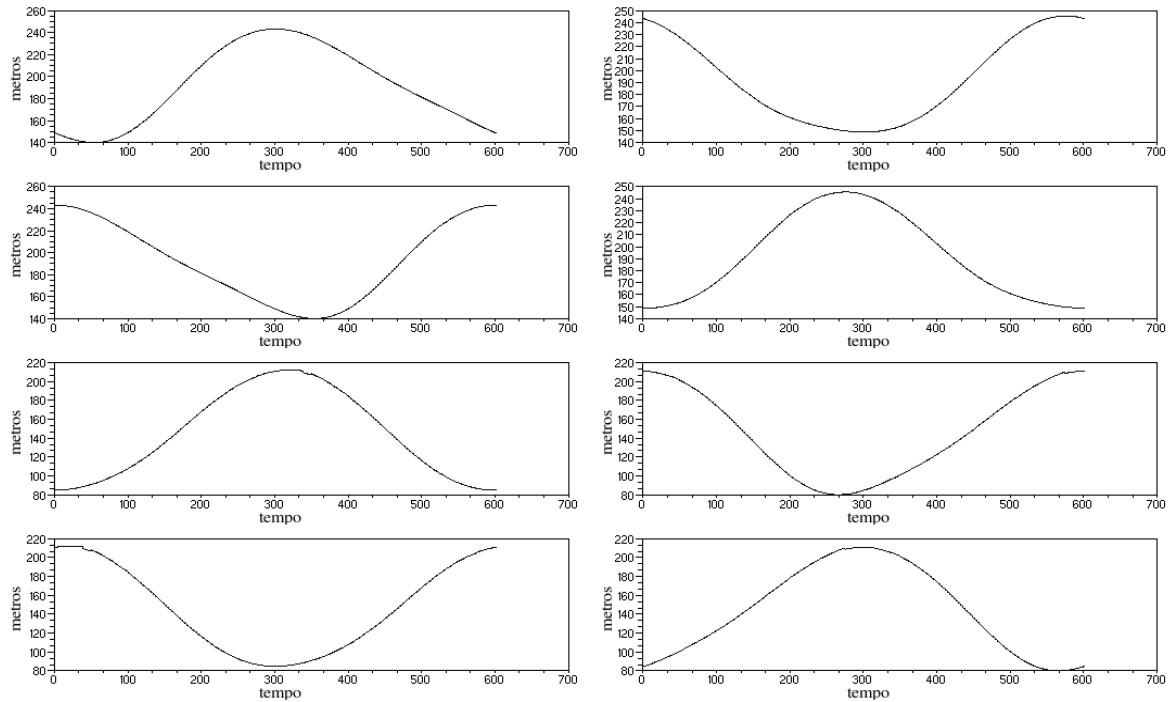


FIG. 8.2 - Curvas de comprimento de cabo na trajetória elíptica

A FIG. 8.3 apresenta as curvas de deformação elástica dos cabos. É possível verificar que a deformação do cabo segue a tendência do produto: tração por comprimento nos cabos.

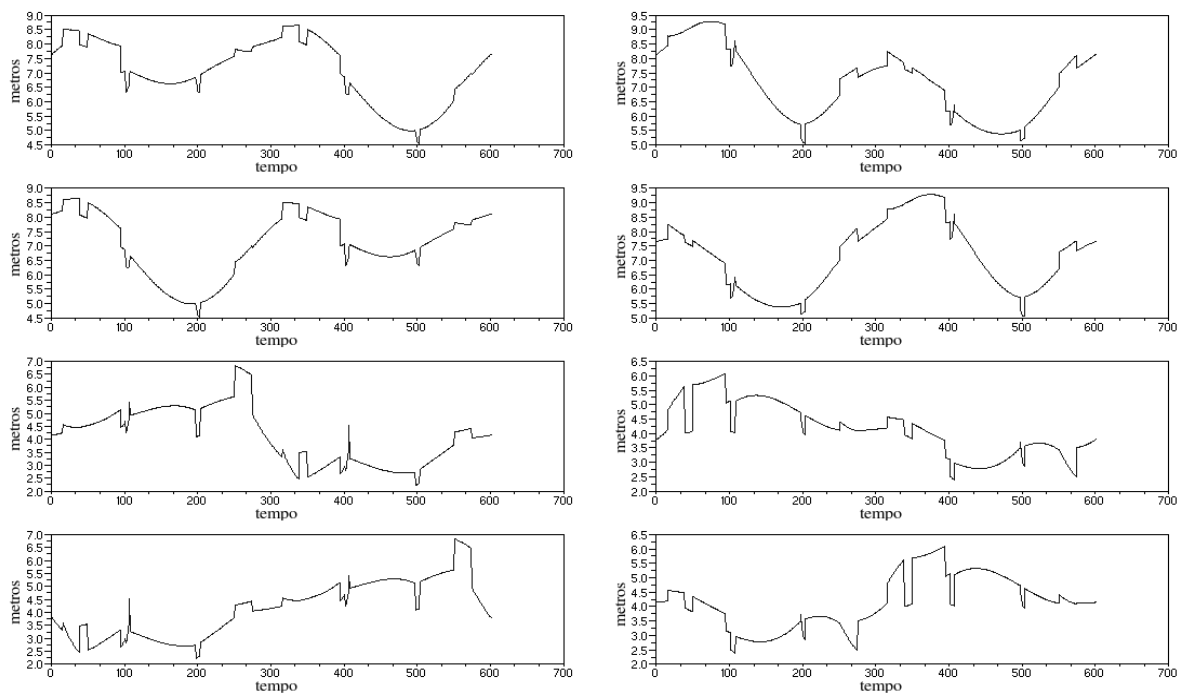


FIG. 8.3 - Curvas de deformação elástica nos cabos na trajetória elíptica

Aqui, utiliza-se e propõe-se que a solução baseada em λ no ponto médio da Região Viável seja utilizada somente para uma análise preliminar, para observar o comportamento esperado, resultante da solução segura. Analisando qualitativamente os resultados apresentados nas FIG. 8.1 e 8.3, é esperado que a solução segura de (MIKELSONS et al, 2008) apresente uma curva suave e de mesma tendência, conforme o caso

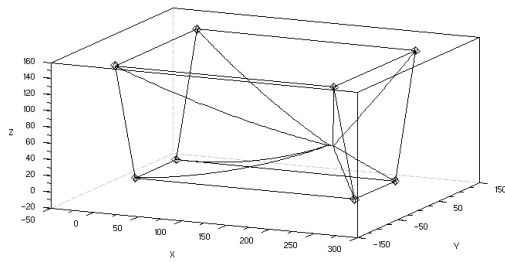
Verifica-se que o comprimento de cabos superiores varia entre 140 e 240 metros e de cabos inferiores entre 80 e 220 metros. Analisando agora os gráficos de deformação elástica, tem-se que cabos superiores se deformam em um intervalo de 4,5 e 9,5 metros e cabos inferiores entre 2,0 e 7,0 metros. Junto a isto, ainda há o fato de que um cabo de aço apresenta acomodação de pernas e arames ao longo de seu uso, variando seu comprimento de 0,5% a 0,75%. Considerando um comprimento médio de 190 metros para cabos superiores e de 150 metros para cabos inferiores, a deformação permanente por acomodação varia entre 0,95 e 1,425 metros para cabos superiores e 0,75 e 1,125 metros para cabos inferiores. Sobre esta deformação permanente ainda haverá a deformação elástica devido a tração do cabo. Esta variação deve ser considerada ao longo da vida do manipulador, pois pode inserir erros que não aparecerão para um sistema de controle baseado nas rotações dos atuadores.

Os sistemas de controle apresentados em (VERHOEVEN, 2004; FANG, 2005 e MIKELSONS et al, 2008) são baseados em cabos ideais e inextensíveis, logo podem não ser adequados para este caso da maneira como são apresentados. Para resolver este problema, sugere-se que a plataforma seja instrumentada de maneira adequada para que a posição seja obtida diretamente em relação ao referencial global.

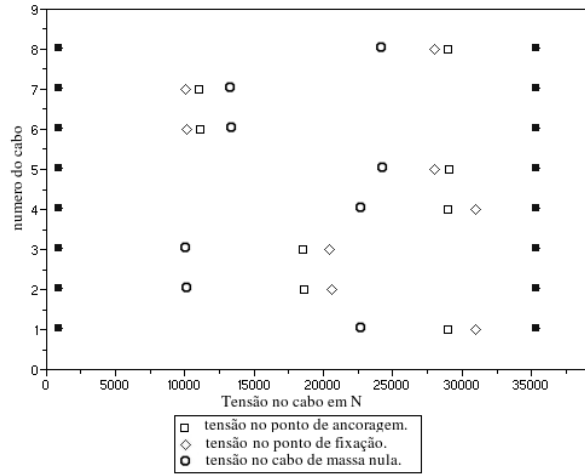
Para se ter uma visão pontual das forças nos cabos, são plota as posições de dois pontos distintos de cada trajetória e suas respectivas forças, segundo a configuração do manipulador e dos cabos. Nas FIG. 8.4 a 8.5 são apresentados estes dados para a trajetória elíptica.

É esperado que as trações nos pontos de ancoragem mais próximos da plataforma e naqueles ligados a cabos mais próximos da direção vertical apresentem tensões mais elevadas.

Os pontos que formam a catenária são calculados pelas equações do APÊNDICE 1, em R^C e levados para o referencial global, Na FIG. 8.4 são apresentados os valores de tração nos cabos, por pontos de fixação e ancoragem, e analogamente para cabos de massa nula, como base de comparação.



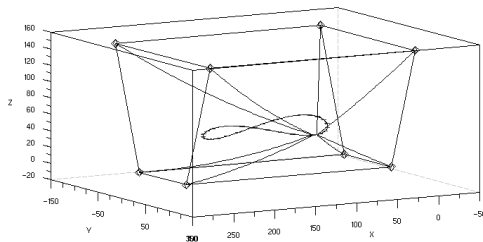
a) Cabos em catenária



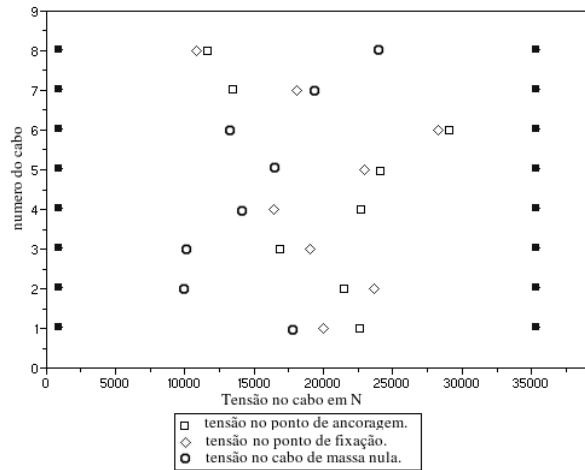
b) Forças de tração nos cabos

FIG. 8.4 - Catenárias e tensões na posição inicial da trajetória elíptica $r=(200, 0, 50)$

É possível verificar que as trações nos cabos superiores apresentam maior afastamento da solução linear, pois sustentam todo o sistema, e que as trações nos cabos 1, 4, 5 e 8 estão mais próximas do limite superior de tração, pois estes cabos são mais curtos e abordam a plataforma sob ângulos mais próximos da vertical, devendo ser maiores em módulo para compensar sua direção de aplicação. Na FIG. 8.5 são apresentadas as forças para a posição $r=[72\ 14\ 40]$.



a) Cabos em catenária



b) Forças de tração nos cabos

FIG. 8.5 - Catenárias e tensões na posição $r=[72\ 14\ 40]$ da trajetória elíptica

Segundo (KAWAMURA et al, 1995), em sistemas onde se deseje maiores acelerações e velocidades as tensões devem ser menores, buscando métodos de otimização voltadas para a

norma mínima na região viável, e para sistemas mais rígidos, onde deseje-se evitar problemas de vibração, deve-se buscar trações próximas a seu limite superior. Esta determinação de forças se dá na escolha do λ da região viável.

Contudo para manipuladores com cabos em catenária aparece o seguinte problema: Caso as tensões sejam buscadas para a plataforma, é bastante provável que as trações nos pontos de ancoragem inferiores estejam abaixo do limite inferior de tração. Por outro lado, caso sejam buscadas trações que tensionem o sistema como um todo, aumentando sua rigidez principalmente para posições próximas do limite inferior do espaço de trabalho e quando a plataforma esteja sujeita a acelerações ascendentes, a trações nos pontos de ancoragem superiores poderão exceder seus limites máximos.

Voltando a análise das curvas de força e comprimento de cabo, nas FIG. 8.6 e 8.7 são apresentadas as curvas de forças e deformação elástica para a trajetória helicoidal ascendente.

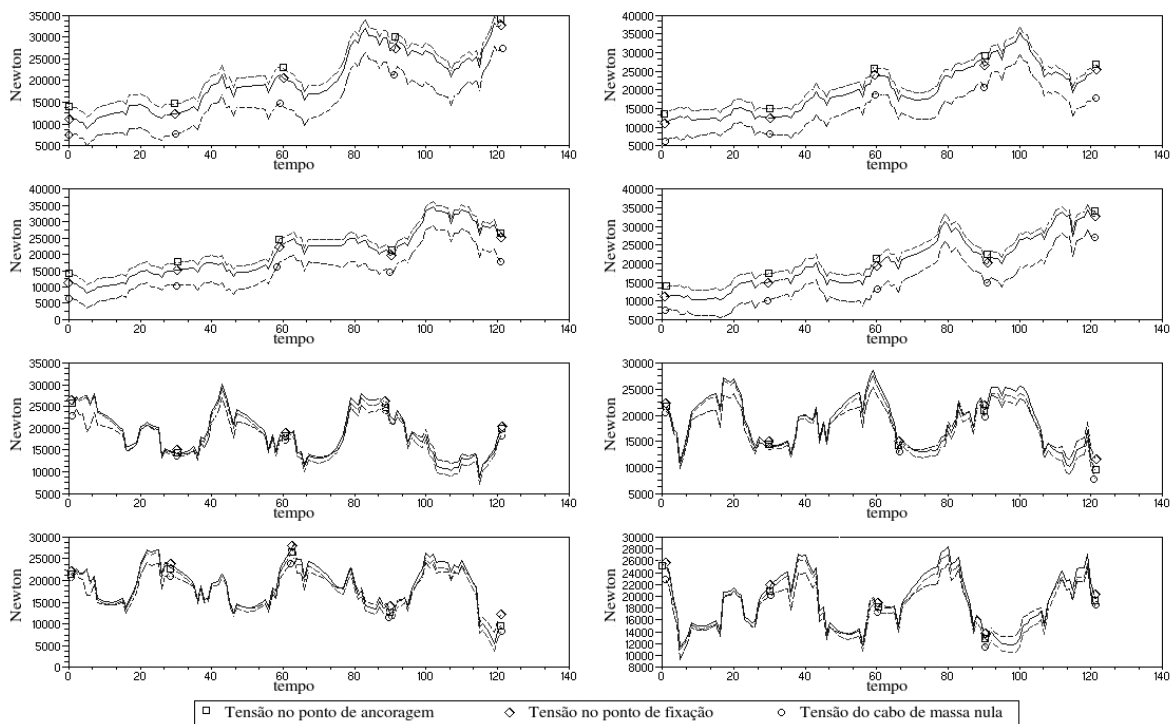


FIG. 8.6 - Curvas de forças nos cabos para trajetória helicoidal ascendente

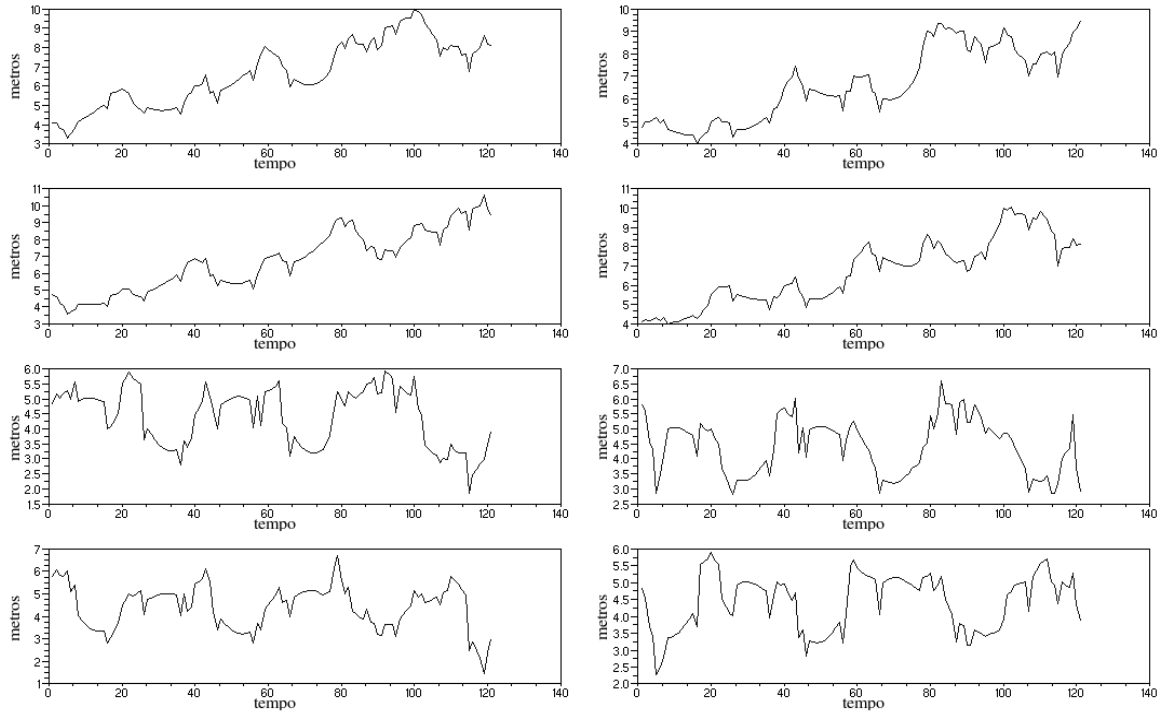


FIG. 8.7 - Curvas de deformação elástica nos cabos para trajetória helicoidal ascendente

