

**MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
CURSO DE MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

KLEDSON FLÁVIO SILVEIRA SANTIAGO

**ANÁLISE DA RESOLUÇÃO ESPACIAL DE TERMOS DIFUSIVOS
UTILIZANDO ORDEM DE ERRO E ESTABILIDADE
NUMÉRICA**

**Rio de Janeiro
2012**

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

KLEDSON FLÁVIO SILVEIRA SANTIAGO

**ANÁLISE DA RESOLUÇÃO ESPACIAL DE TERMOS DIFUSIVOS
UTILIZANDO ORDEM DE ERRO E ESTABILIDADE NUMÉRICA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Leonardo S. de B. Alves, Ph.D.

Rio de Janeiro
2012

c2012

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
Praça General Tibúrcio, 80-Praia Vermelha
Rio de Janeiro-RJ CEP 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmear ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do autor e do orientador.

620.1 Santiago, Kledson Flávio Silveira
5235a Análise da Resolução Espacial de Termos Difusivos Utilizando Ordem de Erro e Estabilidade Numérica/Kledson Flávio Silveira Santiago; orientado por Leonardo Santos de Brito Alves. Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2012.

198p.: il.

Dissertação (mestrado) Instituto Militar de Engenharia.
Rio de Janeiro, 2012.

1. Engenharia Mecânica. 2. Ordem de Erro
3. Estabilidade Numérica. 4. Resolução Espacial.
I. Alves, Leonardo Santos de Brito. II. Instituto Militar de Engenharia.

CDD 620.1

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

KLEDSON FLÁVIO SILVEIRA SANTIAGO

**ANÁLISE DA RESOLUÇÃO ESPACIAL DE TERMOS DIFUSIVOS
UTILIZANDO ORDEM DE ERRO E ESTABILIDADE NUMÉRICA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Leonardo S. de B. Alves, Ph.D.

Aprovada em 19 de setembro de 2012 pela seguinte Banca Examinadora:

Prof. Leonardo S. de B. Alves, Ph.D. da UFF - Presidente

Prof. Rodrigo Otávio de Castro Guedes, Ph.D. do IME

Prof. Leandro Alcoforado Sphaier, Ph.D. da UFF

Rio de Janeiro
2012

Aos meus pais Tiago e Zilda, aos meus irmãos Fábio e Pricila, e à minha namorada Thayza.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a meu Deus que esteve ao meu lado não só nesse mestrado, mas em toda minha vida. Minha família por sempre estar comigo e acreditar em mim. A minha namorada Thayza que esteve ao meu lado dando-me todo apoio e companheirismo que precisei. Ao meu orientador professor Leonardo por sua ajuda e atenção. Aos meus amigos de laboratório Gabriel, Oberdan, Ricardo, Vanessa, e em especial Renan e Eduardo, que passaram um pouco de sua experiência pra poder ajudar. E ao Instituto Militar de Engenharia pela oportunidade de realização do curso de Mestrado em Engenharia Mecânica.

"Juntamente com a Assembléia de Westminster e todos que a precederam eu creio que o fim principal do homem é glorificar a Deus e apreciá-lo para sempre."

JAMES CLERK MAXWELL

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	9
LISTA DE TABELAS	23
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS	25
1 INTRODUÇÃO	28
1.1 Revisão Bibliográfica	28
1.2 Objetivo	31
2 MODELAGEM MATEMÁTICA	33
2.1 Equações de Governo	33
2.1.1 Equações de Navier-Stokes Compressível	33
2.1.2 Equação do Calor	33
2.1.3 Modelagem do Termo Difusivo	34
2.2 Resolução Temporal	34
2.3 Análises de Erro	35
2.3.1 Ordem Teórica	36
2.3.2 Ordem Real	38
2.4 Método da Solução Manufaturada	39
2.5 Número de Onda Modificado	41
3 RESOLUÇÃO ESPACIAL	43
3.1 Método de Diferenças Finitas	43
3.1.1 Formulações de Segunda Ordem	43
3.1.1.1 Formulação Não-Conservativa	43
3.1.1.2 Formulação Conservativa	44
3.1.2 Formulações de Quarta Ordem	45
3.1.2.1 Formulação Não-Conservativa	45
3.1.2.2 Formulação Conservativa	46
3.2 Método dos Volumes Finitos	46
3.2.1 Formulações de Segunda Ordem	46
3.2.1.1 Formulação Conservativa de Volumes Finitos Tradicional	46
3.2.1.2 Formulação Conservativa de Volumes Finitos SA	47

3.2.2	Formulações de Quarta Ordem	50
3.2.2.1	Formulação Conservativa de Volumes Finitos de Zingg & Pulliam	50
3.2.2.2	Formulação Conservativa de Volumes Finitos SA	50
4	RESULTADOS	62
4.1	Ordem de Erro	62
4.1.1	Formulações de Segunda Ordem.....	62
4.1.2	Formulações de Quarta Ordem	70
4.2	Erro e Estabilidade Numérica	78
4.3	Análise Espectral	84
5	CONCLUSÃO	86
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	87
7	APÊNDICES	89
7.1	APÊNDICE 1: Formulação Não-Conservativa de Diferenças Finitas - 2ª ordem.....	90
7.2	APÊNDICE 2: Formulação Conservativa de Diferenças Finitas - 2ª ordem	99
7.3	APÊNDICE 3: Formulação de Volumes Finitos Tradicional - 2ª ordem	108
7.4	APÊNDICE 4: Formulação Conservativa de Volumes Finitos SA 2(0)	116
7.5	APÊNDICE 5: Formulação Conservativa de Volumes Finitos SA 2(1)	124
7.6	APÊNDICE 6: Formulação Conservativa de Volumes Finitos SA 2(2)	132
7.7	APÊNDICE 7: Formulação Não-Conservativa de Diferenças Finitas - 4ª ordem.....	140
7.8	APÊNDICE 8: Formulação Conservativa de Diferenças Finitas - 4ª ordem	149
7.9	APÊNDICE 9: Formulação de Volumes Finitos de Zingg & Pullian	158
7.10	APÊNDICE 10: Formulação Conservativa de Volumes Finitos SA 4(2)	166
7.11	APÊNDICE 11: Formulação Conservativa de Volumes Finitos SA 4(3)	174
7.12	APÊNDICE 12: Formulação Conservativa de Volumes Finitos SA 4(4)	182
7.13	APÊNDICE 13: Erro Numérico	190

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG.2.1	Conditividade Térmica para diferentes valores de θ	40
FIG.2.2	Temperatura para diferentes valores de θ	41
FIG.4.1	Ordem numérica com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas de Segunda Ordem.	64
FIG.4.2	Ordem numérica com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas de Segunda Ordem.	65
FIG.4.3	Ordem numérica com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.	66
FIG.4.4	Ordem numérica com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.	66
FIG.4.5	Ordem numérica com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação SA 2(0).	67
FIG.4.6	Ordem numérica com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação SA 2(0).	68
FIG.4.7	Ordem numérica com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação SA 2(1).	69
FIG.4.8	Ordem numérica com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação SA 2(1).	69
FIG.4.9	Ordem numérica com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação SA 2(2).	70
FIG.4.10	Ordem numérica com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação SA 2(2).	70
FIG.4.11	Ordem numérica com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas de Quarta Ordem.	73
FIG.4.12	Ordem numérica com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas de Quarta Ordem.	73
FIG.4.13	Ordem numérica com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação de Zingg & Pullian.	74
FIG.4.14	Ordem numérica com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação de Zingg & Pullian.	75
FIG.4.15	Ordem numérica com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação SA 4(2).	76

FIG.4.16	Ordem numérica com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação SA 4(2).	76
FIG.4.17	Ordem numérica com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação SA 4(3).	77
FIG.4.18	Ordem numérica com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação SA 4(3).	77
FIG.4.19	Ordem numérica com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação SA 4(4).	78
FIG.4.20	Ordem numérica com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação SA 4(4).	78
FIG.4.21	$\bar{K} \Delta x$ em função de $K \Delta x$, para segunda derivada	85
FIG.7.1	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa.	90
FIG.7.2	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa.	91
FIG.7.3	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa.	91
FIG.7.4	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa.	92
FIG.7.5	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa.	92
FIG.7.6	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa.	93
FIG.7.7	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa.	93
FIG.7.8	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa.	94
FIG.7.9	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa.	94
FIG.7.10	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa.	95
FIG.7.11	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa.	95
FIG.7.12	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	

	Formulação Não-Conservativa.	96
FIG.7.13	Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa.	96
FIG.7.14	Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa.	97
FIG.7.15	Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa.	97
FIG.7.16	Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa.	98
FIG.7.17	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.	99
FIG.7.18	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.	100
FIG.7.19	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.	100
FIG.7.20	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.	101
FIG.7.21	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.	101
FIG.7.22	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.	102
FIG.7.23	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.	102
FIG.7.24	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.	103
FIG.7.25	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.	103
FIG.7.26	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.	104
FIG.7.27	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.	104
FIG.7.28	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.	105
FIG.7.29	Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	

	Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.	105
FIG.7.30	Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.	106
FIG.7.31	Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.	106
FIG.7.32	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.	107
FIG.7.33	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.	108
FIG.7.34	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.	108
FIG.7.35	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.	109
FIG.7.36	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.	109
FIG.7.37	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.	110
FIG.7.38	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.	110
FIG.7.39	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.	111
FIG.7.40	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.	111
FIG.7.41	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.	112
FIG.7.42	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.	112
FIG.7.43	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.	113
FIG.7.44	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.	113
FIG.7.45	Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.	114
FIG.7.46	Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	

	Formulação Conservativa de Volumes Finitos.	114
FIG.7.47	Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.	115
FIG.7.48	Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.	115
FIG.7.49	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.	116
FIG.7.50	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.	116
FIG.7.51	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.	117
FIG.7.52	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.	117
FIG.7.53	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.	118
FIG.7.54	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.	118
FIG.7.55	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.	119
FIG.7.56	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.	119
FIG.7.57	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.	120
FIG.7.58	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.	120
FIG.7.59	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.	121
FIG.7.60	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.	121
FIG.7.61	Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.	122
FIG.7.62	Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.	122
FIG.7.63	Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	

	Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.	123
FIG.7.64	Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.	123
FIG.7.65	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	124
FIG.7.66	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	124
FIG.7.67	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	125
FIG.7.68	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	125
FIG.7.69	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	126
FIG.7.70	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	126
FIG.7.71	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	127
FIG.7.72	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	127
FIG.7.73	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	128
FIG.7.74	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	128
FIG.7.75	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	129
FIG.7.76	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	129
FIG.7.77	Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	130
FIG.7.78	Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	130
FIG.7.79	Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	131
FIG.7.80	Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	

	Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	131
FIG.7.81	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	132
FIG.7.82	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	132
FIG.7.83	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	133
FIG.7.84	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	133
FIG.7.85	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	134
FIG.7.86	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	134
FIG.7.87	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	135
FIG.7.88	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	135
FIG.7.89	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	136
FIG.7.90	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	136
FIG.7.91	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	137
FIG.7.92	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	137
FIG.7.93	Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	138
FIG.7.94	Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	138
FIG.7.95	Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	139
FIG.7.96	Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.	139

FIG.7.97	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.	140
FIG.7.98	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.	141
FIG.7.99	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.	141
FIG.7.100	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.	142
FIG.7.101	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.	142
FIG.7.102	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.	143
FIG.7.103	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.	143
FIG.7.104	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.	144
FIG.7.105	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.	144
FIG.7.106	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.	145
FIG.7.107	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.	145
FIG.7.108	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.	146
FIG.7.109	Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.	146
FIG.7.110	Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.	147
FIG.7.111	Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.	147
FIG.7.112	Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.	148
FIG.7.113	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.	149

FIG.7.114	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.	150
FIG.7.115	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.	150
FIG.7.116	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.	151
FIG.7.117	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.	151
FIG.7.118	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.	152
FIG.7.119	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.	152
FIG.7.120	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.	153
FIG.7.121	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.	153
FIG.7.122	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.	154
FIG.7.123	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.	154
FIG.7.124	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.	155
FIG.7.125	Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.	155
FIG.7.126	Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.	156
FIG.7.127	Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.	156
FIG.7.128	Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.	157
FIG.7.129	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação de Zingg & Pullian.	158
FIG.7.130	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação de Zingg & Pullian.	158

FIG.7.131	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação de Zingg & Pullian.	159
FIG.7.132	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação de Zingg & Pullian.	159
FIG.7.133	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação de Zingg & Pullian.	160
FIG.7.134	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação de Zingg & Pullian.	160
FIG.7.135	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação de Zingg & Pullian.	161
FIG.7.136	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação de Zingg & Pullian.	161
FIG.7.137	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação de Zingg & Pullian.	162
FIG.7.138	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação de Zingg & Pullian.	162
FIG.7.139	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação de Zingg & Pullian.	163
FIG.7.140	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação de Zingg & Pullian.	163
FIG.7.141	Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação de Zingg & Pullian.	164
FIG.7.142	Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação de Zingg & Pullian.	164
FIG.7.143	Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação de Zingg & Pullian.	165
FIG.7.144	Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação de Zingg & Pullian.	165
FIG.7.145	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação modificada 1. Quarta Ordem.	166
FIG.7.146	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação modificada 1. Quarta Ordem.	166
FIG.7.147	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação modificada 1. Quarta Ordem.	167

FIG.7.148	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação modificada 1. Quarta Ordem.	167
FIG.7.149	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação modificada 1. Quarta Ordem.	168
FIG.7.150	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação modificada 1. Quarta Ordem.	168
FIG.7.151	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação modificada 1. Quarta Ordem.	169
FIG.7.152	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação modificada 1. Quarta Ordem.	169
FIG.7.153	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação modificada 1. Quarta Ordem.	170
FIG.7.154	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação modificada 1. Quarta Ordem.	170
FIG.7.155	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação modificada 1. Quarta Ordem.	171
FIG.7.156	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação modificada 1. Quarta Ordem.	171
FIG.7.157	Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação modificada 1. Quarta Ordem.	172
FIG.7.158	Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação modificada 1. Quarta Ordem.	172
FIG.7.159	Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação modificada 1. Quarta Ordem.	173
FIG.7.160	Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação modificada 1. Quarta Ordem.	173
FIG.7.161	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação modificada 2. Quarta Ordem.	174
FIG.7.162	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação modificada 2. Quarta Ordem.	174
FIG.7.163	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação modificada 2. Quarta Ordem.	175
FIG.7.164	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação modificada 2. Quarta Ordem.	175

FIG.7.165	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação modificada 2. Quarta Ordem.	176
FIG.7.166	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação modificada 2. Quarta Ordem.	176
FIG.7.167	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação modificada 2. Quarta Ordem.	177
FIG.7.168	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação modificada 2. Quarta Ordem.	177
FIG.7.169	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação modificada 2. Quarta Ordem.	178
FIG.7.170	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação modificada 2. Quarta Ordem.	178
FIG.7.171	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação modificada 2. Quarta Ordem.	179
FIG.7.172	Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação modificada 2. Quarta Ordem.	179
FIG.7.173	Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação modificada 2. Quarta Ordem.	180
FIG.7.174	Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação modificada 2. Quarta Ordem.	180
FIG.7.175	Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação modificada 2. Quarta Ordem.	181
FIG.7.176	Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
	Formulação modificada 2. Quarta Ordem.	181
FIG.7.177	Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação modificada 3. Quarta Ordem.	182
FIG.7.178	Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação modificada 3. Quarta Ordem.	182
FIG.7.179	Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação modificada 3. Quarta Ordem.	183
FIG.7.180	Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação modificada 3. Quarta Ordem.	183
FIG.7.181	Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
	Formulação modificada 3. Quarta Ordem.	184

FIG.7.182 Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	
Formulação modificada 3. Quarta Ordem.	184
FIG.7.183 Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
Formulação modificada 3. Quarta Ordem.	185
FIG.7.184 Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
Formulação modificada 3. Quarta Ordem.	185
FIG.7.185 Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
Formulação modificada 3. Quarta Ordem.	186
FIG.7.186 Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
Formulação modificada 3. Quarta Ordem.	186
FIG.7.187 Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
Formulação modificada 3. Quarta Ordem.	187
FIG.7.188 Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
Formulação modificada 3. Quarta Ordem.	187
FIG.7.189 Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
Formulação modificada 3. Quarta Ordem.	188
FIG.7.190 Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
Formulação modificada 3. Quarta Ordem.	188
FIG.7.191 Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
Formulação modificada 3. Quarta Ordem.	189
FIG.7.192 Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	
Formulação modificada 3. Quarta Ordem.	189
FIG.7.193 Erro Relativo para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	190
FIG.7.194 Erro Relativo para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	190
FIG.7.195 Erro Relativo para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	191
FIG.7.196 Erro Relativo para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	191
FIG.7.197 Erro Relativo para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	192
FIG.7.198 Erro Relativo para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.	193
FIG.7.199 Erro Relativo para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	193
FIG.7.200 Erro Relativo para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	194
FIG.7.201 Erro Relativo para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	194
FIG.7.202 Erro Relativo para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	195
FIG.7.203 Erro Relativo para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	195
FIG.7.204 Erro Relativo para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	196

FIG.7.205 Erro Relativo para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	196
FIG.7.206 Erro Relativo para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	197
FIG.7.207 Erro Relativo para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	197
FIG.7.208 Erro Relativo para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.	198

LISTA DE TABELAS

TAB.4.1	Ordem de Erro mínima e média para malha 101-201-401 pontos, formulação Não-Conservativa Analítica	62
TAB.4.2	Ordem de Erro mínima e média para malha 101-201-401 pontos, formulação Não-Conservativa Numérica	63
TAB.4.3	Ordem de Erro mínima e média para malha 201-401-801 pontos, formulação Não-Conservativa Analítica	63
TAB.4.4	Ordem de Erro mínima e média para malha 201-401-801 pontos, formulação Não-Conservativa Numérica	64
TAB.4.5	Ordem de Erro mínima e média para malha 101-201-401 pontos, formulação Não-Conservativa Analítica de Quarta Ordem	71
TAB.4.6	Ordem de Erro mínima e média para malha 101-201-401 pontos, formulação Não-Conservativa Numérica de Quarta Ordem	71
TAB.4.7	Ordem de Erro mínima e média para malha 201-401-801 pontos, formulação Não-Conservativa Analítica de Quarta Ordem	72
TAB.4.8	Ordem de Erro mínima e média para malha 201-401-801 pontos, formulação Não-Conservativa Numérica de Quarta Ordem	72
TAB.4.9	Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 101-201-401 pontos. $\theta = 10$	79
TAB.4.10	Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 101-201-401 pontos. $\theta = 20$	79
TAB.4.11	Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 101-201-401 pontos. $\theta = 30$	80
TAB.4.12	Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 101-201-401 pontos. $\theta = 40$	80
TAB.4.13	Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 101-201-401 pontos. $\theta = 50$	80
TAB.4.14	Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 101-201-401 pontos. $\theta = 60$	81
TAB.4.15	Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 201-401-801 pontos. $\theta = 10$	81
TAB.4.16	Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 201-401-801 pontos. $\theta = 20$	81

TAB.4.17	Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 201-401-801 pontos. $\theta = 30$	82
TAB.4.18	Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 201-401-801 pontos. $\theta = 40$	82
TAB.4.19	Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 201-401-801 pontos. $\theta = 50$	82
TAB.4.20	Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 201-401-801 pontos. $\theta = 60$	83
TAB.4.21	Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 201-401-801 pontos. $\theta = 70$	83
TAB.4.22	Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 201-401-801 pontos. $\theta = 80$	83
TAB.4.23	Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 201-401-801 pontos. $\theta = 90$	84
TAB.4.24	Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 201-401-801 pontos. $\theta = 100$	84

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

E	–	Energia interna total por unidade de massa
h	–	Coefficiente de transferência de calor por convecção
L	–	Comprimento do meio
P	–	Pressão
q	–	Termo fonte
T	–	Temperatura
T^*	–	Solução manufaturada
T_L	–	Temperatura do fluido externo
k	–	Condutividade térmica
K	–	Número de onda
\bar{K}	–	Número de onda modificado
u_i	–	Componentes do vetor velocidade
μ	–	Viscosidade dinâmica
θ	–	Parâmetro de controle dos gradientes, e número de pontos na malha espacial
ρ	–	Massa específica
ρC_p	–	Capacidade térmica a pressão constante

RESUMO

O presente estudo apresenta uma extensa investigação numérica sobre o tratamento da difusão de energia com propriedades variáveis. Para tal, foram realizados testes numéricos em um problema unidimensional transiente de condução de calor.