E nas FIG. 8.8 e 8.9 as curvas de forças e deformação elástica para o vôo parabólico:

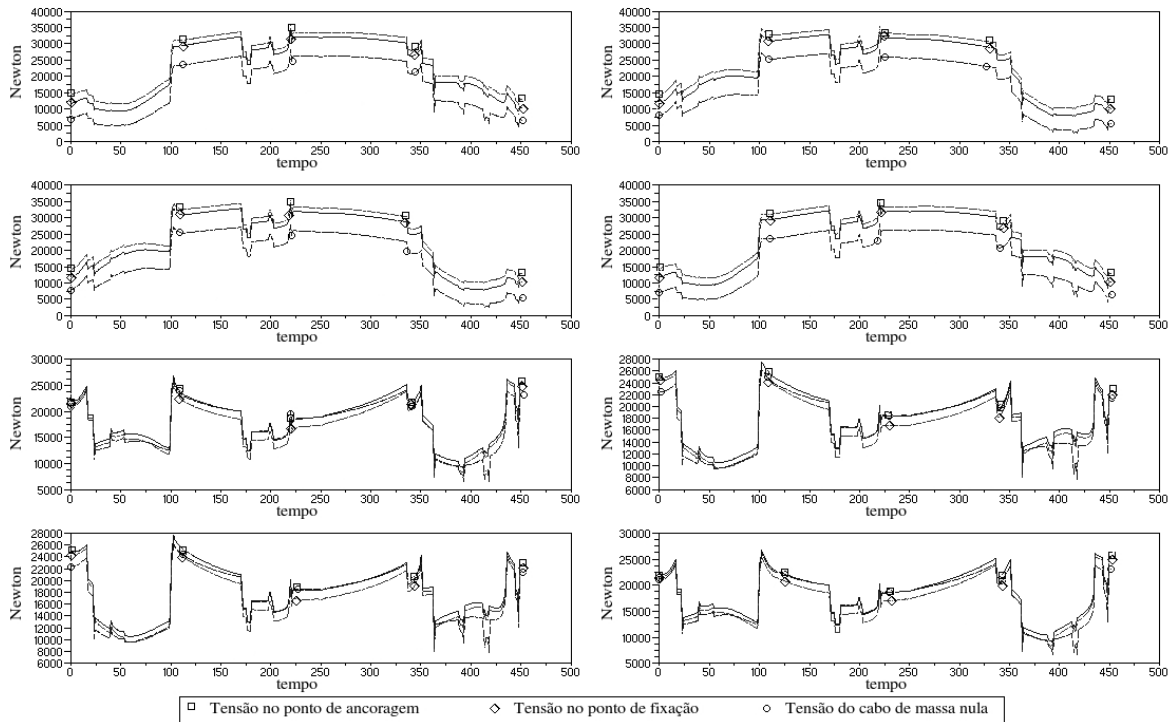


FIG. 8.8 - Curvas de forças nos cabos para trajetória parabólica

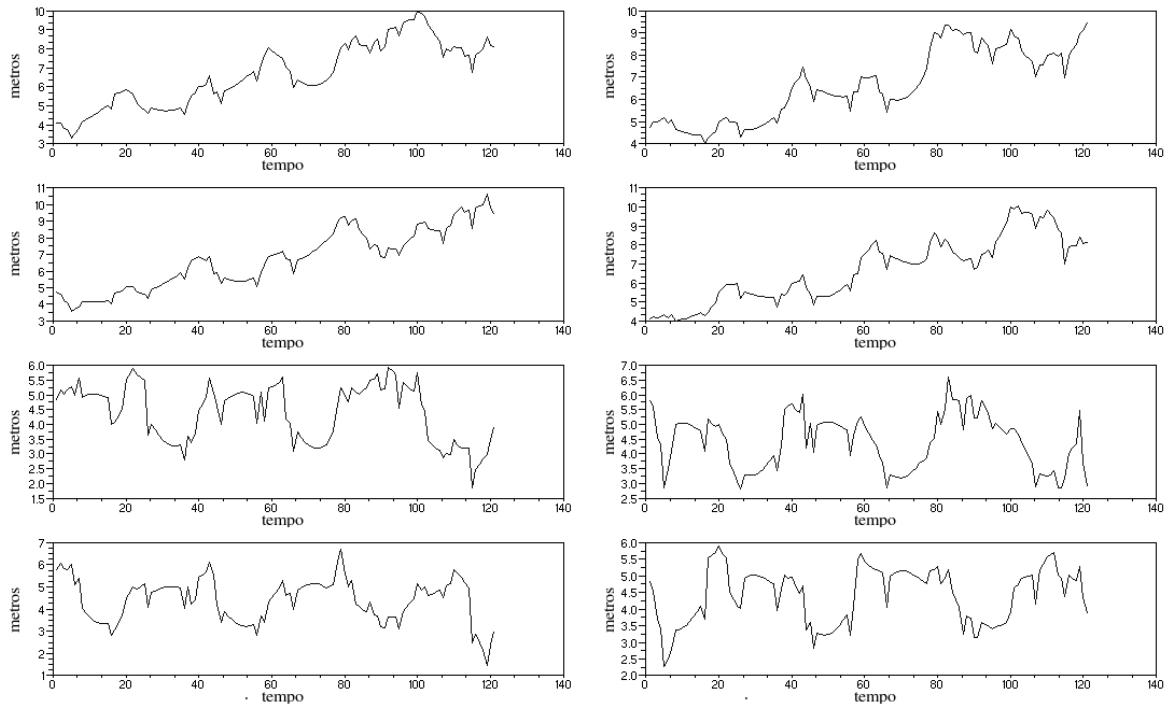
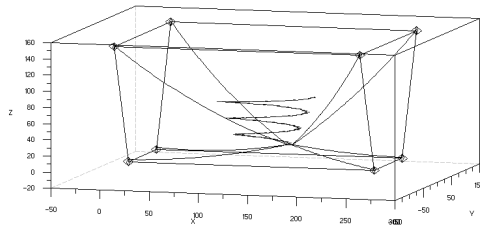


FIG. 8.9 - Curvas de deformação elástica nos cabos para trajetória parabólica

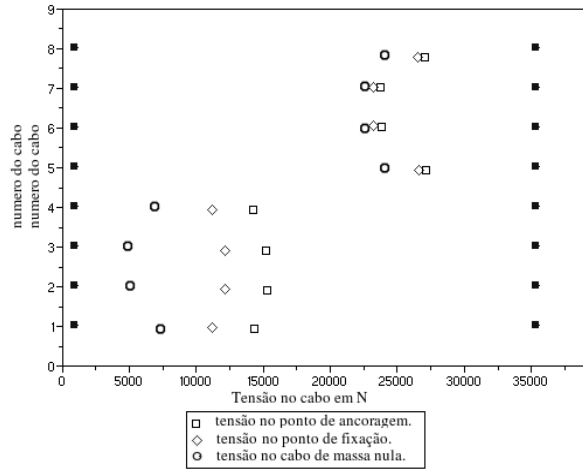
As mesmas considerações feitas para os gráficos da primeira trajetória são aplicáveis a estes casos. Nos gráficos de força da trajetória helicoidal, verifica-se que as trações em cabos superiores apresentam uma tendência de crescimento. Deve-se ter em mente que quanto mais elevada a posição, maior o ângulo de inclinação do cabo em relação a vertical e mais o cabo deve tracionar a plataforma.

A tendência à semelhança verificada nas curvas de forças da trajetória parabólica deve-se a sua trajetória estar localizada no plano de simetria do espaço de trabalho e do vale.

Nas FIG. 8.10 e 8.11 são apresentadas a posição e as trações nos pontos $r=[150 \ 0 \ 20]$ e $r=[93 \ 12 \ 67]$ da trajetória helicoidal e na FIG. 8.12 e 8.13 $r=[105 \ 0 \ 20]$ e $r=[128 \ 0 \ 77]$ da trajetória parabólica

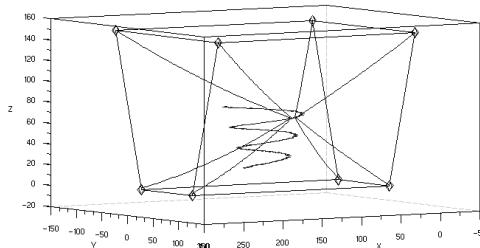


a) Cabos em catenária

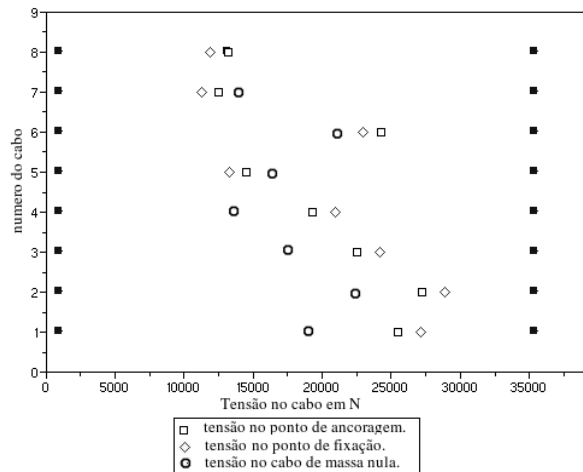


b) Forças de tração nos cabos

FIG. 8.10 - Catenárias e tensões na posição inicial da trajetória helicoidal $r=[150 \ 0 \ 20]$.



a) Cabos em catenária



b) Forças de tração nos cabos

FIG. 8.11 - Catenárias e tensões na posição em $r=[93, 12, 67]$

Com base no resultado apresentado pela FIG. 8.10, pode-se verificar que a posição da plataforma no plano de simetria do espaço de trabalho tem como consequência uma configuração de forças, também simétrica em cabos superiores e inferiores. Verifica-se ainda que, enquanto os cabos de massa nula 1 e 4 apresentam tensões maiores que os Nr 2 e 3, ocorre o oposto para cabos de massa não-nula. Este fato coincide com os cabos 2 e 3 possuírem maiores comprimentos que 1 e 4, e em virtude disso maior peso.

O comportamento dos cabos inferiores com e sem massa são similares, e pode-se atribuir este comportamento ao fato de que a maior parte do peso do sistema não ser sustentada por estes. Neste caso, ocorre apenas o aumento da tensão devido a aplicação de massa.

Para o caso parabólico vertical tem-se:

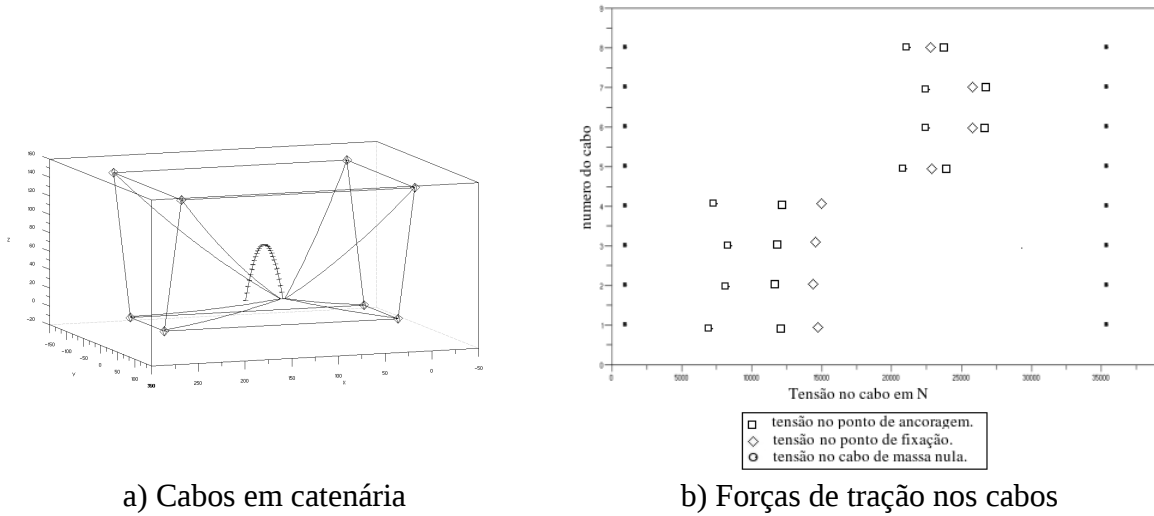


FIG. 8.12 - Catenárias e tensões na posição inicial da trajetória parabólica em $r=[105 \ 0 \ 20]$

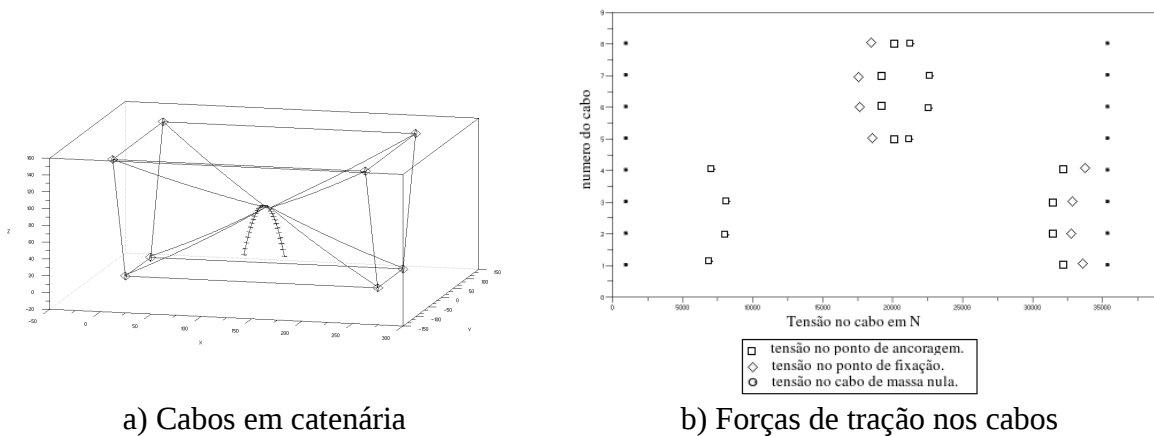


FIG. 8.13 - Catenárias e tensões em $r=[128 \ 0 \ 77]$

Na segunda posição apresentada, FIG. 8.13, é possível verificar que apesar das trações lineares nos cabos superiores estarem próximas do limite inferior de tração nos cabos, as trações da solução não-linear estão bem próximas de seu limite superior. O baixo valor da solução linear pode ser justificado pelo fato de que esta solução é determinada unicamente pelos esforços externos e pela posição da plataforma, no entanto, a solução não-linear além destas características apresenta ângulos de aplicação de força menores em relação a horizontal, e sustentam todo o peso do sistema, inclusive dos cabos.