Testes foram realizados com esquemas centrados para resolução espacial, inicialmente com segunda ordem de precisão e, posteriormente, com quarta ordem. Foram empregadas, para ambos os esquemas, as formulações conservativas e não-conservativas do método de diferenças finitas. Os mesmos testes foram ainda realizados empregando uma formulação intrinsecamente conservativa do método de volumes finitos.

Visando avaliar a estabilidade numérica dos esquemas espaciais analisados, o impacto destes na marcha temporal foi investigado através do passo máximo no tempo obtido com o método de Euler. Também foram realizadas análises de erro, ordem do erro e também resolução espectral dos esquemas estudados.

Por fim, foi proposta uma nova formulação para resolução espacial de termos difusivos com propriedades variáveis que tenta agregar as melhores características de cada esquema analisado. Os resultados obtidos pelo método proposto foram consideravelmente superiores aos demais esquemas analisados.

ABSTRACT

This study presents an extensive numerical investigation on the treatment of diffusive terms with variable properties. In order to accomplish this, several tests were performed on the one-dimensional transient heat conduction problem.

Firstly, tests were performed employing a second order accurate centered scheme for spatial resolution, further, fourth order schemes were analyzed as well. For both formulations, conservative and non-conservative finite difference methods were employed.

Further the same tests were performed using an intrinsically conservative formulation of Finite Volume method. In order to evaluate the influence of the treatment of diffusive terms on numerical stability of these time-marching schemes, investigations were done considering the maximum time step allowable with the Euler method. Among other numerical features, were analyzed the behavior of the error and the order of accuracy produced by these schemes.

Finally, we proposed a new formulation for diffusive terms of spatial resolution with variable properties that combines notable features of each analyzed scheme. The results obtained by the proposed method were considerably better than the other schemes analyzed.

1 INTRODUÇÃO

Ao longo das últimas décadas, o desenvolvimento de novos métodos numéricos para resolução espacial das equações de governo em fenômenos de transporte concentrou maiores esforços na construção de aproximações discretas para seus termos advectivos, dando menor atenção aos termos difusivos. Isto se deve a maior complexidade do primeiro, quando comparado ao segundo. Um exemplo está na área aeroespacial (LANEY, 1998), onde a simulação de escoamentos compressíveis de alta velocidade utiliza as equações de Euler para modelar a propagação de ondas de choque e expansão, dentre outros fenômenos. O presente trabalho tenta preencher esta lacuna. Ele está voltado para o estudo de termos difusivos contendo propriedades variáveis, como os existentes nas equações de Navier-Stokes.

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Antes de discutir o tratamento numéricos dos termos difusivos, é preciso distinguir entre as duas abordagens mais comumente utilizadas na mecânica dos fluidos e transferência de calor computacional. Elas são os métodos de diferenças finitas e volumes finitos (LOMAX et al., 2001). A primeira abordagem é baseada no uso de expansões em série de Taylor ao redor de um ponto discreto, aplicadas diretamente à forma diferencial das equações de governo (TANNEHILL et al., 1997). Ela possui duas grandes vantagens, a dedução matemática rigorosa da ordem de erro e da estabilidade numérica de seus esquemas discretos e também a flexibilidade na escolha de formulações conservativas ou não-conservativas para seus esquemas. Já a segunda abordagem é baseada na forma integral das equações de conservação (VERSTEEG e MALALASEKERA, 1995). Ela possui duas grandes vantagens, sua formulação intrinsecamente conservativa e sua capacidade de lidar com geometrias irregulares naturalmente. Devido a estas diferenças entre os métodos de diferenças e volumes finitos, as principais características dos esquemas utilizados para discretização dos termos difusivos podem variar significativamente.

Termos difusivos não possuem uma direção preferencial de propagação, como ocorre com os termos advectivos devido ao transporte promovido pelo movimento do fluido. Logo, sua discretização é mais simples e tradicionalmente feita através de aproximações centradas. Por esta razão, a maior parte da literatura sobre o assunto está contida em livros, como os citados acima. Encontrar artigos recentes sobre o assunto não é uma tarefa trivial. Desta forma, a revisão bibliográfica desta dissertação se concentrou na discretização dos termos difusivos utilizada

para simulação de escoamentos modelados pelas equações de Navier-Stokes.

Um destes estudos é o trabalho de BASSI e REBAY (1997), que utiliza simulação numérica para computar o escoamento viscoso compressível em torno de aerofólios. Os autores utilizam um método de elementos finitos para solução numérica das equações de Navier-Stokes compressíveis. O estudo estende uma discretização descontínua de elementos finitos originalmente considerada para sistemas hiperbólicos, tais como as equações de Euler, para o caso das equações de Navier-Stokes tratando os termos viscosos com uma formulação mista. As derivadas de primeira ordem das variáveis conservativas conduzem as derivadas de quarta ordem quando se avalia o divergente dos fluxos viscosos. Entretanto, as derivadas de segunda ordem não podem ser aplicadas diretamente numa formulação variacional fraca utilizando um espaço de função descontínua. O método combina diferentes características comumente associadas a elementos finitos e métodos de volumes finitos. Assim como em métodos clássicos de elementos finitos, de fato, a precisão é obtida por meio de aproximação polinomial de alta ordem dentro de um elemento, em vez de estêncis de largura, como no caso de regimes de volumes finitos. A física de propagação de ondas é, no entanto, representada por resolver os problemas (aproximados) de Riemann, que surgem a partir da representação descontínua da solução. A este respeito o método é semelhante a de um esquema de volume finito.

Outro trabalho é o estudo feito por ZHONG (1998). Em seu estudo ele utiliza simulação numérica direta para estudar o fenômeno da transição laminar-turbulenta em camadas limites supersônicas na presença de ondas de choque. Ele utiliza um método de diferenças finitas com alta ordem de resolução temporal e espacial. Neste estudo, a condição de contorno é a própria onda de choque para evitar erros numéricos causados no tratamento desta descontinuidade. No que diz respeito ao tratamento do termo difusivo, o autor descreve as duas formulações tradicionais em diferenças finitas: conservativa e não-conservativa. A primeira garante conservação dos fluxos difusivos, que são os fluxos condutivos ou viscosos no caso das equações de Navier-Stokes. Ela é obtida essencialmente aplicando-se a aproximação discreta para a primeira derivada duas vezes. Isto é mais fácil de se implementar, porém leva a um estêncil contendo um maior número de pontos. Já a formulação não-conservativa expande o operador difusivo, fazendo aparecer a segunda derivada explicitamente. A discretização desta versão leva ao menor número de pontos possível no estêncil para uma dada ordem de erro. Por esta razão, a estabilidade numérica da formulação não-conservativa é maior que a da versão conservativa, porém ela não garante conservação dos fluxos difusivos.

Em uma sequência de trabalhos publicados por RANGO e ZINGG (2000), ZINGG (2000) e RANGO (2001), uma análise comparativa de diferentes tipos de discretização espacial para as equações de Navier-Stokes é apresentada. Eles utilizam o escoamento turbulento, subsônico

e transônico ao redor de aerofólios como problema base para comparação das simulações. O principal foco destes estudos são os termos advectivos, mas uma nova discretização dos termos difusivos também é apresentada. Como os autores utilizam volumes finitos, a primeira aproximação, relacionada a primeira derivada externa, é feita em relação as faces dos volumes. O termo resultante, que inclui a multiplicação de uma propriedade do fluido e a primeira derivada interna, é então aproximado usando informações nos centros dos volumes. Por esta razão, o número de pontos do estêncil é menor que o utilizado pela formulação conservativa equivalente do método de diferenças finitas, mas ainda é maior que o utilizado pela formulação não-conservativa equivalente deste método. Os autores afirmam que a perda de precisão não é significativa, porém não apresentam resultados pra ordem de erro obtida numericamente.

O trabalho feito por LELE (1992) analisa esquemas compactos de diferenças finitas centradas com variadas ordem de erro. Versões parcialmente atrasadas e avançadas também são fornecidas para uso em problemas com condições de contorno não-periódicas. O autor enfatiza uma análise do número de onda e velocidade de fase modificados destes esquemas, demonstrando que esquemas compactos se aproximam mais do ideal espectral do que esquemas explícitos para um mesmo número de pontos no estêncil. Desta forma, não há prejuízos significativos na estabilidade numérica destes esquemas. Fórmulas para a primeira e segunda derivadas são fornecidas, podendo ser utilizadas para termos difusivos.

No estudo de SANDHAM et al. (2002) é discutido esquemas de entropia consistentes para simulação de escoamentos turbulentos complexos. Tratando a preservação de vorticidade como uma variável secundária, os desafios inerentes a essa metodologia residem na solução numérica das equações dos sistemas não-lineares com restrições no método de discretização. Os autores ressaltam que o uso destes esquemas para termos difusivos das equações de Navier-Stokes não é trivial devido à derivação de termos que já contém derivadas. Este procedimento causa uma desacoplamento par-ímpar que deve ser evitado por introduzir oscilações de alta frequência na solução. Por esta razão, uma formulação não-conservativa é recomendada.

NAGARAJAN et al. (2003) apresentam um esquema centrado de alta ordem compacto para simulação de grandes vórtices dos escoamentos compressíveis turbulentos. Os autores comparam esquemas compactos clássicos de diferenças finitas com suas respectivas versões para volumes finitos, ou seja, com pontos avaliados na interface em vez do centro das células. Estas duas abordagens também são chamadas de colocadas e deslocadas, respectivamente. Utilizando uma análise do número de onda modificado, eles mostram que a versão deslocada possui comportamento muito superior nas regiões de alto número de onda, tanto para a primeira quanto para a segunda derivadas. Além disso, a formulação conservativa deslocada para os termos difusivos apresenta uma degradação muito pequena para altos número de onda, ao contrário da

formulação conservativa tradicional destes termos.

de alta ordem em estudos numéricos podem reduzir o custo computacional.

Já no trabalho desenvolvido por FORTUNE (2004) é apresentado um estudo do som emitido por uma camada de mistura temporal usando simulação numérica direta. Eles também utilizaram um método de diferenças finitas com alta ordem de erro na resolução tanto espacial quanto temporal. Condições de contorno periódicas e regiões de absorção foram utilizadas para minimizar erro nas fronteiras artificiais. Estes autores mencionam o uso de uma formulação não-conservativa. Nela, aparecem segundas derivadas nas equações de conservação de momentum e energia. Isto é feito para evitar a perda de precisão causada pela discretização sucessiva da primeira derivada. Isto mostra que a perda de estabilidade numérica causada pelo uso da formulação conservativa vem acompanhada de uma perda de precisão. Contudo, resultados numéricos para a ordem de erro não são apresentados.

SHEN et al. (2007) desenvolveram esquemas robustos de alta ordem para as equações de Navier-Stokes compressíveis utilizando o método de diferenças finitas com formulações conservativas. Tanto os termos advectivos quanto os difusivos são considerados neste trabalho. Uma série de problemas clássicos em escoamentos compressíveis são simulados para demonstrar as características destes esquemas. Os métodos desenvolvidos são usados posteriormente para a simulação de problemas fluido-estrutura (SHEN et al., 2008), sendo o tratamento dos termos difusivos comparado com o formulado por RANGO e ZINGG (2000). Uma diferença importante aparece no cálculo da primeira derivada interna, que usa uma fórmula com maior ordem de erro sem causar um aumento no número de pontos do estêncil final. Isto é feito para minimizar o problema da perda de ordem na discretização dos termos difusivos na presença de propriedades não constantes, observado pelos autores ao usar o esquema proposto por RANGO e ZINGG (2000). Vale a pena mencionar que nenhum cálculo de ordem de erro ou estabilidade numérica é apresentado nestes estudos.

1.2 OBJETIVO

Este estudo tem por objetivo investigar o tratamento do termo difusivo para propriedades variáveis, dando continuidade ao estudo feito por PIMENTEL (2010), focando em ordem de erro e estabilidade numérica, uma vez que não foram apresentados resultados quantitativos para estes dois critérios nos artigos pesquisados para esse trabalho. Inicialmente iremos nos concentrar num problema modelo de condução de calor 1D transiente, pois é o modelo mais simplificado que existe para considerar tal termo difusivo. Consideramos um modelo transiente para avaliar o impacto do esquema escolhido para resolução espacial na estabilidade numérica da marcha

temporal, que reduz o maior passo no tempo permissível. O estudo se inicia com uma análise de esquemas centrados de segunda-ordem para resolução espacial, posteriormente avançando para esquemas de quarta ordem. Formulações conservativas e não-conservativas do método de diferenças finitas serão testadas em conjunto com a formulação intrinsecamente conservativa do método de volumes finitos. Uma vez encerrada a análise quantitativa das diferentes metodologias existentes na literatura para resolução espacial de termos difusivos com propriedades variáveis, propomos uma nova formulação que tenta agregar as melhores características de cada esquema.

O problema de difusão de calor poderá ser utilizado para simular as dificuldades produzidas na discretização dos termos difusivos das equações de Navier-Stokes apenas quando gradiente elevados de temperatura e condutividade térmica existirem. Podemos gerar este efeito artificialmente utilizando o Método da Solução Manufaturada.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

2.1 EQUAÇÕES DE GOVERNO

2.1.1 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES COMPRESSÍVEL

Como mencionado na introdução, o principal objetivo deste trabalho é examinar os diferentes tratamentos numéricos utilizados na literatura para aproximação dos termos difusivos encontrados nas equações de Navier-Stokes. Este sistema de equações é obtido a partir dos princípios de conservação de massa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad , \quad (2.1)$$

quantidade de movimento linear,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + P \delta_{i,j}) = \frac{\partial \tau_{i,j}}{\partial x_j} \quad , \quad (2.2)$$

e energia,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_j} ((\rho E + P) u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{i,j} u_i + q_j) \quad , \quad (2.3)$$

escritos na forma conservativa, em conjunto com as relações constitutivas

$$\tau_{i,j} = \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{i,j} \quad \text{e} \quad q_i = k \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad , \quad (2.4)$$

para o tensor tensões viscoso de um fluido Newtoniano e o fluxo de calor por condução, sendo o último também conhecido como lei de Fourier, além de uma equação de estado adequada. Neste conjunto de equações, ρ representa a massa específica, u_i as componentes do vetor velocidade, P a pressão, E a energia interna total por unidade de massa, T a temperatura, μ a viscosidade dinâmica e k a condutividade térmica.

2.1.2 EQUAÇÃO DO CALOR

No presente trabalho, nosso interesse está voltado para os termos no lado direito das equações (2.2) e (2.3), também conhecidos como termos viscosos ou difusivos na literatura voltada para escoamentos compressíveis. Uma análise comparativa das diferentes metodologias empregadas para o termo difusivo destas equações pode ser feita se considerarmos um problema teste mais simples, mas que ainda contém este termo. A equação que modela a condução de calor

uni-dimensional transiente em um meio com condutividade térmica variável, dada por

$$\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q \quad , \quad (2.5)$$

onde ρC_P é a capacidade térmica a pressão constante e q é um termo fonte. As condições de contorno escolhidas para este problema são de isolamento térmico

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad , \quad (2.6)$$

e troca de calor por convecção

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} + h T(x=L, t) = h T_L \quad , \quad (2.7)$$

sendo que uma temperatura é prescrita constante e escolhida como condição inicial,

$$T(x, t=0) = T_0 \quad , \quad (2.8)$$

onde L é o comprimento do meio, h o coeficiente de transferência de calor por convecção e T_L a temperatura do fluido externo para o qual o meio ganha ou perde calor, dependendo se $T > T_L$ ou $T < T_L$, respectivamente. As expressões escolhidas para condutividade térmica e termo fonte serão apresentadas posteriormente, após a análise a seguir.

2.1.3 MODELAGEM DO TERMO DIFUSIVO

Podemos notar que estes termos difusivos, tanto nas equações (2.2) a (2.4) quanto na equação (2.5), contém derivadas consecutivas das variáveis e/ou parâmetros do sistema, na forma genérica

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(f \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \quad , \quad (2.9)$$

sendo o lado esquerdo da equação acima escrito na forma conservativa e o lado direito na forma não-conservativa, onde f e g representam variáveis ou parâmetros arbitrários do problema em questão. Desta forma, podemos nos voltar agora para uma análise dos esquemas numéricos a serem utilizados.

2.2 RESOLUÇÃO TEMPORAL

O objetivo deste trabalho é avaliar o desempenho de esquemas para resolução espacial de termos difusivos, o que pode ser feito em grande parte apenas com a análise de equações em regime permanente. Contudo, uma característica importante destes esquemas é o impacto que eles tem na estabilidade numérica do método de marcha no tempo escolhido. Para avaliar esta

característica, escolhemos o método de Euler explícito, uma vez que este é condicionalmente estável para problemas de difusão de calor. Como sua versão implícita é incondicionalmente estável, ela não permitiria uma avaliação de estabilidades numérica.

Neste esquema, a aproximação da derivada temporal da temperatura é dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{\Delta T}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (2.10)$$

com $\Delta T = T^{n+1} - T^n$ e Δt representando o passo no tempo. Quanto mais estável for o esquema utilizado, maior será o passo no tempo que ele poderá tolerar.

O regime permanente é obtido quando a derivada temporal da temperatura é reduzida a um erro arbitrário estabelecido de forma a tornar o erro temporal menor que o erro proveniente da resolução espacial, para que possamos avaliá-lo.

2.3 ANÁLISES DE ERRO

Verificação e validação são etapas importantes na construção de um código computacional confiável (SALARI e KNUPP, 2000; OBERKAMPF e ROY, 2010). A primeira se dedica a demonstrar que os métodos numéricos sendo utilizados pelo usuário foram implementados de maneira correta. Já a segunda se dedica a demonstrar se o modelo matemático escolhido pelo usuário reproduz adequadamente a realidade que pretende estudar. Desta forma, a primeira deve vir antes da segunda pois, caso contrário, pode mascarar possíveis problemas desta.

A análise do erro numérico gerado por um método e a ordem de erro deste representam um rigoroso processo de verificação. A primeira nos permite avaliar se a solução gerada converge para um determinado comportamento na medida que as malhas espaciais e temporais são refinadas. Já a segunda nos diz se a taxa desta convergência está condizente com seu valor teórico. Estas técnicas tornam possível identificar diversas fontes de erros que possam existir na programação do código implementado. Uma fonte comum de erro durante o desenvolvimento de um código computacional ocorre nos contornos do domínio, devido à imposição de condições equivocadas. Com a análise de ordem, é possível verificar se as condições de contorno impostas estão coerentes com a equação simulada, gerando, com isso, uma solução de mesma ordem em todo o domínio. Foi por esta razão que a temperatura não foi prescrita nos contornos. Como seu erro é nulo, tal condição afeta benéficamente o erro proveniente da discretização do domínio, podendo mascarar a análise.