Assim, caso utilize-se o critério de verificação das tensões ao longo de todo o cabo, este

ponto seria descartado do espaço de trabalho controlável para um pequeno acréscimo de aceleração ou inclinação da plataforma.

8.2 PROBLEMAS ENCONTRADOS DURANTE A OBTENÇÃO DO MODELO DINÂMICO E ANÁLISE DO ESPAÇO DE TRABALHO

Inicialmente, (FANG, 2005) propõe em seu trabalho que a cinemática direta seja um método de verificação da posição e orientação da plataforma em função das variáveis de junta. Contudo este método é baseado no módulo do vetor comprimento dos cabos e devido a formação de catenária não pode ser implementado.

Como segundo problema, sabe-se que o *Espaço de Trabalho com Respeito às Tensões*, é função somente da razão dos limites de forças máxima e mínima aplicada ao cabo. Sistemas com cabos de massa não-nula apresentam modificações consideráveis em relação a manipuladores com plataformas pontuais e cabos de massa nula, inclusive com regiões onde a plataforma, para qualquer que seja sua configuração, poderá se comportar como IRPM. Devido a manipuladores pontuais com cabos lineares representarem uma pequena minoria dos casos, não foram estabelecidas relações matemáticas entre estes casos e o manipulador estudado.

9 TRABALHOS FUTUROS

9.1 SOLUÇÃO DE SISTEMAS ALTAMENTE REDUNDANTES

Neste trabalho não foi possível obter a solução do manipulador instalado sob o Hangar de Eugène Freyssine (PORTO, 2009) por este caracterizar um sistema altamente redundante. Os meios computacionais disponíveis não foram capazes de apresentar solução em tempo hábil, devido a grande quantidade de sistemas lineares a serem resolvidos. Desta forma propõe-se que este caso seja retomado posteriormente, pela otimização do método de solução numérica, buscando soluções que não apresentam um alto custo computacional. (VERHOEVEN, 2004) dedica quase que um capítulo a manipuladores deste tipo.

9.2 VIBRAÇÃO NO SISTEMA

O próximo passo neste trabalho seria a inclusão da vibração do cabo em sua direção longitudinal. Em seguida, deve-se considerar a vibração transversão dos cabos, somente no plano vertical que o contem. Como consequência, a plataforma poderá ter sua postura perturbada em todos os graus de liberdade. Este passo ainda é considerado bastante complexo, embora (DIAO ET MA, 2009) tenham publicado um artigo sobre vibração em TBPM. Apesar das considerações feitas neste trabalho é esperado que grandes comprimentos de cabo apresentem vibrações

O problema se torna ainda mais importante devido a vibração dos cabos induzirem vibração, mudança de posição e forçamentos sobre a plataforma. Deve-se considerar também que a massa de grandes comprimentos cabos, pode exceder a massa da plataforma. Considerando a análise da trajetória elíptica, cerca de 1.300 metros de cabo 22,0m são

utilizados. Como a densidade linear deste cabo é 2.036 kg/m , tem-se mais de 2.600 kg de cabo sendo utilizados, suportando 400 kg de plataforma.

Desta forma, recomenda-se que a inercia dos cabos, os modos de vibração e outros fenômenos relacionados sejam analisados.

9.3 SENSAÇÃO E PERCEPÇÃO

Considerando uma possível aplicação deste trabalho em simuladores de vôo, um ponto que a considerado são os limites de movimento não-perceptíveis pelo usuário. Movimentos dessa magnitude podem ser necessários para corrigir uma trajetória ou retornar a plataforma a sua posição inicial ou de referência sem interromper a utilização do equipamento.

A compreensão destes limites máximos de velocidade e aceração não-perceptíveis podem servir de base para a determinação de trajetórias ótimas de retorno a posição de referência sem que o piloto ou instruoendo perceba que a plataforma esteja se movendo.

9.4 CONSIDERAÇÃO DOS PONTOS DE ANCORAGEM COMO POLIAS

Os pontos de ancoragem reais são definidos pelo ponto de descolamento do cabo da polia. Um estudo para aplicação de polias no modelo pode verificar que em para grandes espaços de trabalho os pontos de ancoragem podem ser considerados pontuais devido as dimensões das polias serem insignificantes e a variação na curva de força aplicada à plataforma que causam ser desprezível.

Contudo o problema de flexão dos cabos e desgaste por atrito em polias não pode ser ignorado, conforme citado em (VERRET, 1997) e (BRUCKMANN et al, 2008)

9.5 IMPLEMENTAÇÃO DE UM SISTEMA DE POSICIONAMENTO NA PLATAFORMA

Referencias amplamente conhecidas como (VERHOEVEN, 2004; FANG, 2005; e BRUCKMANN et al, 2008) propõe que a plataforma tenha sua posição controlada somente pela cinemática inversa, contudo estes trabalhos consideram cabos ideais. Em um problema para grandes espaço de trabalho, devem ser considerados principalmente a deformação mecânica do cabo, e seus efeitos de acomodação e desgaste. Logo um sistema de determinação da posição independente da configuração dos cabos deve ser utilizado.

Os sistemas de controle baseados no espaço de juntas e no espaço cartesiano proposto para o SEGESTA, podem não se aplicar a este caso por não considerarem os efeitos de deformação plástica e acomodação do material.

9.6 ANALISE DA RIGIDEZ DO SISTEMA QUANTO A MASSA DOS CABOS

De acordo com (VERHOEVEN, 2004) a rigidez do manipulador em um conjunto definido de posições do espaço de trabalho deve ser analisada para que se possa determinar o comportamento do sistema.

Dado que a formação de catenária eleva a tensão nos pontos de fixação, é esperado que a rigidez do sistema seja aumentada, contudo o aumento do comprimento de cabo necessário a curvatura da catenária pode tornar o sistema mais flexível. A influência destas duas características devem ser confrontadas.

10 CONCLUSÕES

Baseado nos resultados apresentados podem ser tiradas algumas conclusões sobre o comportamento geral de Plataformas de Stewart acionadas por cabos.

Inicialmente, analisando os trabalhos de (KAWAMURA et al, 1995; VERHOEVEN, 2004; OH E AGRAWAL, 2005; FANG 2005; e BRUCKMANN et al, 2008) quanto ao posicionamento dos pontos de ancoragem, e conforme foi verificado neste trabalho, sua geometria influencia diretamente a magnitude do espaço de trabalho controlável, as acelerações permissíveis ao sistema e a orientação da plataforma em diferentes posições.

Considera-se que a razão de aspecto de qualquer espaço de trabalho seja sempre $R.A. \geq 1$, onde $R.A. = 1$ representa um espaço de trabalho uniformemente distribuído. O aumento desta razão representa o índice de esbeltez do sólido de ancoragem. Desta forma, a razão de aspecto indica a efetividade da direção longitudinal do sólido de ancoragem.

Assim caso se deseje que a plataforma apresente grandes acelerações em somente uma direção, um espaço de trabalho alongado deve ser escolhido. Em contrapartida, caso seja necessário priorizar a variação da orientação da plataforma, deve-se optar por um sistema eficiente de distribuição de cabos. É conveniente mencionar que é possível conciliar estas duas características, contudo esta solução pode levar a sistemas altamente redundantes, de difícil solução numérica e talvez inviabilizando o controle em tempo real. Ainda assim, mesmo em sólidos de ancoragem alongados, o posicionamento de cabos em direções preferenciais, podem favorecer a movimentação nestas direções.

Quanto a relação entre a extensão do espaço de trabalho, verifica-se que a geometria do manipulador determina direções preferenciais de movimento e que a geometria da plataforma e o posicionamento dos pontos de fixação em relação ao sólido de ancoragem influem diretamente sobre a orientação da plataforma no espaço de trabalho controlável.

Em sistemas puramente translacionais, este problema não é tão grave, pois a definição dos pontos de fixação dos cabos não é função das pretensões de orientação da plataforma. Contudo ainda há o problema de que algumas direções são pouco favorecidas quanto ao movimento da plataforma.

Dos trabalhos de (OH E AGRAWAL, 2005; e MIKELSONS et al, 2007) é possível verificar que plataformas alongadas são mais suscetíveis a variações angulares que plataformas formadas por polígonos regulares, no entanto caso a plataforma pertença a um sólido de ancoragem esbelto e ambos estejam dispostos segundo a mesma orientação, o sistema se torna ineficaz a rotação recai em um caso quase que puramente translacional.

Conclui-se ainda que um sólido de ancoragem excessivamente alongado pode não permitir solução para o problema, pois a plataforma não poderia ser equilibrada por tal configuração de cabos em catenária.

Outro problema verificado em espaços de trabalho muito alongados ocorre devido a plataforma se tornar não-controlável em determinados sentidos. Caso não se deseje exercer estes movimentos, o manipulador é aplicável, contudo deve-se saber que as restrições podem ser significativas.

Sabe-se do caso com cabos de massa nula que o maior ângulo de inclinação que uma plataforma pode adotar, se aproxima da diagonal formada pelos pontos de ancoragem mais próximos da direção pretendida. Sabe-se também que devido a formação de catenárias, em sistemas com cabos de massa não-nula, esta orientação não pode ser atingida.

Assim volta-se a questão de cabos extras. Contudo uma solução de baixo custo em termos de limitações ao movimento da plataforma é a aplicação de cabos em pontos de fixação coincidentes ou suficientemente próximos como mencionado em (VERHOEVEN, 2004). (TRAVI, 2009) também apresenta diversas configurações de plataformas para o caso IRPM, onde a mera modificação da geometria da plataforma e pontos de fixação privilegia o movimento em determinada direção.

É possível ainda tecer algumas considerações sobre as simulações realizadas. Apesar deste comportamento ter sido verificado na trajetória parabólica, podem ser feitas algumas considerações a respeito do caso e generalizá-lo. É possível que se possuam posturas externas ao espaço de trabalho, no entanto estas devem estar relacionadas a altas acelerações voltadas para seu centro. Estas acelerações asseguram a aplicação de trações acima dos limites inferiores. Buscando uma conclusão mais geral a cerca do caso, para uma direção qualquer, não é recomendável, e talvez nem possível, que a plataforma apresente acelerações voltadas para o centro do espaço de trabalho abaixo de determinado nível, e nem orientadas para o exterior do espaço de trabalho, em posições próximas ao seu limite, sob o risco de exceder os limites de tração e ter seu movimento interrompido.

Conforme mencionado para a região viável, é interessante que, definido o espaço de trabalho para cabos de massa não-nula, seja definida uma margem interna a partir do limite deste, de modo que a plataforma possa apresentar acelerações em direções de interesse, de acordo com o caso estudado.

Esta margem obtida definindo-se o espaço de trabalho controlável para manipuladores em determinadas posições. Em seguida aplicam-se sucessivamente as acelerações desejadas e armazenam-se os espaços de trabalho obtidos para cada caso. A interseção dos diversos espaços de trabalhos indicam a região que realmente pode ser utilizada para a simulação de trajetórias com as acelerações desejadas. E a região excluída representa a margem de segurança para a simulação.

Sabe-se que a aplicação de um esforço externo ou de efeitos de inercia sobre a plataforma deformam o espaço de trabalho no sentido de sua aplicação. No entanto, a existência de acelerações em uma direção qualquer deforma o espaço de trabalho no sentido inverso. Logo, há um limite cinemático, que impede a existência de acelerações acima de determinados valores para cada posição.

Pode-se proceder da mesma forma em relação à inclinação da plataforma, dada a inclinação máxima desejável em que a plataforma será posicionada, deve-se gerar o espaço de trabalho nos dois sentidos de rotação, considerada em um único eixo, independentemente da posição dos demais. A interseção dos espaços de trabalho correspondentes a esta rotação nos dois sentidos indica o espaço de trabalho controlável com a margem de segurança sugerida para a rotação.

11 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BOSSCHER, Paul, EBERT-UPHOFF, Imme. Wrench-based analysis of cable-driven robots. In: PROCEEDINGS OF THE 2004 IEEE INTERNATIONAL, CONFERENCE ON ROBOTICS & AUTOMATION, April, 2004, New Orleans. Georgia Institute of Technology, 2004. p. 4950-4955.
- BOSTELMAN, Roger V., ALBUS, James S., **Stability of an underwater work platform suspended from an unstable reference.** Gaithherbusg: National Institute of Standards and Technology , 1993. 6 p.
- BOSTELMAN, Roger, ALBUS, James, MURPHY, Karl, TSAI, Tsung-Ming, AMATUCCI, Ed. **A Stewart platform lunar rover.** Gaithherbusg: National Institute of Standards and Technology , 1994. 9 p.
- BOSTELMANN, Roger, ALBUS, James, DAGALAKIS, Nicholas., JACOFF, Adams. Applications of the Nist Robocrane, **Robotics and Manufacturing**, Gaithherburg, v. 5, p. 403-410, 1994.
- BRUCKMANN, Tobias, MIKELSONS, Lars, BRANDT, Thorsten, HILLER, Manfred, SCHRAMM, Dieter. Wire robots part I - kinematics, analysis & design. In: **Parallel manipulators new development.** Vienna: I-Tech Education and Publishing , 2008. p. 109-132. il.
- BRUCKMANN, Tobias, MIKELSONS, Lars, BRANDT, Thorsten, HILLER, Manfred, SCHRAMM, Dieter. Wire robots part II - dynamics, control & application. In: **Parallel manipulators new development.** Vienna: I-Tech Education and Publishing , 2008. p. 133-152. il.
- BRUCKMANN, Tobias, MIKELSONS, Lars, HILLER, Manfred, SCHRAMM, Dieter. **A new force calculation algorithm for tendon-based parallel manipulators.** Duisburg: Chair for Mechatronics, University Duisburg-Essen. 2007. 6 p.
- BRUCKMANN, Tobias, POTT, Andreas, FRANITZA, Daniel, HILLER, Manfred. A modular controller for redundantly actuated tendon-based Stewart Platform. In: **Proceedings of European Conference on Mechanism Science**, Obergurgl. 2006. p. 1-12.
- BURDEN, Richard. L., FAIRES, J. Douglas. **Análise numérica.** 5. ed. São Paulo: Thompson Learning, 2003. 736p. il. ISBN 85-221-0297-X.
- CASTRUCCI, Plinio Benedito Lauro, RINO, Curti. **Sistemas não-lineares.** São Paulo: Edgar-Blucher Ltda, 1981. Vol. 2. 156 p. il. ISBN 97-885-8874-928-3.