A ordem teórica de um código é definida através de análise da ordem do erro de truncamento que surge durante a discretização. Já a ordem real do código programado pode ser calculada por um procedimento prático. Ambas serão discutidas a seguir.

2.3.1 ORDEM TEÓRICA

Uma simples análise dos diferentes tipos de discretização utilizados na literatura para termos difusivos é capaz de ilustrar as principais diferenças entre eles. Esta etapa não apenas justifica o presente estudo, de um ponto de vista puramente teórico, como também indica o comportamento que deve ser esperado de cada metodologia.

Diferenças Finitas - Formulação Conservativa

Iremos considerar primeiro a discretização do termo difusivo na forma descrita no lado esquerdo da equação (2.9), ou seja, usando uma formulação conservativa, no contexto do Método de Diferenças Finitas. Discretizando a parte interna deste termo, no ponto i de uma malha uniforme, com o operador algébrico γ_i^m gera

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(f \frac{\partial g}{\partial x} \right)_i \simeq \frac{\partial}{\partial x} \left(f_i \frac{\gamma_i^m(g)}{\Delta x} + O(\Delta x^m) \right)_i, \quad (2.11)$$

onde m é a ordem do erro de truncamento associado a este operador. Repetindo este processo no mesmo ponto, porém com a parte externa do termo original, usando o operador algébrico δ_i^n no termo resultante acima gera

$$\simeq \frac{1}{\Delta x} \delta_i^n \left(f_i \frac{\gamma_i^m(g)}{\Delta x} + O(\Delta x^m) \right)_i + O(\Delta x^n), \quad (2.12)$$

onde n é a ordem do erro de truncamento associado ao segundo operador, que pode ser igual ao primeiro. Esta aproximação discreta toma a forma final

$$\simeq \frac{\delta_i^n (f_i \gamma_i^m(g))}{\Delta x^2} + O(\Delta x^{m-1}, \Delta x^n). \quad (2.13)$$

Duas conclusões importantes podem ser extraídas da fórmula (2.13). A primeira está implícita na aplicação consecutiva dos operadores para as derivadas interna e externa do termo difusivo, uma vez que o operador final resultante desta aplicação possui um maior estêncil. Já a segunda está explícita no erro de truncamento final, cuja ordem é reduzida devido a esta mesma aplicação consecutiva destes operadores.

Diferenças Finitas - Formulação Não-Conservativa

Uma alternativa a formulação anterior vem da forma descrita no lado direito da equação (2.9), chamada de formulação não-conservativa, ainda no contexto do Método de Diferenças Finitas. Os operadores da subseção anterior, para a primeira derivada, em conjunto com o

operador algébrico ϵ_i^o , para a segunda derivada, geram

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right\}_i \simeq \left(\frac{\gamma_i^m(f)}{\Delta x} + O(\Delta x^m) \right) \left(\frac{\delta_i^n(g)}{\Delta x} + O(\Delta x^n) \right) + f_i \frac{\epsilon_i^o(g)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^o) , \quad (2.14)$$

onde O é a ordem do erro de truncamento associado ao operador para a segunda derivada. Desta forma, esta equação pode ser re-escrita como

$$\simeq \frac{\gamma_i^m(f) \delta_i^n(g)}{\Delta x^2} + f_i \frac{\epsilon_i^o(g)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^{m-1}, \Delta x^{n-1}, \Delta x^o) . \quad (2.15)$$

Ao contrário da expressão (2.13), a fórmula acima não possui seu estêncil aumentado, uma vez que não há aplicações consecutivas de um operador. Contudo, ainda observamos a redução de ordem no erro de truncamento na expressão (2.15), que agora aparece em maior escala. Ela está claramente associada ao produto de aproximações para derivadas. Além disso, esta redução de ordem somente existe em regiões onde as propriedades não são constantes. Esta análise indica que os erros introduzidos por esta aproximação serão maiores se ambas as derivadas forem maiores.

Volumes Finitos

Outra abordagem amplamente utilizada para simulação computacional é conhecida como o Método dos Volumes Finitos. Ele recebe destaque aqui por suas aproximações terem um caráter ligeiramente distinto das geradas pelo Método das Diferenças Finitas. Isso ocorre por duas razões. Primeiro, este método é implicitamente conservativo e, em segundo lugar, avalia suas variáveis e parâmetros tanto nas faces quanto nos centros das linhas, áreas ou volumes finitos provenientes da discretização de equações uni, bi ou tri-dimensionais, respectivamente. Neste caso, a equação (2.9) é escrita como

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_i \simeq \frac{\bar{\gamma}_i^m(h)}{\Delta x} + O(\Delta x^m) \quad \text{onde} \quad h = f \frac{\partial g}{\partial x} , \quad (2.16)$$

mantendo a notação de diferenças finitas usada até o momento, porém com uma importante diferença. A barra sobre o operador algébrico indica que o mesmo utiliza pontos nas faces, por exemplo $i \pm 1/2$, e não nos centros, por exemplo i , de cada volume para construir a aproximação discreta. Isto nos força a aproximar os valores de f , que é aproximado por ϕ , e da derivada de g nas faces como função de seus pares no centro dos volumes finitos. Logo,

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_i \simeq \frac{1}{\Delta x} \bar{\gamma}_i^m \left((\phi_i^n(f) + O(\Delta x^n)) \left(\frac{\gamma_i^o(g)}{\Delta x} + O(\Delta x^o) \right) \right) + O(\Delta x^m) , \quad (2.17)$$

onde n é a ordem do erro de truncamento associado ao operador para a função. Desta forma, podemos escrever o operador final como

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_i \simeq \frac{\bar{\gamma}_i^m (\phi_i^n(f) \gamma_i^o(g))}{\Delta x^2} + O(\Delta x^{n-2}, \Delta x^{o-1}, \Delta x^m) . \quad (2.18)$$

Esta simples derivação mostra que a formulação gerada pelo Método dos Volumes Finitos combina os problemas encontrados nas duas formulações anteriores geradas pelo Método de Diferenças Finitas. Tanto a aplicação consecutiva de operadores algébricos quanto a multiplicação de aproximações, aparecendo agora como função vezes derivada no lugar de derivada vezes derivada, são encontradas. Como consequência, existe uma maior queda na ordem da aproximação final.

2.3.2 ORDEM REAL

Um dos objetivos deste trabalho é mensurar a consequência prática aparente perda de ordem na estabilidade numérica e ordem de erro de cada um dos esquemas acima. A estabilidade numérica é determinada pelo maior passo no tempo físico que o método de marcha escolhido pode dar ao utilizar cada um dos esquemas acima para resolução espacial. Por outro lado, a ordem de erro real pode ser calculada por um método frequentemente empregado para tal. Ele consiste em executar o código em questão para malhas consecutivamente refinadas, sendo a solução obtida com a malha mais refinada considerada como uma solução de referência para obtenção do erro absoluto da solução obtida com a malha menos refinada. Com isso, é possível calcular o erro de discretização em função de Δx , sendo este parâmetro a distância entre os pontos na malha para o cálculo da ordem espacial.

Portanto, para qualquer método discreto, sabe-se que a ordem do erro da solução é uma função de Δx , ou seja:

$$E \approx E(h) \quad (2.19)$$

Sabendo que o erro de truncamento em uma discretização é da ordem de h^p , sendo p a ordem teórica da discretização empregada, para duas malhas consecutivamente refinadas tem-se:

$$E_{Malha1} - E_{Malha2} \approx O(h^p) \quad (2.20)$$

$$E_{Malha2} - E_{Malha3} \approx O\left(\left(\frac{h}{r}\right)^p\right) \quad (2.21)$$

sendo r o refinamento empregado na malha. Dividindo os erros obtemos:

$$\frac{E_{Malha1-Malha2}}{E_{Malha2-Malha3}} = r^p \quad (2.22)$$

Com isso, a ordem real do código implementado pode ser obtida fazendo:

$$p = \frac{\log\left(\frac{E_{Malha1-Malha2}}{E_{Malha2-Malha3}}\right)}{\log(r)} \quad (2.23)$$

Quando a ordem calculada é menor que a ordem teórica do método, deve-se rever a programação em busca de possíveis erros no código. Nos casos em que a ordem real calculada é igual ou aproximadamente igual à ordem teórica, após alguns testes com diferentes malhas, significa que a ordem do código programado foi verificada com sucesso. Um código com ordem real verificada deve ser, por fim, validado para que seja considerado confiável.

2.4 MÉTODO DA SOLUÇÃO MANUFATURADA

Ele foi originalmente desenvolvido por ROACHE (1998) e pode ser usado para verificar esquemas numéricos para as equações de mecânica dos fluidos computacional (ROY et al., 2004) e suas condições de contorno (BOND et al., 2005). Nesta abordagem de construção, a solução é assumida como satisfazendo uma equação diferencial parcial de interesse. A ideia principal do Método da Solução Manufaturada é simplesmente produzir uma solução exata sem estar interessado na realidade física do problema (ROY, 2005). Uma função analítica conhecida é inserida no lugar da variável dependente na equação diferencial parcial, e todas as derivadas são computadas analiticamente, manualmente ou através de algum programa de computação simbólica, como o *Mathematica*, utilizado nesta dissertação. A equação é rearranjada de tal maneira que todos os termos restantes que não satisfazem equação diferencial parcial original são agrupados em um termo fonte. Este termo é, então, simplesmente acrescentado à equação diferencial parcial original de forma que a função satisfaça exatamente à nova equação diferencial parcial, ou seja, as equações diferenciais governantes são modificadas para produzir a solução manufaturada pré-estabelecida.

Este procedimento também pode ser aplicado a sistemas de equações, com o termo fonte gerado separadamente para cada equação. Tanto soluções em regime permanente ou transiente podem ser tratadas. Este método pode ser usado tanto para evitar o crescimento exponencial da solução com o tempo quanto para evitar confusões entre instabilidades físicas e numéricas (SALARI e KNUPP, 2000).