- ROCHA, Alberto Gomes (alberto.rocha@belgobekaert.com.br). RES: dados técnicos sobre cabos. Email para LIMA, Cícero (cic_lima@yahoo.com.br) [mensagem capturada em 15 de setembro de 2009].
- DIAO, Xiumin, MA, Ou. Vibration analysis of a cable-driven parallel manipulators. **Multibody System Dynamics**, Las Cruces, v. 21, n. 4, p. 347-360, May, 2009
- DIEGUEZ, Jose Paulo P. **Métodos numéricos computacionais para a engenharia – Vol I**, Rio de Janeiro: Interciência, 1992, 301 p. il. ISBN 02-013-60438-8.
- DIEGUEZ, Jose Paulo P. **Métodos numéricos computacionais para a engenharia – Vol I**, Rio de Janeiro: Âmbito Cultural Edições Ltda, 1994, 431 p. il. ISBN 85-980-1304-8.
- FANG, Shi-qing. **Design, modeling and motion control of tendon-based parallel manipulators**. 2005. Tese (Doutorado em Ciências) – Gerhard-Mercator-University, Institute for Mechatronics and System Dynamics, 2005.
- FANG, Shi-qing, FRANITZA, Daniel, TORLO, Marc, BEKES, Franklin. HILLER, Manfred. Motion control of a tendon-based parallel manipulator using optimal tension distribution. **IEEE/ASME TRANSACTIONS ON MECHATRONICS, VOL. 9, NO. 3, SEPTEMBER**, Duisburg, v. 9, n. 3, p. 561-568, September 2004 .
- HAUG, Edward J. **Computer aided kinematics and dynamics of mechanical systems: Basic methods**. 1. ed. Massachussets: Allyn and Bacon Series, 1998. 498p. il. ISBN 020-511669-8.
- HAUG, Edward J. **Intermediate dynamics**. 1. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1992. 420 p. il. ISBN 0-13-478926-1.
- HIBBELER, Russel C. **Resistência dos materiais**, 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S. A, 1997. 701p. il. ISBN 85-760-5373-X
- HILLER, Manfred, FANG, Shi-qing, MIELCZAREK, Sonja, VERHOEVEN, Richard, FRANITZA, Daniel. Design, analysis and realization of tendon-based parallel manipulators. **Mechanism and machine theory 40** , Duisburg: Elsevier, p. 429–445 . November, 2004.
- HUANG, Jiu, HILLER, Manfred, FANG, Shi-qing. Simulation Modeling of the Motion Control of a Two Degree of Freedom, Tendon Based, Parallel Manipulator in Operational Space Using MATLAB. **Journal of China University of Mining & Technology**, Duisburg v. 17, n. 2, p. 179-183, June 2007.
- HUANG, Tian, ZHAO, Xingyu, ZHOU, Lihua, ZHANG, Dawei, ZENG, Ziping, WHITEHOUSE, D. J. Stiffness estimation of a parallel kinematic machine. **Science in China Series E: technological sciences**, Tianjin, v. 44, n. 5, p. 473-485, October, 2001.

- KAWAMURA, S., CHOE, W., TANAKA, S., PANDIAN, S. R. Development of an ultrahigh speed robot FALCON using wire drive system. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION, Kusatsu: Ritsumeikan University , 1995. p. 215–220.
- KAWAMURA, Sadao, KINO, Hitoshi, WON, Choe. High-speed manipulation by using parallel wire-driven robots. **Wire driven robots**, Cambridge: v. 18, p. 13–21. September, 2000.
- KRAFT, Manfred, SCHAPER, Erdmann. Simulation and optimisation of a tendon-based Stewart Platform. **Technische Universität Berlin, IWF**, Berlin: 6 p.
- MERLET, Jean-Pierre. A generic trajectory verifier for motion planning of parallel robots, **Journal of Mechanical Design** , Sophia-Antipolis, v. 123, p. 510-515. December, 2001.
- MERLET, Jean-Pierre. Optimal desing of robots. **Proceedings of Robotics: Science and Systems**, Cambridge, v. 1, 8 p. June 2005.
- MIKELSONS, Lars, BRUCKMANN, Tobias, HILLER, Manfred, SCHRAMM, Dieter. A Real-time capable force calculation algorithm for redundant tendon-based parallel manipulators. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION. 2008, Pasadena: Chair for Mechatronics, University of Duisburg-Essen , 2008. p. 3869-3874.
- MING, A. and HIGUCHI, T. Study on multiple degree-of-freedom positioning mechanism using wires (part 1) – concept, design and control. **International Journal of the Japan Society for Precision Engineering**, Tokyo, v. 28, n. 2, p. 131–138. October, 1994.
- MING, A. and HIGUCHI, T. Study on multiple degree-of-freedom positioning mechanism using wires (part 2) – development of a planar completely restrained positioning mechanism. **International Journal of the Japan Society for Precision Engineering**, Tokyo, v. 28, n. 3, p. 235–242, October 1994.
- OH, So-Ryeok, AGRAWAL, Sunil K. Cable suspended planar robots with redundant cables: controllers with positive tensions. In: IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS, Delaware: Associate Editor P. E. Dupont, Editor I. Walker , 2005. p. 457-465 .
- OU, Yeong-Jeong. **The desing of tendon-driven manipulators with isotropic transmission characteristics**. 1994. Tese (Doutorado em Ciências) – University of Maryland, Faculty of the Graduate School, 1994.
- LAFOURCADE, Pascal, LLIBRE, Michel, REBOULET, Claude. Design of a parallel wire-driven manipulator for wind tunnels, In: PROCEEDINGS OF THE WORKSHOP ON FUNDAMENTAL ISSUES AND FUTURE DIRECTIONS FOR PARALLEL MECHANISMS AND MANIPULATORS, 2002, Quebec, pp.187-194.

- PIRES, Paulo Sergio da Motta. **Introdução ao Scilab versão 3.0**, Natal: Departamento de Engenharia de Computação e Automação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2004. 120p.
- PORTO, Claudia Estrela. Dos hangares aos aeroportos. **Periódico eletrônico de Arquitetura e Urbanismo**, Brasília, v. 11, p. 1-9, 2009.
- PRISCO, G. M., BERGAMASO, M. Dynamic modelling of a class of tendon driven manipulators, **ICAR**, Monterey, p. 893-899. July 1997.
- SANTOS, Sidney. M. G. **Cálculo estrutural**. 1. ed. São Paulo: Ao Livro Técnico, 1959. 385p. il. ISBN CSL:1107. 47. 045.
- SANTOS, Vitoriano Ruas de Barros. **Curso de cálculo numérico**. 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1982. 231 p. il. ISBN 85-216-0156-5.
- SHIANG, Wei-Jung, CANNON, David, GORMAN, Jason. Dynamic analysis of the cable array robotic crane. In: PROCEEDINGS OF THE 1999 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS & AUTOMATION , 1999, Detroit: Department of Industrial and Manufacturing Engineering, Department of Mechanical Engineering, , 1999. p. 2495-2500.
- SHIGLEY, Joseph E., MISCHKE, Charles R. **Mechanical engineering desing**. 6 ed. New York: Mc Graw-Hill, 2001. 1248 p. il. ISBN 0-07-237301-6.
- TADOKORO, Satoshi, VERHOEVEN, Richard, HILLER, Manfred, TAKAMORI, Toshi. A portable parallel manipulator for search and rescue at large-scale urban earthquakes and an identification algorithm for the installation in unstructured environments. In: PROCEEDINGS OF THE 1999 IEEE/RSJ INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT ROBOTS AND SYSTEMS , 1999, Rokodai: Department of Computer and Systems Engineering , 1999. p. 1222-1227.
- TRAVI, Alexandre Back. **Plataforma de Stewart acionada por cabos**. 2009, 114 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Instituto Militar de Engenharia, 2010.
- TSAI, Lung-Wen. **The mechanism of redundantly-driven robotic systems**. Maryland: Institute for Systems Research, Mechanical Engineering Department, University of Maryland, 1996. 13 p. (Patent Pending US5245263A)
- UNGER, Joseph, DAGALAKIS, Nicholas G, TSAI, Tsung-Ming, LEE, James D. Optimum stiffness study for a parallel link robot crane under horizontal force, In: PROCEEDINGS OF THE SECOND INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON ROBOTICS AND MANUFACTURING RESEARCH, EDUCATION AND APPLICATIONS, 1988. Albuquerque, 1988. p. 1-10.
- VERHOEVEN, Richard. **Analysis of the workspace of tendon-based stewart platforms**. 2004. Tese (Doutorado em Ciências), University of Duisburg-Essen, 2004.

- VERHOEVEN, Richard, HILLER, Manfred, TADOKORO, Satoshi. Workspace, stiffness, singularities and classification of tendon-driven stewart platforms, In: ADVANCES IN ROBOT KINEMATICS: ANALYSIS AND CONTROL, 1998, Salzburg, 1998, pp. 105–114.
- VERRET, Roland. **Casar special wire ropes: technical documentation**. Kirkel: WRTA Wire Rope Technology Aachen, 1997. 32p.
- WILLIAMS II, Robert L. Novel Cable - suspended robocrane support, **Industrial Robot: An International Journal**, Athens, v. 32, n. 4, p. 326-333. May 2005.
- YAMAMOTO, Motoji, YANAI, Noritaka, MOHRI, Aakira. Trajectory control of incompletely restrained parallel-wire-suspended mechanism based on inverse dynamic, In: IEEE TRANSACTION ROBOTICS, 2004, Seul: Associate Editor F. Wang and Editor I. Walker , 2004. p. 840-850.
- YINGJIE, Lu, WENBAI, Zhu, GEXUE, Ren. Feedback control of a cable- driven gough-stewart platform, In: IEEE TRANSACTION ON ROBOTICS, 2006, Tsinghua : Associate Editor W. F. Chung and Editor F. Park , 2006. p. 198-202.
- ZHENG, Ya-Qing. **Feedback linearization control of a wire-driven parallel support system in wind tunnel**. Quanzhou: National Natural Science foundation of China , 2006.

12 APÊNDICE

12.1 APÊNDICE 1: DEFINIÇÕES SOBRE FIOS E CABOS EM CATENÁRIA

Seja um fio ou cabo qualquer suspenso pelos pontos A e B conforme FIG. 12.1. Inicialmente consideram-se os eixos coordenados com origem no vértice da curva formada por este cabo. Sem a ação de outros carregamentos, o cabo toma o aspecto de uma curva que será a funicular de seu próprio peso.

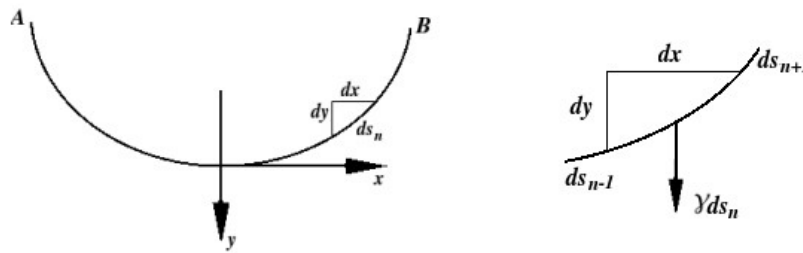


FIG. 12.1 – Modelo simples de cabo em catenária

As forças aplicadas em um elemento infinitesimal de cabo são:

- O próprio peso $p = \gamma ds_n$, onde γ é o peso específico linear do cabo em N/m ; e,
- As forças axiais em suas extremidades.

Para a obtenção das equações de equilíbrio são feitas as seguintes considerações:

- Não existem quaisquer outras forças externas atuando sobre o cabo, e
- O cabo adotará sempre a configuração de equilíbrio estático.

Neste trabalho, os parâmetros relativos aos cabos do manipulador, como tração ao longo de seu comprimento e direção de aplicação da força nos pontos de fixação e ancoragem, são determinados em relação a sua posição de equilíbrio estático. Modos de vibração e outros fenômenos relacionados não serão analisados.

Dividindo-se o cabo estático em segmentos infinitesimais ds , tem-se segmentos com peso γds , e cujo equilíbrio do cabo quando $ds_n \rightarrow 0$, tende para a própria curva assumida pelo seu peso, chamada *catenária*.

Na FIG. 12.2 são apresentados os ângulos de inclinação e as trações axiais nas extremidades do cabo T_1 e T_2 .

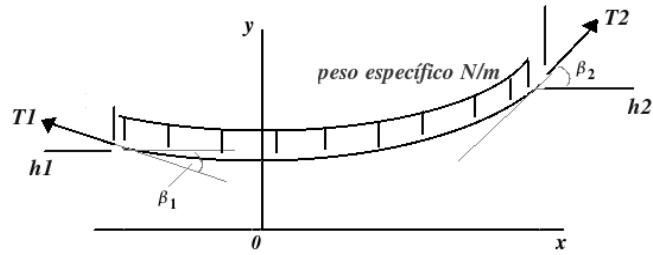


FIG. 12.2 – Catenária sujeita ao próprio peso

12.1.1 EQUAÇÕES GERAIS DOS FIOS E CABOS

Seja o fio S no espaço, sujeito a tensões T_1 e T_2 em suas extremidades e a uma força f por unidade de comprimento de componentes f_x , f_y e f_z . Seja também um elemento infinitesimal de S , $\overline{AB}=ds$, onde l , m e n são os cossenos diretores de T_A em A . Considera-se que essas grandezas variarão infinitesimalmente ao longo de \overline{AB} , de acordo com a FIG. 12.3.

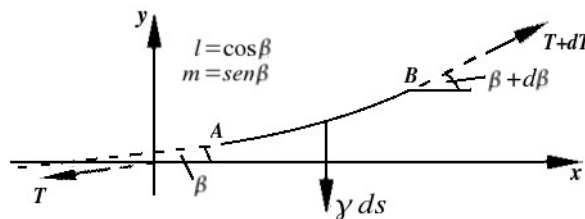


FIG. 12.3 – Representação das forças aplicadas sobre um elemento infinitesimal de cabo

Para o equilíbrio no caso tridimensional, pode-se escrever

$$\sum X: f_x ds - (T + dT)(l + dl) + Tl = 0 \quad (12.1)$$

desprezando-se o termo de 2ª ordem e procedendo-se de maneira análoga para as direções Oy e Oz , tem-se:

$$f_x ds = l dT + T dl = d(Tl) \quad (12.2)$$

e

$$\begin{cases} f_x = \frac{d}{ds}(Tl) \\ f_y = \frac{d}{ds}(Tm) \\ f_z = \frac{d}{ds}(Tn) \end{cases} \quad (12.3)$$

No plano que contem a catenária, tem-se apenas as equações referentes a Oxy .

$$\begin{cases} f_x = \frac{d}{ds}(Tl) \\ f_y = \frac{d}{ds}(Tm) \end{cases} \quad (12.4)$$

A Catenária é caracterizada como sendo o caso particular em que o cabo esteja contido em um único plano e sujeito somente ao próprio peso. Fixando o eixo Oy paralelo a direção da gravidade, de acordo com a FIG. 12.3, são obtidas as seguintes equações de equilíbrio:

$$\begin{cases} d(T \cos \beta) = 0 \\ d(T \sin \beta) = \gamma ds \end{cases} \quad (12.5)$$

Onde:

$$T \cos \beta = c^{te} = H \quad (12.6)$$

que é a componente horizontal de tração no cabo, e:

$$d\left(\frac{\sin \beta}{\cos \beta} T \cos \beta\right) = \gamma ds \quad \text{ou} \quad d(y' H) = \gamma ds \quad (12.7)$$

A EQ. 12.8 descreve a *Equação Geral de Curvatura da Catenária*:

$$y'' = -\frac{\gamma}{H} \frac{ds}{dx} = -\frac{\gamma}{H} \sqrt{1+(y')^2} \quad (12.8)$$

Assim para as considerações feitas, a *Equação geral de fios e cabos*, recai sobre a *Equação da catenária*.

12.1.2 ESTUDO PARTICULAR DA CATENÁRIA

Considerando a razão $a=H/\gamma$ constante e para as condições iniciais $x=0$ e $y'=0$, a EQ. 12.8 apresenta como solução a EQ. 12.9:

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (12.9)$$

Desta forma, um cabo suspenso pelos pontos A e B, conforme FIG. 12.1, é descrito matematicamente pela EQ. 12.9 e representado graficamente pela FIG. 12.4.

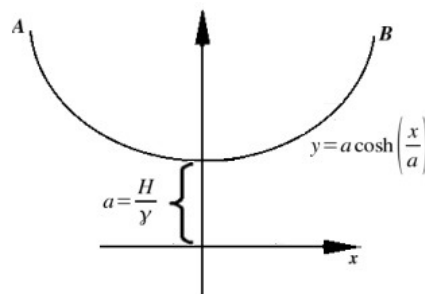


FIG. 12.4 – Modelo de catenária fixa em dois pontos

Sendo conhecidos: o peso específico do cabo, a força horizontal aplicada ao longo da catenária e seus pontos de A e B, é possível determinar todos os outros parâmetros envolvidos.

Considerando um trecho de cabo, entre dois pontos quaisquer x_1 e x_2 , de acordo com a FIG. 12.5, são determinadas as distâncias horizontal e vertical entre seus pontos de apoio, respectivamente l e d .

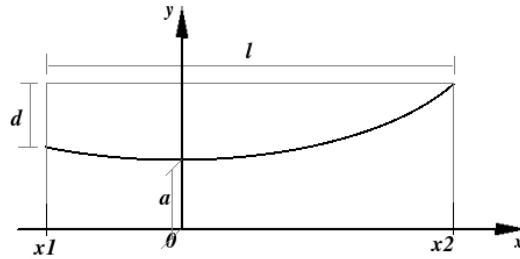


FIG. 12.5 – Determinação das distancias horizontal e vertical entre pontos de fixação e de ancoragem da catenária

Estas distâncias, em função dos pontos inicial e final do cabo, são dadas:

$$l = x_2 - x_1 ; e, \quad (12.10)$$

$$d = y_2 - y_1, \quad (12.11)$$

Ao longo deste trabalho, considera-se sempre que, para a solução do espaço de trabalho com cabos flexíveis de massa não-nula, tem-se $x_2 > x_1$.

Assim γ , l , d e H são dados do problema, pois:

- a) l e d são as distâncias entre os pontos de fixação e de ancoragem do manipulador em determinada posição, para cada cabo, pois sendo conhecida a posição da plataforma e dos pontos de ancoragem, é possível obter x_1 e x_2 no referencial R^C de cada cabo;
- b) γ é peso por unidade de comprimento do cabo, sendo dado de projeto; e,
- c) H corresponde a força horizontal do cabo, obtida da tração no cabo

Dados γ , l , d e H , os pontos x_1 e x_2 são determinados. Para isso recorre-se as EQ. 12.9 e 12.11, de onde obtém-se:

$$\cosh\left(\frac{x_1 + l}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x_1}{a}\right) - \frac{d}{a} = 0 \quad (12.12)$$

Resolvendo-se esta equação em x_1 , obtém-se o ponto inicial e conseqüentemente o ponto final da catenária pela EQ. 12.10.

Em relação ao ângulo de inclinação do cabo com a horizontal, sabe-se que a tangente do

ângulo que o cabo faz com a horizontal em determinado ponto corresponde a derivada $\frac{dy}{dx}$.

Derivando a EQ. 12.9 obtém-se a EQ. 12.13:

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (12.13)$$

Como $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\beta)$:

$$\operatorname{tg} \beta = \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (12.14)$$

A tração em um ponto qualquer da catenária é dada em função da componente horizontal pela EQ. 12.15

$$T(x) = \frac{H}{\cos(\beta(x))} \quad (12.15)$$

O comprimento de cabo entre dois pontos distintos x_1 e x_2 , é obtido pela aplicação da EQ. 12.16 em 12.13 resultando em 12.17.

Analisando a FIG. 12.1 quanto ao elemento infinitesimal de cabo, tem-se que:

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2} \rightarrow \frac{ds}{dx} = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{1/2} \quad (12.16)$$

$$\frac{ds}{dx} = \left(1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{1/2} \quad (12.17)$$

Aplicando a relação fundamental da trigonometria hiperbólica $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ na EQ. 12.17, tem-se:

$$\frac{ds}{dx} = \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (12.18)$$

Integrando a EQ. 12.18, entre os pontos x_1 e x_2 obtém-se a expressão do comprimento de cabo em catenária, em função da tração no cabo e das posições inicial e final x_1 e x_2 que são definidos pelas distâncias l e d .

$$\Delta s = a \left(\sinh\left(\frac{x_1+l}{a}\right) - \sinh\left(\frac{x_1}{a}\right) \right) \quad (12.19)$$

12.1.3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA PARA CABOS ELÁSTICOS

Considerando que o cabo se comporte como um material elástico linear, a deformação longitudinal ao longo de seu comprimento deve ser determinada para que possa ser compensada pelo atuador, e este manter a posição da plataforma.

Para se determinar a tensão em qualquer ponto do cabo entre x_1 e x_2 , recorre-se a EQ. 12.14 e 12.15.

Da trigonometria tem-se que: $\frac{1}{\cos^2 \beta} = 1 + \operatorname{tg}^2 \beta$, logo:

$$T(x) = H \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (12.20)$$

A EQ. 12.20 fornece $T(x)$, no entanto para o cálculo da deformação do cabo, é necessário que se obtenha a expressão da tração no cabo em função do comprimento de cabo, dado por $T(s)$.

O comprimento de cabo, do vértice da catenária até um ponto x qualquer pode ser obtido por 12.21 como:

$$S(x) = a \cdot \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (12.21)$$

Utilizando a *Equação Fundamental da Trigonometria Hiperbólica* e a razão $a = H/\gamma$, as EQ. 12.20 e 12.21 podem ser reescritas como:

$$T(s) = \gamma \sqrt{a^2 + s^2} \quad (12.22)$$

Que é a expressão da tração em função do comprimento de cabo à partir do vértice.

De (HIBELLER, 1997), tem-se que a deformação axial elástica de um elemento material, respeitado o Princípio de Saint-Venant, é dada por:

$$d\delta = \frac{T(s) ds}{A(s) \cdot E} \quad (12.23)$$

A área da seção transversal do cabo é considerada constante, devido a pequena variação que apresenta em relação a deformação axial do cabo. Integrando a equação acima em um trecho s_1 a s_2 , obtém-se a deformação elástica do cabo sujeito a tração $T(s)$:

$$\Delta L = \int_{s_1}^{s_2} \frac{T(s)}{A \cdot E} ds \quad (12.24)$$

Recorrendo as EQ. 12.22 e 12.24 obtém-se:

$$\Delta L = \frac{\gamma}{A \cdot E} \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{a^2 + s^2} ds \quad (12.25)$$

A deformação axial do cabo é dada unicamente por esforços axiais, e por se tratar de um cabo em catenária, a expressão da tração deve estar em função do comprimento de cabo. Assim os esforços e as deformações no cabo, embora sujeito a um carregamento transversal, são caracterizados unicamente como axiais.

Aplicando a razão $a = H/\gamma$ e as EQ. 12.18 e 12.21. em EQ. 12.25 obtém-se a expressão

de ΔL em função de x_1 e x_2 :

$$\Delta L = \frac{\gamma a}{A \cdot E} \int_{x_1}^{x_2} \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right) dx \quad (12.26)$$

Por fim, integrando a EQ. 12.26 obtém-se a EQ 12.27 da deformação elástica linear do cabo, em função de l e x_1 :

$$\Delta L = \frac{H}{4AE} \left(a \left[\operatorname{senh}\left(\frac{2(x_1+l)}{a}\right) - \operatorname{senh}\left(\frac{2x_1}{a}\right) \right] + 2l \right) \quad (12.27)$$

12.1.4 EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS PARA GRANDES ESPAÇOS DE TRABALHO

Assim são obtidas as *Equações Fundamentais com Respeito a Cabos Flexíveis*, para a solução do problema de determinação de grandes espaços de trabalho. Embora a figura FIG. 12.5 ilustre bem o comportamento geral de uma catenária, exceto em algumas posições da plataforma em manipuladores CPRM e RRPM, o cabo se apresentará segundo uma função de posição monotônica e estritamente crescente, de acordo com a FIG. 12.6.

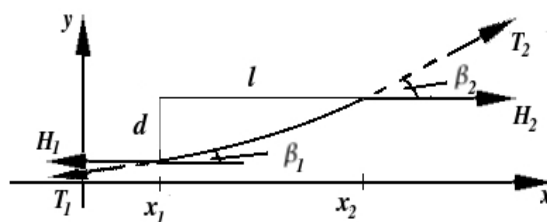


FIG. 12.6 – Modelo de cabo em catenária para determinação do espaço de trabalho

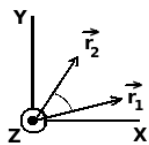
Reescrevendo as equações desenvolvidas nas seções 12.1.2 e 12.1.3 na tabela de formulas abaixo, e sabendo que para as considerações adotadas na seção 12.1.2 todos os parâmetros são determinados em função de γ , l , d e H tem-se:

TAB. 12.1 – Equações Fundamentais com Respeito a Cabos Flexíveis para Grandes Espaços de Trabalho

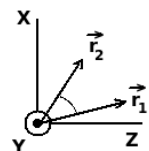
	Expressão	EQ.	Dados obtidos
1	$a = \frac{h}{\square}$;		obtem-se “a”
2	$\tan(\beta) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$;	(12.14)	obtem-se β_1 e β_2
4	$\cosh\left(\frac{x_1+l}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x_1}{a}\right) - \frac{d}{a} = 0$;	(12.12)	obtem-se x_1 e por (12.10), x_2
5	$T(x) = \frac{h}{\cos(\square)}$;	(12.15)	obtem-se T_1 e T_2
6	$\Delta s = a \left(\sinh\left(\frac{x_1+l}{a}\right) - \sinh\left(\frac{x_1}{a}\right) \right)$.	(12.19)	obtem-se ΔS
7	$\square L = \frac{h}{4AE} \left(a \left[\sinh\left(\frac{2(x_1+l)}{a}\right) - \sinh\left(\frac{2x_1}{a}\right) \right] + 2l \right)$	(12.27)	Deformação elástica longitudinal do cabo

12.2 APÊNDICE 2: DEMONSTRAÇÃO DA OBTENÇÃO DA MATRIZ DE ROTAÇÃO $R_p(\mathbf{x})$

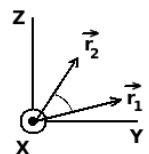
Para o sistema de coordenadas XYZ, deseja-se realizar a rotação de ψ em torno do eixo Z, ϑ em torno do eixo Y e φ em torno do eixo X. Assim representando-se cada rotação como bidimensional de \mathbf{r}_1 para \mathbf{r}_2 , matematicamente dada por $\mathbf{r}_2 = R_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}_1$, tem-se:



$$R_z(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) & 0 \\ \text{sen}(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$R_y(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & 0 & \text{sen}(\vartheta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\vartheta) & 0 & \cos(\vartheta) \end{bmatrix}$$



$$R_x(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\text{sen}(\varphi) \\ 0 & \text{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

Considerando dois referenciais, um fixo XYZ e outro móvel xyz, inicialmente coincidentes, e que o vetor \mathbf{r}_1 é constante em xyz, a rotação de ψ em torno do eixo z para obtenção de \mathbf{r}_2 no referencial fixo é obtida por $\mathbf{r}_2 = R_z(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}_1$. Observar que a rotação se dá no eixo z do referencial móvel.

As rotações em torno dos eixos y e x são obtidas rotacionando-se \mathbf{r}_1 nos eixos do referencial móvel, de acordo com a seqüência ZYX. As rotações são ilustradas na FIG. 12.7:

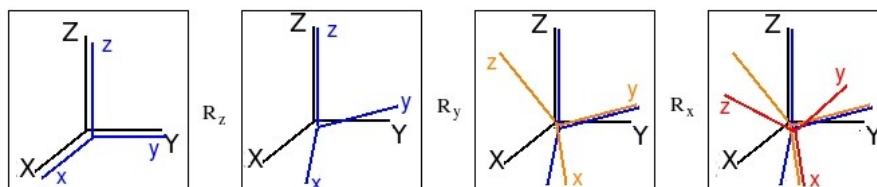


FIG. 12.7 – Representação de rotações tri-dimensionais na seqüência ZYX

Para a sequência de rotação ZYX, tem-se a matriz de rotação $R_p(\mathbf{x})=R_z(\mathbf{x}).R_y(\mathbf{x}).R_x(\mathbf{x})$ é dada por:

$$R_p(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} C\psi C\vartheta & C\psi S\vartheta S\varphi - S\psi C\varphi & C\psi S\vartheta C\varphi + S\psi S\varphi \\ S\psi C\vartheta & S\psi S\vartheta S\varphi + C\psi C\varphi & S\psi S\vartheta C\varphi - C\psi S\varphi \\ -S\vartheta & C\vartheta S\varphi & C\vartheta C\varphi \end{bmatrix}$$

12.3 APÊNDICE 3: DEMONSTRAÇÃO DA DERIVADA DA MATRIZ DE ROTAÇÃO $R_p'(x)$

Existem duas maneiras de se obter a derivada temporal de $R_p(x)$:

1. por derivação direta de $R_p(x)$;
2. pela derivada das matrizes de rotação $R_x(x)$, $R_y(x)$ e $R_z(x)$.

Pelo segundo caso obtém-se como resultado final a solução direta do primeiro.

Seja $R_p(x)=A$, $R_z(x)=B$, $R_y(x)=C$ e $R_x(x)=D$; logo, $A=B.C.D$. Assim $\dot{A}=\dot{B}C D+B\dot{C} D+BC\dot{D}$. Em \dot{B} , \dot{C} e \dot{D} aparecem os termos $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$ e $\dot{\varphi}$ respectivamente e desta forma pode-se considerar \dot{A} como sendo:

$$A_1 \dot{\psi} = \dot{B} C D ;$$

$$A_2 \dot{\vartheta} = B \dot{C} D ; e,$$

$$A_3 \dot{\varphi} = B C \dot{D} ,$$

$$e a derivada \dot{A} = A_1 \dot{\psi} + A_2 \dot{\vartheta} + A_3 \dot{\varphi}$$

(escrevendo a solução por colunas)

$$R_p'(x) = \begin{bmatrix} -S\psi C\vartheta.\dot{\psi} - C\psi S\vartheta.\dot{\vartheta} \\ C\psi C\vartheta.\dot{\psi} - S\psi S\vartheta.\dot{\vartheta} \\ -C\vartheta.\dot{\vartheta} \\ (-S\psi S\vartheta S\varphi - C\psi C\varphi).\dot{\psi} + C\psi C\vartheta S\varphi.\dot{\vartheta} + (C\psi S\vartheta C\varphi + S\psi S\varphi).\dot{\psi} \\ (C\psi S\vartheta S\varphi - S\psi C\varphi).\dot{\psi} + S\psi C\vartheta S\varphi.\dot{\vartheta} + (S\psi S\vartheta C\varphi - C\psi C\varphi).\dot{\psi} \\ -S\vartheta S\varphi.\dot{\vartheta} + C\vartheta C\varphi.\dot{\varphi} \\ (-S\psi S\vartheta C\varphi + C\psi S\varphi).\dot{\psi} + C\psi C\vartheta C\varphi.\dot{\vartheta} + (-C\psi S\vartheta S\varphi + S\psi C\varphi).\dot{\psi} \\ (C\psi S\vartheta C\varphi + S\psi S\varphi).\dot{\psi} + S\psi C\vartheta C\varphi.\dot{\vartheta} + (-S\psi S\vartheta S\varphi - C\psi C\varphi).\dot{\psi} \\ -S\vartheta C\varphi.\dot{\vartheta} - C\vartheta S\varphi.\dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

12.4 APÊNDICE 4: DEMONSTRAÇÃO DE $\omega = H_b^{-1} \cdot \Theta$

Determinação da velocidade angular ω da plataforma e da matriz de transformação H_b^{-1} .
 Deseja obter a matriz H_b^{-1} , para obtenção de ω , por meio da equação:

$$\omega = H_b^{-1} \cdot \Theta$$

Por convenção a aspa após o vetor indica que este se encontra no referencial local (ou móvel) na plataforma. Dados os referenciais global (XYZ) e local (xyz)', tem-se para um ponto P fixo na plataforma (ou seja, fixo no referencial móvel xyz')

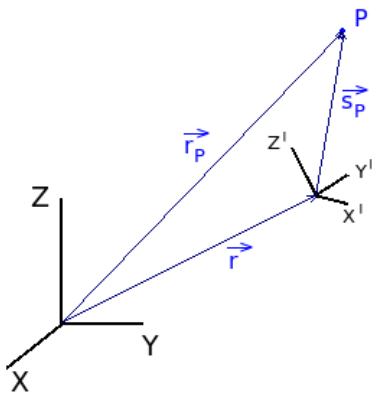


FIG. 12.8 – Representação do referencial local.