O Método da Solução Manufaturada pode ser aplicado de melhor forma em malhas refinadas quando as propriedades de transporte difusivo μ e κ causam fluxos difusivos e convectivo de

mesma magnitude (BOND et al., 2005). Se o fluxo difusivo for significativamente menor que o fluxo convectivo, os erros presentes no código para a equação de quantidade de movimento linear ou energia podem não ser observáveis no Método da Solução Manufaturada, a não ser que a malha seja muito fina.

O método, de modo geral, não verifica se o código está correto como um todo, pois nem todos os erros dos códigos afetam a precisão. Verifica-se que o procedimento produz uma solução numérica correta, mas podem ainda existir erros no código que reduzem a taxa de convergência iterativa mesmo que ainda produza a solução correta; erros que podem causar uma perda na eficiência e sem perda significativa na precisão (ROY, 2005).

Como foi visto na seção anterior, a perda de ordem na discretização dos termos difusivos ocorre devido ao produto entre derivadas da propriedade e do potencial. Desta forma, utilizaremos o Método da Solução Manufaturada para induzir grandes gradientes tanto na condutividade térmica quanto na temperatura. A função escolhida para a condutividade térmica tem a forma (2.24) mostrada na figura 2.1.

$$k(x) = \frac{(k_{max} + k_{min})}{2} + \left[\frac{(k_{max} - k_{min})}{2} \right] \tanh[\theta(x + 1/2)] \quad (2.24)$$

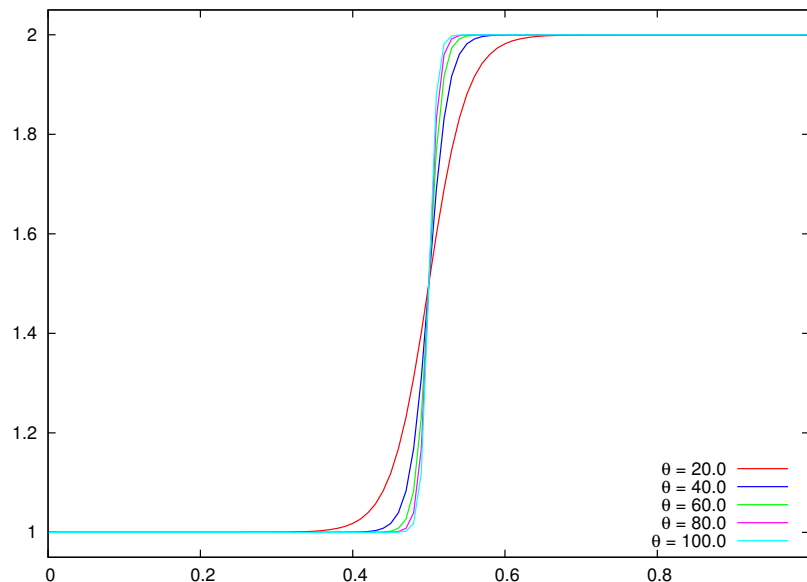


FIG. 2.1: Conditividade Térmica para diferentes valores de θ

Já a função escolhida para a temperatura tem a forma da equação (2.25), mostrada abaixo na figura 2.2.

$$T^*(x) = T_L \left(\frac{1}{2} \tanh \left(\theta \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right) \right) + \frac{1}{2} \right) \left(\sin \left(\frac{ax}{L} \right) + \cos \left(\frac{ax}{L} \right) \right) + T_R \cos \left(\frac{x}{L} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \left(\theta \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right) \right) \right) \quad (2.25)$$

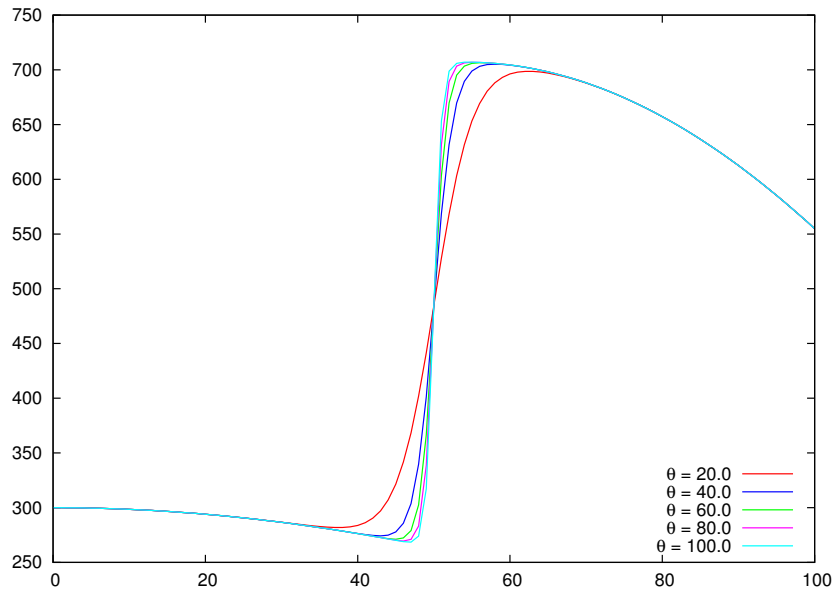


FIG. 2.2: Temperatura para diferentes valores de θ

O termo fonte que precisa ser introduzido na equação (2.5) para gerar a solução (2.25) é obtido de sua versão em regime permanente, ou seja,

$$q = - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T^*}{\partial x} \right) \quad (2.26)$$

2.5 NÚMERO DE ONDA MODIFICADO

Uma análise importante das diferentes discretizações espaciais que serão implementadas consiste na verificação do espectro de onda que elas conseguem reproduzir (LELE, 1992). Isto pode ser verificado se os diferentes esquemas forem comparados com o método de Fourier, que gera a solução mais precisa possível dentre os métodos conhecidos na literatura.

Para fazer esta comparação, assumimos

$$T(x) = ce^{iKx} \quad (2.27)$$

o que faz com que sua segunda derivada assuma a forma

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -K^2 c e^{iKx} = -K^2 T(x) \quad (2.28)$$

ou seja,

$$\frac{1}{T(x)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -K^2 \quad (2.29)$$

onde K é o número de onda.

Esta dependência também pode ser estimada ao usarmos métodos de diferenças finitas. Para fazê-lo, substituímos

$$T_{j\pm 1} = c e^{iK(x_j \pm \Delta x)} \quad (2.30)$$

na aproximação escolhida, onde definimos

$$\frac{1}{T(x)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\bar{K}^2 \quad (2.31)$$

onde \bar{K} é o número de onda modificado.

Para ilustrar o procedimento, vamos considerar a discretização explícita de segunda ordem

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_j \simeq \frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{\Delta x^2} \quad (2.32)$$

e substituir (2.30) nela para encontrarmos, após alguma manipulação

$$-\bar{K}^2 = \frac{e^{iK\Delta x} - 2 + e^{-iK\Delta x}}{\Delta x^2} \quad (2.33)$$

que, escrita na forma trigonométrica, se torna

$$-(\bar{K} \Delta x)^2 = 2 - 2 \cos(K \Delta x) \quad (2.34)$$

A fim de verificar a equivalência entre as derivadas no espaço físico e no espaço espectral, utiliza-se o número de onda modificado $\bar{K} \Delta x$ em vez do número de onda $K \Delta x$. Onde $K \Delta x$ e $\bar{K} \Delta x$ são adimensionais.

3 RESOLUÇÃO ESPACIAL

As discretizações espaciais utilizadas para o termo difusivo da equação de condução de calor transiente seguem duas formulações distintas, provenientes dos métodos de diferenças e volumes finitos. Contudo, a última é reescrita na formulação de diferenças finitas antes de ser implementada.

Dentro da formulação de diferenças finitas, duas abordagens são utilizadas neste trabalho. Uma segue a formulação conservativa e outra segue a formulação não-conservativa. Esta última ainda é dividida em duas, que variam de acordo com o tratamento dado à derivada da propriedade, que pode ser analítica ou numérica. Esta última separação é incluída uma vez que a perda de ordem está associada ao produto de derivadas numéricas. Desta forma, avaliando a derivada da propriedade de forma analítica, podemos minimizar este erro e avaliar seu real impacto.

Já o tratamento por volumes finitos segue a formulação conservativa, pois trata as equações de governo na forma integral, que é intrinsecamente conservativa. Contudo, tanto as propriedades quanto a derivada interna do termo difusivo são avaliadas das faces do volume e, por isso, precisam ser aproximadas em função de pontos no centro dos volumes.

Neste contexto, o presente trabalho irá comparar diferentes tipos de aproximações para ambas as partes do termo difusivo.

3.1 MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

3.1.1 FORMULAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM

3.1.1.1 FORMULAÇÃO NÃO-CONSERVATIVA

A partir da equação (2.5), é possível desenvolver a formulação não-conservativa do problema estudado. Para tal, usamos a expansão (2.9) no termo difusivo e marchamos o resultado no tempo de acordo com (2.10), obtendo

$$\rho C_p \left(\frac{\Delta T}{\Delta t} \right) = \left(\frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q \right)_i^n \quad (3.1)$$

onde $\Delta T = (T_i^{n+1} - T_i^n)$. Utilizando aproximações centradas de segunda ordem na primeira e segunda derivadas da temperatura, tem-se

$$\Delta T = \frac{\Delta t}{\rho C_p} \left. \frac{\partial k}{\partial x} \right|_i^n \left(\frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) + \frac{k_i^n \Delta t}{\rho C_p} \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) + \frac{q_i^n \Delta t}{\rho C_p} \quad (3.2)$$

na forma residual, sendo que a primeira derivada da propriedade pode ser calculada numericamente por

$$\left. \frac{\partial k}{\partial x} \right|_i^n = \left(\frac{k_{i+1}^n - k_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) \quad (3.3)$$

ou analiticamente. Neste caso, a perda de ordem teórica devido ao produto das derivadas não ocorre, o que nos permite isolar o impacto deste efeito ao usarmos uma derivada numérica.