Assim pode-se obter a posição de P no ref. global por:

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r} + \mathbf{s}_p, \text{ sendo } \mathbf{s}_p = \mathbf{R}_p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{s}_p'$$

sabe-se que $\mathbf{R}_p(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$ e $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}$.

Tem-se as equações:

$$(I) \mathbf{r}_p = \mathbf{r} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_p', \text{ onde } \mathbf{s}_p' \text{ é um vetor constante fixo em } xyz'.$$

Derivando a equação (I):

$$(II) \dot{\mathbf{r}}_p = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{s}_p'.$$

tem-se que: $\mathbf{s}_p' = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{s}_p$.

como a matriz \mathbf{A} é ortogonal ($\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$) e $\mathbf{s}_p' = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{s}_p$.

Aplicando (I) em (II):

$$(III.a) \dot{\mathbf{r}}_p = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{s}_p$$

Valendo-se ainda que \mathbf{A} é ortogonal, $\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I}$. Derivando esta relação, obtém-se $\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \dot{\mathbf{A}}^T = 0$ e $\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T = -\mathbf{A} \dot{\mathbf{A}}^T = -(\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T)^T$. Este termo demonstra que $\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T$ é uma matriz

anti-simétrica e pode ser representada por $\tilde{\omega}$ que é a matriz anti-simétrica associada a um vetor ω .

Reescrevendo (III.a) na forma da matriz $\tilde{\omega}$ obtem-se:

$$(III.b) \quad \dot{r}_p = \dot{r} + \tilde{\omega} \cdot s_p$$

Sabe-se ainda que a multiplicação matricial $\tilde{\omega} \cdot s_p$ corresponde ao produto vetorial $\tilde{\omega} \times s_p$, na forma da matriz anti-simétrica associada $\tilde{\omega}$, assim a equação (III) passa a ser escrita na forma:

(IV) $\dot{r}_p = \dot{r} + \tilde{\omega} \times s_p$, que é a equação geral do movimento de um corpo rígido, logo $\tilde{\omega}$ é, de fato, a velocidade angular da plataforma considerada como um corpo rígido.

Analisando a equação geral do movimento e comparando as equações (III.a) e (IV) verifica-se que:

$$(V) \quad \dot{A} A^T = \tilde{\omega}$$

e que como o termo $\tilde{\omega} \cdot s_p$ de (III.b) e $\tilde{\omega} \times s_p$ de (IV) representam a componente do movimento rotacional do sistema local em relação ao referencial fixo e $\tilde{\omega}$ é obtido a partir das componentes da equação (V).

Aplicado a plataforma, $\tilde{\omega}$ representa sua velocidade angular no referencial global.

(VI) Recorrendo-se a notação $A=B.C.D$, somente os termos correspondentes ao vetor associado a matriz anti-simétrica $\tilde{\omega}$ são calculados

$$\tilde{\omega} = \dot{A} A^T = A_1 A^T \dot{\psi} + A_2 A^T \dot{\vartheta} + A_3 A^T \dot{\phi}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{(32)} \\ \tilde{\omega}_{(13)} \\ \tilde{\omega}_{(21)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 A^T_{(32)} & A_2 A^T_{(32)} & A_3 A^T_{(32)} \\ A_1 A^T_{(13)} & A_2 A^T_{(13)} & A_3 A^T_{(13)} \\ A_1 A^T_{(21)} & A_2 A^T_{(21)} & A_3 A^T_{(21)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

Desta forma obtém-se H_b^{-1} :

$$H_b^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -S\varphi & C\varphi C\psi \\ 0 & C\varphi & S\varphi C\psi \\ 1 & 0 & -S\psi \end{bmatrix}$$

e sua derivada:

$$\dot{(H_b^{-1})} = \begin{bmatrix} 0 & -C\varphi \cdot \dot{\varphi} & -S\varphi C\psi \cdot \dot{\varphi} - C\varphi S\psi \cdot \dot{\psi} \\ 0 & -S\varphi \cdot \dot{\varphi} & -C\varphi C\psi \cdot \dot{\varphi} - S\varphi S\psi \cdot \dot{\psi} \\ 0 & 0 & -C\psi \cdot \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Ou seja, a partir das velocidades angulares no referencial local, obtém-se os omegas no referencial global.

12.5 APÊNDICE 5: APLICAÇÃO DA SÉRIE DE TAYLOR PARA OBTENÇÃO DA CONFIGURAÇÃO CINEMÁTICA DA PLATAFORMA

Teorema (Formula de Taylor com Resto): Seja $f(x)$ e suas $n+1$ derivadas definidas e contínuas no intervalo I definido $|x-a| < R$. Então, para todo x na EQ. 12.27, tem-se:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) \quad (12.27)$$

onde,

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t) dt \quad (12.28)$$

A Série de Taylor é em geral representada por uma série finita de n termos gerada pelo somatório da EQ. 12.27. $R_n(x)$ é o erro de truncamento associado a série é normalmente compensado pela utilização de um método numérico adequado.

Sabe-se também que, obedecida a condição de existência dada no Teorema, a Série de Taylor é capaz de obter o $(i+1)$ -ésimo ponto $f(x)$ a partir do i -ésimo ponto $f(a)$, desde que x esteja na vizinhança de a

Assim são obtidas as Séries para:

- $n=0$;
- $n=1$; e,
- $n=2$.

Para $n=0$:

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!} (x-a)^0 + \frac{1}{0!} \int_a^x (x-t)^0 f'(t) dt$$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \underbrace{f'(t)}_{\text{velocidade}} dt \quad (x=f(v)) \quad (12.29)$$

Para n=1:

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!} (x-a)^0 + \frac{f'(a)}{1!} (x-a)^1 + \frac{1}{1!} \int_a^x (x-t)^1 f''(t) dt$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t) \underbrace{f''(t)}_{\text{aceleração}} dt \quad (x = f(a)) \quad (12.30)$$

Conforme indicado nas séries 12.29 e 12.30 para n=0 e n=1, supondo:

$a=t_0$ e $x=t_1$, ou seja, os instantes inicial (*i-ésimo*) e final (*i+1-ésimo*)

$f(t)=s(t)$, $f'(t)=v(t)$ e $f''(t)=a(t)$

Inicialmente desenvolvendo a série para n=0:

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = s(t_1) - s(t_0)$$

1º) Supondo $v(t) = c^{te}$ em $t_0 \leq t \leq t_1$, ($v(t) = v_k$)

$$\int_{t_0}^{t_1} v_k dt = s(t_1) - s(t_0) \rightarrow v_k = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Verifica-se aqui que $|v(t_0)| \leq |v_k| \leq |v(t_1)|$, onde $v(t_0)$ é a condição inicial. Assim podem ser feitas duas considerações simples a respeito de v_k

A) $v_k = v(t_1)$

$$v(t_1) = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} \quad (12.31)$$

$$B) v_k = \frac{v(t_1) + v(t_0)}{2}$$

$$\frac{v(t_1) + v(t_0)}{2} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

$$v(t_1) = 2 \cdot \frac{(s(t_1) - s(t_0))}{t_1 - t_0} - v(t_0) \quad (12.32)$$

2º) Supondo $v(t) = a \cdot t + b$, em $t_0 \leq t \leq t_1$

$$\int_{t_0}^{t_1} (a \cdot t + b) dt = s(t_1) - s(t_0) \quad \text{onde} \quad \begin{array}{l} t = t_0 \rightarrow v(t_0) = a t_0 + b \\ t = t_1 \rightarrow v(t_1) = a t_1 + b \end{array}$$

$$a = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} \quad \text{e} \quad b = \frac{v(t_0) \cdot t_1 - v(t_1) \cdot t_0}{t_1 - t_0}$$

Aplicando a e b na equação $v(t) = a \cdot t + b$, obtém-se o mesmo resultado para a aproximação linear em torno de $v_k = c^{te}$.

$$v(t_1) = \frac{2 \cdot (s(t_1) - s(t_0))}{t_1 - t_0} - v(t_0) \quad (12.33)$$

Não é possível obter uma aproximação de 2º grau para $v(t)$ conhecendo-se somente t_0 e t_1 , pois não existem condições iniciais suficientes.

Agora desenvolvendo a série para $n=1$:

$$s(t_1) - s(t_0) - v(t_0) \cdot (t_1 - t_0) = \int_a^x a(t) \cdot (t_1 - t) dt$$

1º) Supondo $a(t) = c^{te}$ em $t_0 \leq t \leq t_1$, ($v(t) = a_k$)

$$\int_{t_0}^{t_1} a_k(x-t) dt = a_k \cdot \left(t_1 \cdot t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$= a_k \cdot \left(t_1(t_1 - t_0) - \frac{(t_1^2 - t_0^2)}{2} \right) \rightarrow s(t_1) - s(t_0) - v(t_0) \cdot (t_1 - t_0) = a_k \frac{(t_1 - t_0)^2}{2}$$

A) $a_k = a(t_1)$

$$a(t_1) = \frac{2}{(t_1 - t_0)^2} (s(t_1) - s(t_0) - v(t_0) \cdot (t_1 - t_0)) \quad (12.34)$$

B) $a_k = \frac{(a(t_1) + a(t_0))}{2}$

$$a(t_1) = \frac{4}{(t_1 - t_0)^2} (s(t_1) - s(t_0) - v(t_0) \cdot (t_1 - t_0)) - a(t_0) \quad (12.35)$$

2º) Supondo $a(t) = a \cdot t + b$, em $t_0 \leq t \leq t_1$

$$\int_{t_0}^{t_1} (a \cdot t + b)(t_1 - t) dt = \left(\frac{-at^3}{3} + (a \cdot t_1 - b) \frac{t^2}{2} + b \cdot t_1 t \right) \Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$s(t_1) - s(t_0) - v(t_0) \cdot (t_1 - t_0) = \frac{-a}{3} (t_1^3 - t_0^3) + \frac{(at_1 - b)}{2} (t_1^2 - t_0^2) + b t_1 (t_1 - t_0)$$

De acordo como foi desenvolvido para a velocidade:

$$t = t_0 \rightarrow a(t_0) = at_0 + b, \text{ logo: } a = \frac{a(t_1) - a(t_0)}{t_1 - t_0} \text{ e } b = \frac{a(t_0) \cdot t_1 - a(t_1) \cdot t_0}{t_1 - t_0}$$

$$t = t_1 \rightarrow a(t_1) = at_1 + b$$

Aplicando na equação acima e desenvolvendo o resultado analítico, obtem-se:

$$a(t_1) = \frac{6}{(t_1 - t_0)^2} (s(t_1) - s(t_0) - v(t_0) \cdot (t_1 - t_0)) - 2 \cdot a(t_0) \quad (12.36)$$

As equações (VII) e (X) (aproximações lineares de $v(t)$ e $a(t)$) podem ser modificadas para obtenção de $v(t_1)$ e $s(t_1)$ a partir de $a(t_1)$ e condições iniciais:

$$v(t_1) = \frac{(a(t_1) + a(t_0))}{2} (t_1 - t_0) + v(t_0) \quad (12.37)$$

$$s(t_1) = s(t_0) + v(t_0) \cdot (t_1 - t_0) + (a(t_1) + 2 \cdot a(t_0)) \frac{(t_1 - t_0)^2}{6} \quad (12.38)$$

12.6 APÊNDICE 6: ESPAÇOS DE TRABALHO PARA MANIPULADORES COM CABOS DE MASSA NULA

Neste Apêndice são apresentados os espaços de trabalho gerados para os casos discutidos na Seção 7.4.1. Aqui são apresentados os Espaços de Trabalho Lineares para os cabos 1, 2, 3 e 4, com $CS=12$, conforme citados na TAB. 7.3

O passo entre os pontos de varredura é de 25 metros.

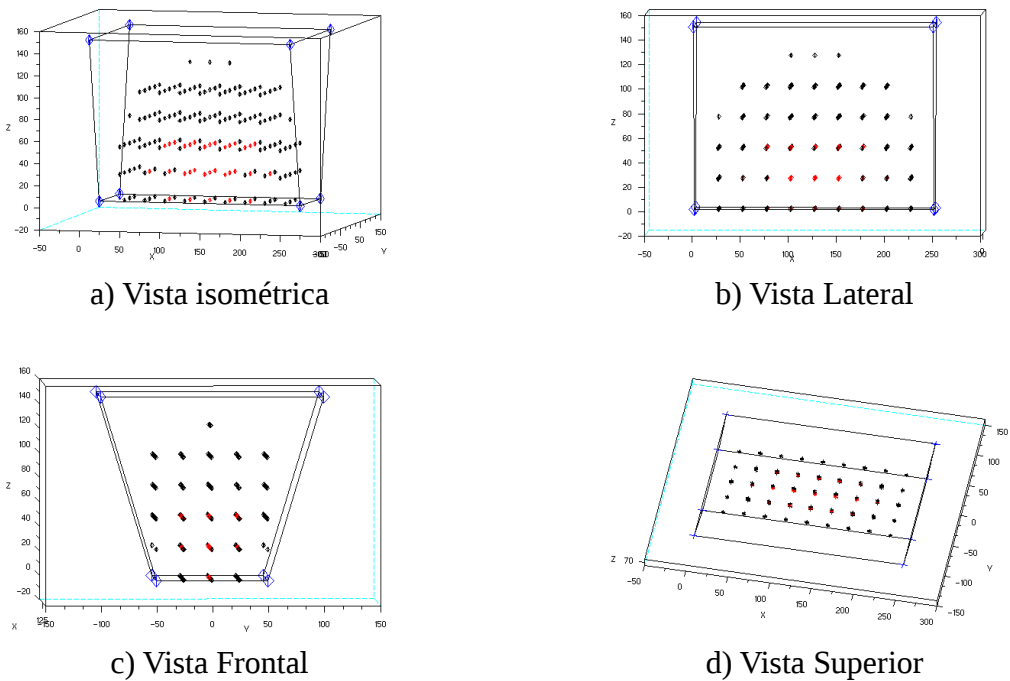
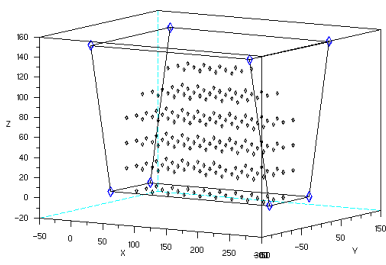
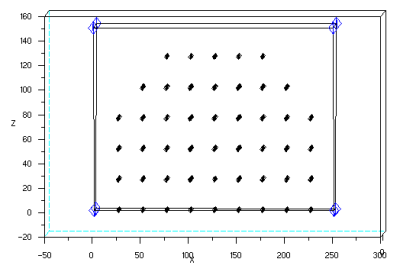


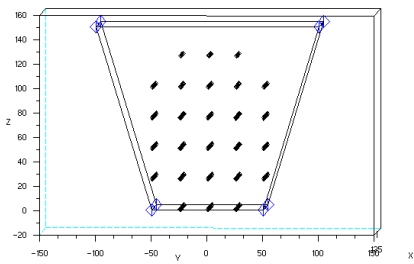
FIG. 12.9 – Espaço de trabalho linear para o Cabo C1, com $CS=12$



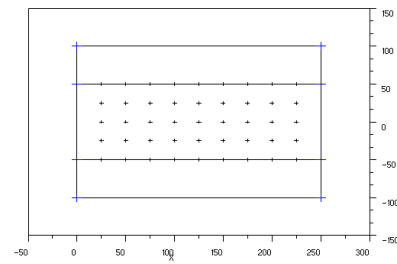
a) Vista Isométrica



b) Vista Lateral

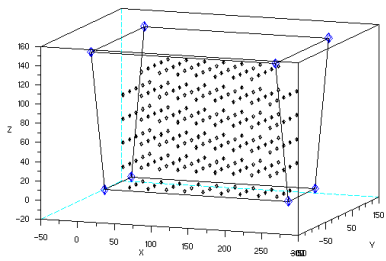


c) vista Frontal

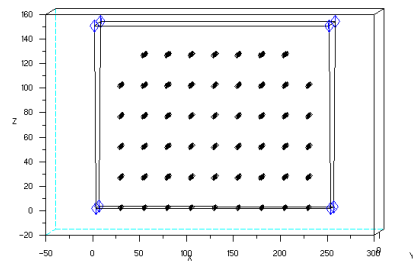


d) Vista Superior

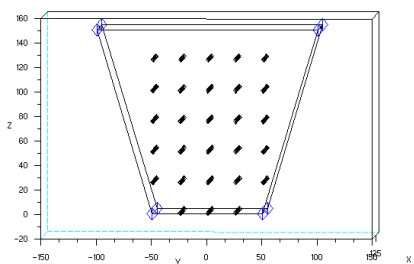
FIG. 12.10 – Espaço de trabalho linear para o Cabo C2, com CS=12



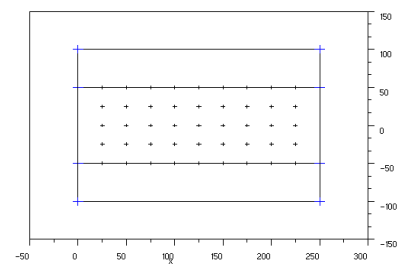
a) Vista Isométrica



b) Vista Lateral

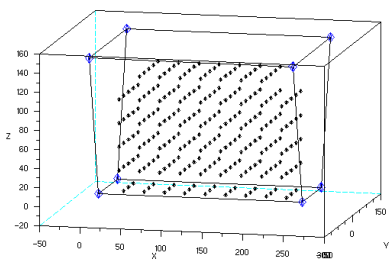


c) Vista Frontal

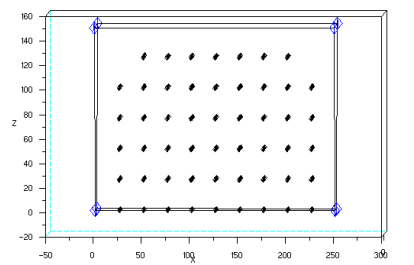


d) Vista Superior

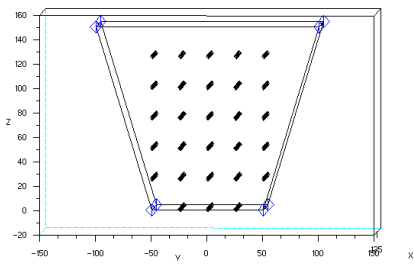
FIG. 12.11 – Espaço de trabalho linear para o Cabo C3, com CS=12



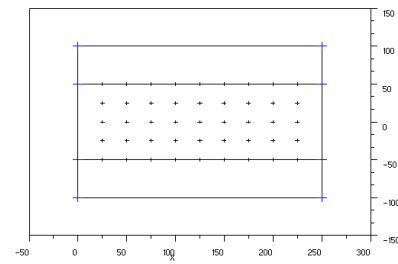
a) Vista isométrica



b) Vista Lateral



c) Vista Frontal



d) Vista Superior

FIG. 12.12 – Espaço de trabalho linear para o Cabo C4, com CS=12

12.7 APÊNDICE 7: TRAJETÓRIAS PROPOSTAS E ESPAÇO DE TRABALHO A ESPERADO

O espaço de trabalho A é apresentado de forma esquemática, baseado no resultado esperado para o espaço de trabalho linear e não-linear.

Na FIG. 12.13 são apresentadas as vistas do espaço A.

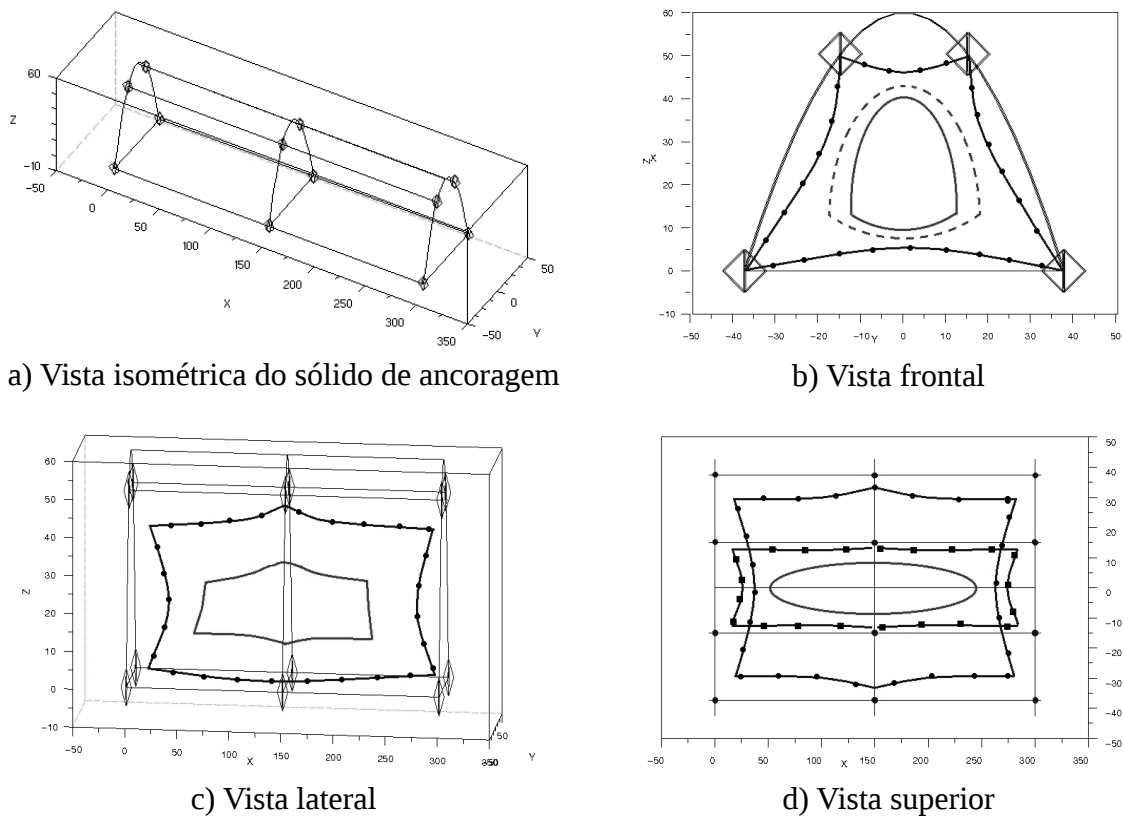


FIG. 12.13 – Vistas do Espaço de Trabalho A esperado

A FIG. 12.13 a) apresenta a vista isométrica do sólido de ancoragem. Na vista frontal do espaço de trabalho, a região tracejada representa o provável espaço de trabalho controlável na seção transversal central ao hangar e as linhas contínuas os limites do espaço de trabalho com solução homogênea. Nas FIG. 12.13 c) a linha contínua com pontos indica o espaço de trabalho com solução homogênea e a linha interna o espaço de trabalho controlável. Em d) as linhas contínuas com pontos e quadrados indicam os limites do espaço de trabalho inferior e

superior para solução homogênea e a elipse a vista superior do espaço de trabalho controlável.

Para o Espaço de Trabalho A, interior ao Hangar, são propostas as seguintes trajetórias:

1) *Vôo pairado*: O movimento se inicia e termina com velocidade nula, mantendo aceleração constante de $2,5m/s^2$ em intervalos de tempo no início ($t_a=0$ a $4s$) e término ($t_b=16$ a $20s$) da trajetória, segundo uma reta horizontal contida no plano Oxz , longitudinal ao hangar, com posição inicial em $C_0=[60 \ 0 \ 20]$. Considera-se velocidade de cruzeiro da plataforma como $v_x=10m/s$. Todo o percurso leva 20seg.

As Equações cinemáticas da trajetória são apresentadas a seguir.

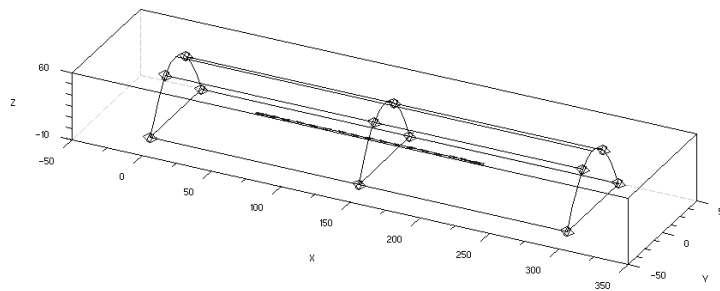
$$\mathbf{r} = [x(t) \ 0 \ 20]^T$$

Onde:

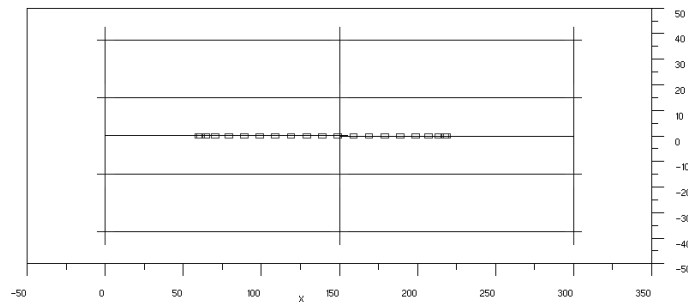
$$x(t) = \begin{cases} v_x/2 \cdot t^2, & \text{se } t < t_a \\ v_x \cdot t_a/2 + v_x \cdot (t - t_a), & \text{se } t < t_b \\ v_x \cdot t_a/2 + v_x \cdot (t_b - t_a) + v_x \cdot (t - t_b) - v_x/2 \cdot (t - t_b)^2, & \text{se } t > t_b \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = [v_x/t_a \cdot t \quad v_x \quad v_x - v_x/t_a \cdot (t - t_b)]^T$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = [v_x/t_a \quad 0 \quad -v_x/t_a]^T$$



a) Vista isométrica



b) Vista Superior

FIG. 12.14 – Trajetória da plataforma – vôo pairado

2) *Decolagem parabólica*: Partindo da posição inicial $C_0=[40 \ 0 \ 5]$, a plataforma se movimenta com velocidade horizontal constante $v_x=12m/s$ e descreve uma parábola ascendente segundo a equação $z(x)=0,0002914x^2+0,0099068x+4,9300699$ no plano $0xz$. O percurso dura 20 segundos. Visando reproduzir a decolagem de uma aeronave, a plataforma inicia seu movimento com um ângulo de rotação em $0y$ nulo, se inclina para frente até determinado ponto e diminui este ângulo a medida que percorre o hangar. As equações cinemáticas deste caso são:

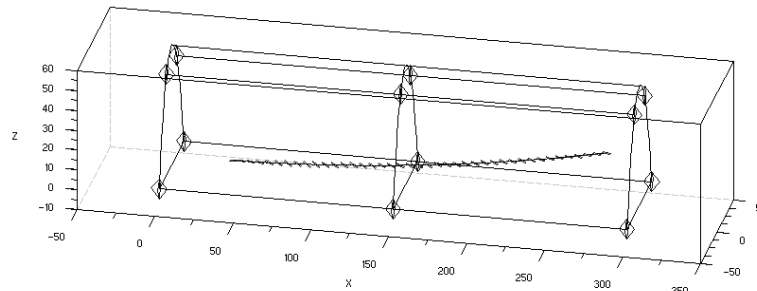
$$\mathbf{r} = [C_{0,1} + v_x \cdot t \quad 0 \quad z(t) \quad 0 \quad \theta(t) \quad 0]^T$$

Onde:

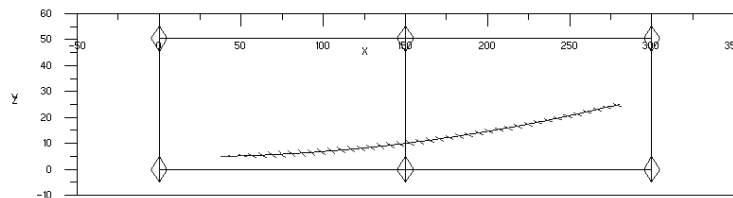
$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \cdot t/t_a, & \text{se } t < t_a \\ -\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{18}\right) \cdot t/(t_f - t_a) + \left(\frac{\pi}{6} \cdot t_f - \frac{\pi}{18} \cdot t_a\right)/(t_f - t_a), & \text{se } t < t_b \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} v_x & 0 & \dot{z}(t) & 0 & \dot{\theta}(t) & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{z}(t) & 0 & \ddot{\theta}(t) & 0 \end{bmatrix}^T$$



a) Vista isométrica



b) Vista Lateral

FIG. 12.15 – Trajetória da plataforma – Decolagem parabólica

3) *Trajétória senoidal no plano vertical*: Aqui a plataforma percorre um seno, novamente contido no plano $0xz$, com nível médio constante em 15 metros de altura, e a inclinação da plataforma tende a seguir a superfície da curva, variando ao longo da trajetória em torno do eixo $0y'$. O percurso dura 10 segundos partindo da posição $\mathbf{C}_0 = [50 \ 0 \ 15]$. A inclinação da

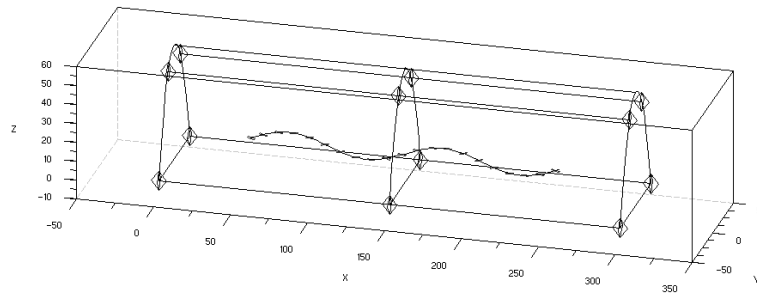
plataforma segue a função $\theta(t) = \frac{\pi}{18} \cdot \cos\left(\frac{4\pi t}{t_f}\right)$.

As equações cinemáticas são:

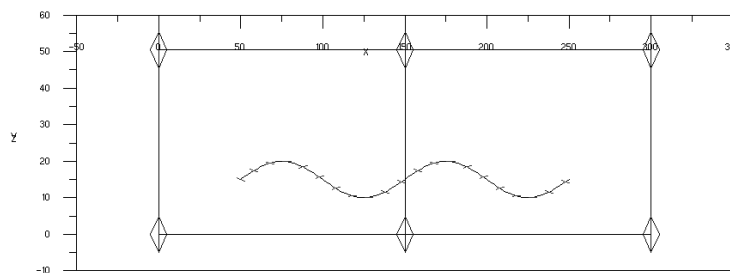
$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} C_{0,1} + v_x \cdot t & 0 & C_{0,3} + 5 \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi t}{t_f}\right) & 0 & \theta(t) & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} v_x & 0 & 20\pi/t_f \cdot \text{sen}\left(\frac{4\pi t}{t_f}\right) & 0 & \dot{\theta}(t) & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 80(\pi/t_f)^2 \cdot \text{sen}\left(\frac{4\pi t}{t_f}\right) & 0 & \ddot{\theta}(t) & 0 \end{bmatrix}^T$$



a) Vista isométrica



b) Vista lateral

FIG. 12.16 – Trajetória da plataforma – Trajetória senoidal no plano Oxz

Para o Espaço de Trabalho B, dito em um vale com encostas regulares, são consideradas trajetórias que exploram o movimento vertical da plataforma, enquanto que no caso anterior o deslocamento longitudinal foi privilegiado. Estas características do Espaço de Trabalho em função de sua geometria devem ser levadas em consideração no projeto. Em todos os casos são apresentadas as posições da plataforma ao longo do percurso e as curvas de força geradas nos cabos nos pontos de fixação e ancoragem, e comparadas com a solução para cabos de massa nula.

13 ANEXO

13.1 ANEXO 1: CARACTERÍSTICAS BÁSICAS DE CABOS DE AÇO

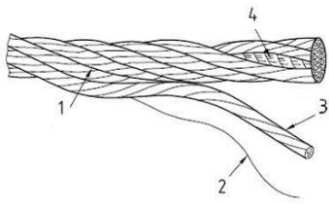
Nesta seção são apresentadas as informações básicas sobre fabricação e utilização de cabos de aço.