Alé disso, pelo o que foi visto na seção 2.5, obtemos a seguinte fórmula para o número de onda modificado:

$$\bar{K} = 2(\cos(\Delta x K) - 1) \quad (3.4)$$

3.1.1.2 FORMULAÇÃO CONSERVATIVA

A partir da equação (2.5), também é possível derivar a formulação conservativa do problema estudado. Definindo o fluxo de calor por condução

$$E = k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.5)$$

podemos chegar ao fluxo difusivo na forma

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (3.6)$$

e aplicar uma aproximação centrada de segunda ordem na derivada externa e, posteriormente, na derivada interna, para obter

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_i^n &= \frac{E_{i+1}^n - E_{i-1}^n}{2\Delta x} \\ &= \frac{\left(\left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+1}^n - \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-1}^n \right)}{2\Delta x} \\ &= \frac{(k_{i+1}^n (T_{i+2}^n - T_i^n) - k_{i-1}^n (T_i^n - T_{i-2}^n))}{4\Delta x^2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

E temos também a seguinte fórmula para o número de onda modificado:

$$\bar{K} = -\text{sen}^2(\Delta x K) \quad (3.8)$$

3.1.2 FORMULAÇÕES DE QUARTA ORDEM

3.1.2.1 FORMULAÇÃO NÃO-CONSERVATIVA

Repetindo o procedimento anterior, porém agora utilizando aproximações centradas de quarta ordem tanto para a primeira quanto para a segunda derivadas da equação (3.1), obtemos a nova formulação não-conservativa

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{\Delta t}{\rho C_p} \left(\frac{k_{i-2}^n - 8k_{i-1}^n + 8k_{i+1}^n - k_{i+2}^n}{12\Delta x} \right) \left(\frac{T_{i-2}^n - 8T_{i-1}^n + 8T_{i+1}^n - T_{i+2}^n}{12\Delta x} \right) \\ &+ \frac{k_i^n \Delta t}{\rho C_p} \left(\frac{-T_{i-2}^n + 16T_{i-1}^n - 30T_i^n + 16T_{i+1}^n - T_{i+2}^n}{12\Delta x^2} \right) + \frac{q_i^n \Delta t}{\rho C_p} \end{aligned} \quad (3.9)$$

ainda na forma residual.

Próximo aos contornos são necessárias discretizações de diferenças parcialmente avançadas e atrasadas, caso contrário, pontos fora do domínio seriam necessários. Diferenças parcialmente avançadas para a primeira e segunda derivadas de (3.1) produzem, em $i = 2$, a nova expressão

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{\Delta t}{\rho C_p} \left(\frac{-3k_{i-1}^n - 10k_i^n + 18k_{i+1}^n - 6k_{i+2}^n + k_{i+3}^n}{12\Delta x} \right) \\ &\cdot \left(\frac{-3T_{i-1}^n - 10T_i^n + 18T_{i+1}^n - 6T_{i+2}^n + T_{i+3}^n}{12\Delta x} \right) \\ &+ \frac{k_i^n \Delta t}{\rho C_p} \left(\frac{11T_{i-1}^n - 20T_i^n + 6T_{i+1}^n + 4T_{i+2}^n - T_{i+3}^n}{12\Delta x^2} \right) + \frac{q_i^n \Delta t}{\rho C_p} \end{aligned} \quad (3.10)$$

sendo que, diferenças parcialmente atrasadas são usadas em $i = Nx - 1$, gerando a nova expressão

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{\Delta t}{\rho C_p} \left(\frac{-k_{i-3}^n + 6k_{i-2}^n - 18k_{i-1}^n + 10k_i^n + 3k_{i+1}^n}{12\Delta x} \right) \\ &\cdot \left(\frac{-T_{i-3}^n + 6T_{i-2}^n - 18T_{i-1}^n + 10T_i^n + 3T_{i+1}^n}{12\Delta x} \right) \\ &+ \frac{k_i^n \Delta t}{\rho C_p} \left(\frac{-T_{i-3}^n + 4T_{i-2}^n + 6T_{i-1}^n - 20T_i^n + 11T_{i+1}^n}{12\Delta x^2} \right) + \frac{q_i^n \Delta t}{\rho C_p} \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde vale a pena notar que o deslocamento do ponto onde a derivada é avaliada para fora do centro do estêncil, mantendo-se o número total de pontos do mesmo, reduz em um a ordem da aproximação.

Temos também, como visto na seção 2.5, o seguinte o número de onda modificado para essa formulação:

$$\bar{K} = \frac{2}{3} \text{sen}^2 \left(\frac{\Delta x K}{2} \right) (\cos(\Delta x K) - 7) \quad (3.12)$$

3.1.2.2 FORMULAÇÃO CONSERVATIVA

Repetindo o procedimento utilizado na expressão (3.6), porém agora com aproximações centradas de quarta ordem, obtemos a nova formulação conservativa

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_i &= \frac{E_{i-2}^n - 8E_i^n - 1 + 8E_{i+1}^n - E_{i+2}^n}{12\Delta x} \\ &= \frac{\left(\left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-2}^n - 8 \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-1}^n + 8 \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+1}^n - \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+2}^n \right)}{12\Delta x} \\ &= \frac{(k_{i-2}(T_{i-4}^n - 8T_{i-3}^n + 8T_{i-1}^n - T_i^n) - 8k_{i-1}(T_{i-3}^n - 8T_{i-2}^n + 8T_i^n - T_{i+1}^n))}{244\Delta x^2} \\ &+ \frac{8k_{i+1}(T_{i-1}^n - 8T_i^n + 8T_{i+2}^n - T_{i+3}^n) - k_{i+2}(T_i^n - 8T_{i+1}^n + 8T_{i+3}^n - T_{i+4}^n)}{244\Delta x^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Temos também a seguinte fórmula para o número de onda modificado:

$$\bar{K} = -\frac{1}{61} (\text{sen}(2\Delta x K) - 8 \text{sen}(\Delta x K))^2 \quad (3.14)$$

3.2 MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS

A formulação de volumes finitos se diferencia da anterior na discretização da equação (3.9). Ambas buscam a derivada de E no centro i da célula central do estêncil, porém diferenças finitas utiliza informações no centro ($i \pm 1$) das células, enquanto volumes finitos o faz com informações nas faces ($i \pm 1/2$) destas células.

3.2.1 FORMULAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM

3.2.1.1 FORMULAÇÃO CONSERVATIVA DE VOLUMES FINITOS TRADICIONAL

Uma das formulações centradas de segunda ordem usadas nessa dissertação é a formulação conservativa de volumes finitos tradicional, que usa segunda ordem na função e nas duas derivadas. Onde a derivada externa, a partir de (3.5), tem a forma

$$\left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_i^n = \frac{-E_{i-\frac{1}{2}}^n + E_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x}, \quad (3.15)$$

a função tem a forma

$$k_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{k_{i-1}^n + k_i^n}{2} \quad (3.16)$$

e a primeira derivada interna tem a forma

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (3.17)$$

Assim, a aproximação para o termo difusivo toma a seguinte forma:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n = \frac{(T_{i-1}^n - T_i^n)(k_{i-1}^n + k_i^n) + (T_{i+1}^n - T_i^n)(k_i^n + k_{i+1}^n)}{2\Delta x^2} \quad (3.18)$$

Como visto na seção 2.5, a fórmula para o número de onda modificado é:

$$\bar{K} = 2(-1 + \cos(K\Delta x)) \quad (3.19)$$

3.2.1.2 FORMULAÇÃO CONSERVATIVA DE VOLUMES FINITOS SA

Para análise das formulações de segunda ordem foram utilizadas três formulações novas modificadas (SA2(0), SA2(1) e SA2(2)). A formulação SA2(0) aumenta para quarta ordem apenas a derivada interna. Onde a primeira derivada interna tem a forma

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{T_{i-2}^n - 27T_{i-1}^n + 27T_i^n - T_{i+1}^n}{24\Delta x} \quad (3.20)$$

Com isso, temos a seguinte aproximação para o termo difusivo para $3 \leq i \leq Nx - 2$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n &= \frac{-(k_{i-1}^n + k_i^n)(T_{i-2}^n - 27T_{i-1}^n + 27T_i^n - T_{i+1}^n)}{48\Delta x^2} \\ &+ \frac{(k_i^n + k_{i+1}^n)(T_{i-1}^n - 27T_i^n + 27T_{i+1}^n - T_{i+2}^n)}{48\Delta x^2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Para os pontos $i = 2$ e $i = Nx - 1$ usamos discretizações parcialmente avançadas e atrasadas.