Como “*Construção*” definem-se:

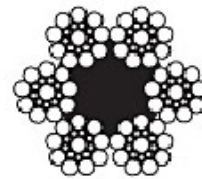
- a) Número de pernas e arames do cabo;
- b) Tipo de Alma: em geral de fibra ou aço;
- c) Torção;
- d) Lubrificação;
- e) Pré-formação;
- f) Acabamento;
- g) Resistência dos arames a tração; e,
- h) Carga de trabalho e fatores de segurança.

Estes fatores especificam um cabo de aço, normalmente sendo exigidos em um pedido pelo fabricante. Cada característica de construção citada acima será descrita agora.

Um cabo de aço (rope) é composto por pernas (strands) e estas por arames (wires). O enrolamento dos arames compõe uma perna e o enrolamento das pernas em torno da alma do cabo formam o cabo de aço. A alma do cabo pode ser de material plástico ou simplesmente por outra perna ou cabo de aço. A FIG. 13.1 apresenta um esquema de cabo de aço.



a) 1. cabo; 2. arame; 3. perna; 4. alma



b) seção transversal do cabo 6x19S+AF – 6 pernas; 19 arames por pernas e alma de fibra

FIG. 13.1 – Esquema de cabo de aço e seus elementos (VERRET ,1997)

Cabos comuns apresentam as seguintes propriedades quanto a característica de construção das pernas externas em relação a sua aplicação:

- a) 6x7 possuem baixa flexibilidade e alta resistência a abrasão, e devido a rigidez recomenda-se cautela na especificação do tambor;
- b) 6x19 e 6x25 são cabos de uso geral;
- c) 6x36 e 6x41 são cabos mais flexíveis, contudo possuem baixa resistência a abrasão, sendo recomendados para sistemas com tambores e polias; e,
- d) 8x19 são específicos para elevadores de passageiros.

A alma do cabo consiste do núcleo onde as pernas externas são enroladas. Basicamente são: de Fibra, sendo mais flexível e menos resistente a esforços e calor, normalmente não podendo ultrapassar 80°C; e de aço, que são um cabo de aço central envolto por pernas externas. A *CASAR SPECIAL ROPES*[®] fornece cabos resistentes a rotação, problema comum em cabos de aço, onde o sentido de enrolamento da alma de aço é oposto ao sentido de enrolamento do cabo (entende-se por enrolamento do cabo o sentido de enrolamento das pernas externas). A FIG. 13.2 c) apresenta a seção transversal de um cabo de aço especial resistente a rotação.

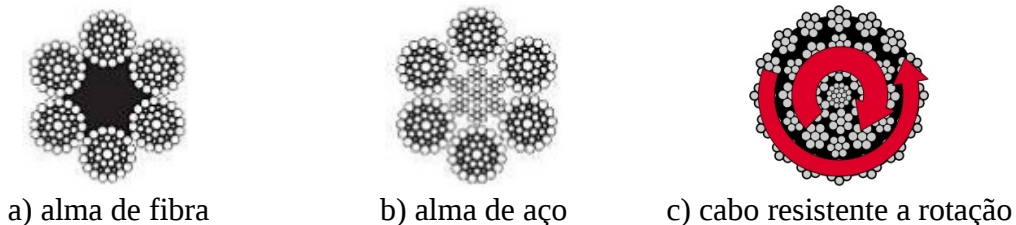


FIG. 13.2 – Seção transversal de cabos de aço (VERRET ,1997)

Torção é a configuração dos cabos quanto ao enrolamento dos arames e pernas. Existem quatro configurações de torção diferentes, podendo ser: regular ou lang; e a esquerda ou a direita. No Brasil também utilizam-se como indicativos SS, SZ, ZS e ZZ, de acordo como desenho formado per pernas e arames. Em inglês classificam-se como “*ordinary lay*” quando os arames externos são longitudinais e “*lang lay*” quando formam ângulo com o eixo do cabo. A FIG. 13.3 apresenta os tipos de torção.



FIG. 13.3 - Tipos de torção (VERRET ,1997)

Quanto a lubrificação, deve-se informar sob que condições o cabo será utilizado: se em ambientes salinos, sujeitos a intempéries ou condições climáticas severas, poeira, e qual a temperatura de operação.

A pré-formação ou pré-esticamento do cabo é o processo de tração do cabo próximo ao limite de ruptura para acelerar a acomodação das pernas e arames em torno da alma, diminuindo sua deformação estrutural ao longo do período de vida útil. Dependendo do uso, este fator se torna mais ou menos relevante. Aqui, como a posição da plataforma é controlada pelo ângulo de enrolamento do tambor, o esticamento do cabo compromete o sistema de controle. De acordo com a Apostila Técnica CIMAF, após a acomodação por uso o cabo sofre aumento de seu comprimento de 0,50% a 0,75% e do módulo de elasticidade em 20%. Devido a estas características recomenda-se que a plataforma seja instrumentada a fim de fornecer sua posição ao sistema de controle.

O acabamento do cabo, embora esteja mais voltado para o ambiente de uso, também esta relacionado a resistência superficial do cabo durante o enrolamento, onde ocorre atrito e acomodação do material. Dependendo do número de arames e geometria das polias e tambores estas características se tornam mais severas, causando desgaste precoce do material. (VERRET, 1997) apresenta um gráfico que relaciona o número de ciclos com a razão entre o diâmetro nominal do cabo e diâmetro da polia, e ainda orienta sobre o sentido de enrolamento do cabo em tambores.

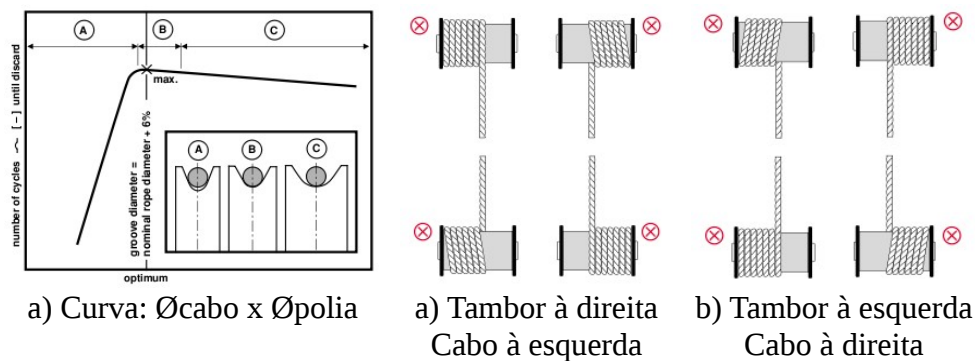


FIG. 13.4 – Recomendações de enrolamento no tambor segundo diâmetro da polia e sentido de torção do cabo (VERRET, 1997)

Verifica-se pela FIG. 13.4 a) que há um ponto de ótimo na razão \varnothing cabo x \varnothing polia. Outra característica quanto ao acabamento do cabo é a conformação mecânica da superfície externa. Segundo (VERRET, 1997) cabos com pernas compactadas apresentam menor atrito e conseqüentemente menor abrasão entre as pernas, diminuição do ruído durante o enrolamento no tambor e apresentam características de pré-esticamento devido a conformação do material. A FIG. 13.5 compara as pernas convencional e compactada.

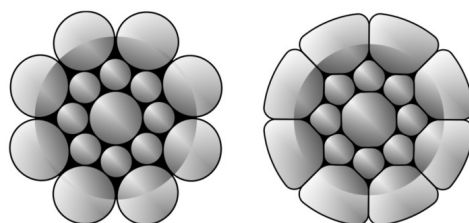


FIG. 13.5 – Comparação entre pernas convencional e compactada (VERRET, 1997)


A resistência mecânica dos arames, cargas de trabalho e fatores de segurança, são os parâmetros que definem o cabo que será utilizado. A CIMAF CABOS S.A. fabrica cabos com arames com resistência a tração nominal de 160 a 220 Kgf/mm² segundo a denominação de aço utilizado (I.P.S., E.I.P.S. e E.E.I.P.S.) e apresenta uma tabela com os coeficientes de segurança para as principais aplicações industriais. A TAB. 13.1 apresenta os coeficientes de segurança por aplicação.

TAB. 13.1 – Coeficientes de segurança aplicados a cabos de aço


Aplicação	Coeficiente de Segurança
Cabos e cordoalhas estáticas	3 a 4
Cabo para tração na horizontal	4 a 5
Guinchos, guindastes e escavadeiras	5
Pontes rolantes	6 a 8
Talhas elétricas e outras	7
Guindastes estacionários	6 a 8
Laços	5 a 6
Elevadores de obras	8 a 10
Elevadores de passageiros	12

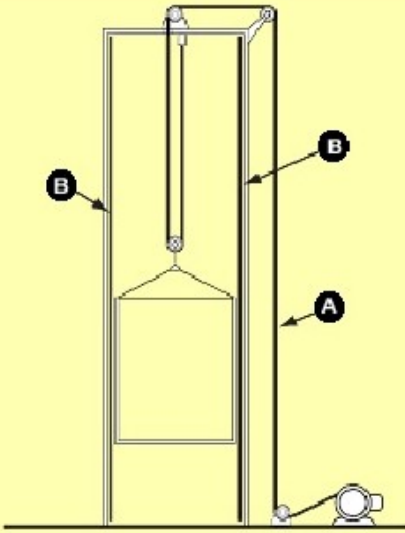
http://www.cimafbrasil.com.br/produtos_aplic.php

13.2 ANEXO 2: ESPECIFICAÇÃO DE CABO POR APLICAÇÃO



Construção Civil

Elevador de Obra 



A Cabo de elevação
6X25F + AACI - Torção TRD, Acabamento Polido

B Cabo de segurança
6X25F + AACI - Torção TRD, Acabamento Polido

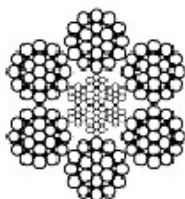
(http://www.cimafbrasil.com.br/produtos_aplic.php)

13.3 ANEXO 3: TABELA DE ESPECIFICAÇÃO DO CABO CIMAF 6X25F+AACI



Construção do Cabo por Aplicação

6X25F + AACI



Diâmetro		Massa Aprox. kg/m	Carga de Ruptura mínima em tf
mm	pol		EIP
9,50	3/8"	0,351	6,85
11,50	7/16"	0,519	9,25
13,00	1/2"	0,685	12,00
14,50	9/16"	0,867	15,20
16,00	5/8"	1,057	18,70
19,00	3/4"	1,496	26,70
22,00	7/8"	2,036	36,10
26,00	1"	2,746	46,90
29,00	1 1/8"	3,447	59,00
32,00	1 1/4"	4,192	72,50
35,00	1 3/8"	4,976	87,10
38,00	1 1/2"	6,008	103,00
42,00	1 5/8"	7,120	120,00
52,00	2"	10,921	180,00

Torções: TRD Acabamentos: Galvanizado ou Polido

- Outros diâmetros poderão ser fabricados sob consulta
- Para cabos com carga de ruptura mínima superior às apresentadas na tabela acima, consulte nosso departamento técnico

Fatores de conversão:

1 kN = 1tf x 9,806 (e.g.: 16,30 tf x 9,806 = 159,84 kN)

1 libra (x1000) = 1tf x 2,20 (e.g.: 16,30 tf x 2,20 = 35,86 libras (x1000))

1 libra (x1000) = 1 kN x 0,225 (e.g.: 159,84 kN x 0,225 = 35,96 libras (x1000))

(http://www.cimafbrasil.com.br/produtos_aplic.php)

13.4 ANEXO 4: FICHA TÉCNICA DO EC-120 COLIBRI DA HELIBRÁS

Ficha Técnica	
Capacidade	
1 piloto + 4 passageiros	
Pesos	
Peso máximo de decolagem:	1.715 kg
Peso máx. de decolagem com carga externa: ...	1.800 kg
Peso vazio :	965 kg
Monitorização	
1 turbina TURBOMECA ARRIUS 2F	
Potência máxima de decolagem:	504 shp
Desempenho (peso máx. de decolagem-ISA,SL)	
Velocidade máxima (VNE) :	278 km/h
Velocidade de cruzeiro rápido:	223 km/h
Razão de subida :	5,84 m/s
Teto de serviço :	5.182 m
Autonomia com tanque standard :	4,32 h
Alcance com tanque standard:	710 km
Dimensões	
Comprimento (com rotor girando):	11,52 m
Comprimento da fuselagem (com rotor traseiro):	9,60 m
Altura:	3,40 m
Diâmetro do rotor principal:	10 m

(http://www.helibras.com.br/produtos_det.php?id=1)

13.5 ANEXO 5: DEFINIÇÕES DAS MATRIZES DE MASSA E GENERALIZADA DE CORIOLIS APRESENTADA POR (FANG, 2005)

DEFINIÇÃO:

1) Matriz de massa

$$\mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} m_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x C^2 \varphi + I_y S^2 \varphi & (I_x - I_y) C \psi C \varphi S \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (I_x - I_y) C \psi C \varphi S \varphi & C^2 \psi (I_x S^2 \varphi + I_y C^2 \varphi) + I_z S^2 \psi & -I_z S^2 \psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_z S^2 \psi & I_z \end{bmatrix}$$

2) Vetor de forças e torques generalizados de coriolis e centrífugo

$$\mathbf{g}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} & g_{45} & g_{46} \\ 0 & 0 & 0 & g_{54} & g_{55} & g_{56} \\ 0 & 0 & 0 & g_{64} & g_{65} & g_{66} \end{bmatrix}$$

onde:

$$g_{44} = -\left(\frac{1}{2}\right)(I_x - I_y)S(2\varphi)\dot{\varphi}$$

$$g_{45} = \left(\frac{1}{2}\right)(I_x + I_y - 2I_z)C\psi S\psi\dot{\theta} + \left(\frac{1}{4}\right)(I_x - I_y)C\psi[S(\psi - 2\varphi) - S(\psi + 2\varphi)]\dot{\theta} \\ + \left(\frac{1}{2}\right)I_z C\psi\dot{\varphi} + \left(\frac{1}{2}\right)(I_x - I_y)C\psi C(2\varphi)\dot{\varphi}$$

$$g_{46} = \left(\frac{1}{2}\right)(I_y - I_x)S(2\varphi)\dot{\psi} + \left(\frac{1}{2}\right)I_z C\psi\dot{\theta} + \left(\frac{1}{2}\right)(I_x - I_y)C\psi C(2\varphi)\dot{\theta}$$

$$g_{54} = \left(\frac{1}{2}\right)(I_y - I_x)S\psi S(2\varphi)\dot{\psi} + \left(\frac{1}{4}\right)[2I_z - I_x - I_y + (I_x - I_y)C(2\varphi)]S(2\psi)\dot{\theta} \\ - \left(\frac{1}{2}\right)I_z C\psi\dot{\varphi} + \left(\frac{1}{2}\right)(I_x - I_y)C\psi C^2\varphi\dot{\varphi} - \left(\frac{1}{2}\right)(I_x - I_y)C\psi S^2\varphi\dot{\varphi}$$

$$g_{56} = -\left(\frac{1}{2}\right)I_z C\psi\dot{\psi} + \left(\frac{1}{2}\right)(I_x - I_y)C\psi C(2\varphi)\dot{\psi} + \left(\frac{1}{2}\right)(I_x - I_y)C\psi C(2\varphi)\dot{\theta}$$

$$g_{64} = -\left(\frac{1}{2}\right)I_z C\psi\dot{\theta} + \left(\frac{1}{2}\right)(I_x - I_y)S(2\varphi)\dot{\psi} - \left(\frac{1}{2}\right)(I_x - I_y)C\psi C(2\varphi)\dot{\theta}$$

$$g_{65} = -\left(\frac{1}{2}\right)I_z C\psi\dot{\psi} - \left(\frac{1}{2}\right)(I_x - I_y)C\psi C(2\varphi)\dot{\psi} - \left(\frac{1}{2}\right)(I_x - I_y)C^2\psi S(2\varphi)\dot{\theta}$$

$$g_{66} = 0$$

3) Vetor generalizado de forças aplicadas

$$\mathbf{g}_E = [0 \quad 0 \quad -m_p g \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$