Quando $i = 2$ a fórmula para a primeira derivada tem a forma

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{-23T_{i-1}^n + 21T_i^n + 3T_{i+1}^n - T_{i+2}^n}{24\Delta x} \quad (3.22)$$

Logo, a aproximação para o termo difusivo se torna

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n &= \frac{(k_{i-1}^n + k_i^n)(23T_{i-1}^n - 21T_i^n - 3T_{i+1}^n + T_{i+2}^n)}{48\Delta x^2} \\ &- \frac{(k_i^n + k_{i+1}^n)(23T_i^n - 21T_{i+1}^n - 3T_{i+2}^n + T_{i+3}^n)}{48\Delta x^2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Quando $i = Nx - 1$ a fórmula para a primeira derivada se tem a forma

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{T_{i-3}^n - 3T_{i-2}^n - 21T_{i-1}^n + 23T_i^n}{24\Delta x} \quad (3.24)$$

Assim a fórmula da aproximação do termo difusivo se torna

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_i^n &= \frac{(-k_{i-1}^n - k_i^n)(T_{i-3}^n - 3T_{i-2}^n - 21T_{i-1}^n + 23T_i^n)}{48\Delta x^2} \\ &+ \frac{(k_i^n + k_{i+1}^n)(T_{i-2}^n - 3T_{i-1}^n - 21T_i^n + 23T_{i+1}^n)}{48\Delta x^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

E fórmula para o número de onda modificado é:

$$\bar{K} = \frac{1}{3} \text{sen}^2 \left(\frac{\Delta x K}{2} \right) (\cos(\Delta x K) - 13) \quad (3.26)$$

A formulação SA2(1) aumenta para quarta ordem apenas a função. Logo, para $3 \leq i \leq Nx - 1$, a fórmula para a função tem a forma

$$k_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{16}(-k_{i-2}^n + 9k_{i-1}^n + 9k_i^n - k_{i+1}^n) \quad (3.27)$$

Daí, a aproximação para o termo difusivo é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_i^n &= \frac{(k_{i-2}^n - 9k_{i-1}^n - 9k_i^n + k_{i+1}^n)(T_i^n - T_{i-1}^n)}{16\Delta x^2} \\ &+ \frac{(k_{i-1}^n - 9k_i^n - 9k_{i+1}^n + k_{i+2}^n)(T_i^n - T_{i+1}^n)}{16\Delta x^2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde $3 \leq i \leq Nx - 2$.

Assim como visto anteriormente, para os pontos $i = 2$ e $i = Nx - 1$ usamos discretizações parcialmente avançadas e atrasadas. Para $i = 2$ a fórmula para a função tem a forma

$$k_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{16}(5k_{i-1}^n + 15k_i^n - 5k_{i+1}^n + k_{i+2}^n) \quad (3.29)$$

Logo, a fórmula para o termo difusivo tem a forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_i^n &= \frac{(5k_{i-1}^n + 15k_i^n - 5k_{i+1}^n + k_{i+2}^n)(T_{i-1}^n - T_i^n)}{16\Delta x^2} \\ &+ \frac{(5k_i^n + 15k_{i+1}^n - 5k_{i+2}^n + k_{i+3}^n)(T_{i+1}^n - T_i^n)}{16\Delta x^2} \end{aligned} \quad (3.30)$$

E para $i = Nx - 1$ temos a fórmula para a função tem a forma

$$k_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{16}(k_{i-3}^n - 5k_{i-2}^n + 15k_{i-1}^n + 5k_i^n) \quad (3.31)$$

Assim, a fórmula para o termo difusivo se torna

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_i^n &= \frac{(k_{i-3}^n - 5k_{i-2}^n + 15k_{i-1}^n + 5k_i^n)(T_{i-1}^n - T_i^n)}{16\Delta x^2} \\ &+ \frac{(k_{i-2}^n - 5k_{i-1}^n + 15k_i^n + 5k_{i+1}^n)(T_{i+1}^n - T_i^n)}{16\Delta x^2} \end{aligned} \quad (3.32)$$

E fórmula para o número de onda modificado tem a forma

$$\bar{K} = 2(\cos(\Delta x K) - 1) \quad (3.33)$$

Por fim, a terceira formulação aumenta para quarta ordem tanto a função quanto a primeira derivada interna. Então, para $3 \leq i \leq Nx - 1$, a fórmula para função tem a forma

$$k_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{16}(-k_{i-2}^n + 9k_{i-1}^n + 9k_i^n - k_{i+1}^n), \quad (3.34)$$

e a fórmula para a primeira derivada interna tem a forma

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{T_{i-2}^n - 27T_{i-1}^n + 27T_i^n - T_{i+1}^n}{24\Delta x} \quad (3.35)$$

Portanto, a fórmula o termo difusivo tem a forma

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n &= \frac{(k_{i-2}^n - 9k_{i-1}^n - 9k_i^n + k_{i+1}^n)(T_{i-2}^n - 27T_{i-1}^n + 27T_i^n - T_{i+1}^n)}{384\Delta x^2} \\ &- \frac{(k_{i-1}^n - 9k_i^n - 9k_{i+1}^n + k_{i+2}^n)(T_{i-1}^n - 27T_i^n + 27T_{i+1}^n - T_{i+2}^n)}{384\Delta x^2} \end{aligned} \quad (3.36)$$

De igual forma, para os pontos $i = 2$ e $i = Nx - 1$ usamos discretizações parcialmente avançadas atrasadas. Assim, para $i = 2$, a fórmula para função tem a forma

$$k_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{16}(5k_{i-1}^n + 15k_i^n - 5k_{i+1}^n + k_{i+2}^n), \quad (3.37)$$

e a fórmula para a primeira derivada interna tem a forma

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (3.38)$$

Daí, a fórmula para o termo difusivo se torna

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n &= \frac{(5k_{i-1}^n + 15k_i^n - 5k_{i+1}^n + k_{i+2}^n)(23T_{i-1}^n - 21T_i^n - 3T_{i+1}^n + T_{i+2}^n)}{384\Delta x^2} \\ &- \frac{(5k_i^n + 15k_{i+1}^n - 5k_{i+2}^n + k_{i+3}^n)(23T_i^n - 21T_{i+1}^n - 3T_{i+2}^n + T_{i+3}^n)}{384\Delta x^2} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Para $i = Nx - 1$ a fórmula para a função é dada por

$$k_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{16}(k_{i-3}^n + 5(-k_{i-2}^n + 3k_{i-1}^n + k_i^n)), \quad (3.40)$$

e a fórmula para a primeira derivada interna tem a forma

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{T_{i-3}^n - 3T_{i-2}^n - 21T_{i-1}^n + 23T_i^n}{24\Delta x} \quad (3.41)$$

Assim, a fórmula para o termo difusivo tem a forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_i^n &= \frac{(-k_{i-3}^n + 5k_{i-2}^n - 15k_{i-1}^n - 5k_i^n)(T_{i-3}^n - 3T_{i-2}^n - 21T_{i-1}^n + 23T_i^n)}{384\Delta x^2} \\ &+ \frac{(k_{i-2}^n - 5k_{i-1}^n + 15k_i^n + 5k_{i+1}^n)(T_{i-2}^n - 3T_{i-1}^n - 21T_i^n + 23T_{i+1}^n)}{384\Delta x^2} \end{aligned} \quad (3.42)$$

E fórmula para o número de onda modificado é

$$\frac{1}{3} \text{sen}^2 \left(\frac{\Delta x K}{2} \right) (\cos(\Delta x K) - 13) \quad (3.43)$$

3.2.2 FORMULAÇÕES DE QUARTA ORDEM

3.2.2.1 FORMULAÇÃO CONSERVATIVA DE VOLUMES FINITOS DE ZINGG & PULLIAM

Para formulação de quarta ordem, tomamos como referência a formulação conservativa de ZINGG (2000), que usa quarta ordem na função e nas duas derivadas (interna e externa). Onde a derivada externa tem a forma

$$\frac{\partial E}{\partial x} \Big|_i^n = \frac{E_{i-\frac{3}{2}}^n - 27E_{i-\frac{1}{2}}^n + 27E_{i+\frac{1}{2}}^n - E_{i+\frac{3}{2}}^n}{24\Delta x}, \quad (3.44)$$

a fórmula para a função tem a forma

$$k_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{16}(-k_{i-2}^n + 9k_{i-1}^n + 9k_i^n - k_{i+1}^n) \quad (3.45)$$

e a fórmula para a primeira derivada interna tem a forma

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{T_{i-2}^n - 27T_{i-1}^n + 27T_i^n - T_{i+1}^n}{24\Delta x} \quad (3.46)$$

E a fórmula para o número de onda modificado é

$$\bar{K} = -\frac{1}{144} \left(\sin \left(\frac{3\Delta x K}{2} \right) - 27 \sin \left(\frac{\Delta x K}{2} \right) \right)^2 \quad (3.47)$$

3.2.2.2 FORMULAÇÃO CONSERVATIVA DE VOLUMES FINITOS SA

A partir da formulação de ZINGG (2000), construímos três formulações (SA4(2), SA4(3) e SA4(4)). A formulação SA4(2) aumenta para sexta ordem apenas a primeira derivada interna; para manter a simetria, pois quinta ordem não é simétrico. Assim, a primeira derivada interna tem a forma

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{-9T_{i-3}^n + 125T_{i-2}^n - 2250T_{i-1}^n + 2250T_i^n - 125T_{i+1}^n + 9T_{i+2}^n}{1920\Delta x} \quad (3.48)$$

onde $5 \leq i \leq Nx - 4$.

Daí, a fórmula para o termo difusivo é dada por

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n &= ((k_{i-3}^n - 9k_{i-2}^n - 9k_{i-1}^n + k_i^n) \\
&\cdot (9T_{i-4}^n - 125T_{i-3}^n + 2250T_{i-2}^n - 2250T_{i-1}^n + 125T_i^n - 9T_{i+1}^n) \\
&- 27(k_{i-2}^n - 9k_{i-1}^n - 9k_i^n + k_{i+1}^n) \\
&\cdot (9T_{i-3}^n - 125T_{i-2}^n + 2250T_{i-1}^n - 2250T_i^n + 125T_{i+1}^n - 9T_{i+2}^n) \\
&+ 27(k_{i-1}^n - 9k_i^n - 9k_{i+1}^n + k_{i+2}^n) \\
&\cdot (9T_{i-2}^n - 125T_{i-1}^n + 2250T_i^n - 2250T_{i+1}^n + 125T_{i+2}^n - 9T_{i+3}^n) \\
&+ (k_i^n - 9k_{i+1}^n - 9k_{i+2}^n + k_{i+3}^n) \\
&\cdot (-9T_{i-1}^n + 125T_i^n - 2250T_{i+1}^n + 2250T_{i+2}^n - 125T_{i+3}^n + 9T_{i+4}^n))/737280\Delta x^2
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Nos pontos próximo ao contorno voltamos para quinta ordem na derivada interna.

Então, para $i = 2$, a fórmula para a derivada interna tem a forma

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{-1689T_{i-1}^n + 1005T_i^n + 1430T_{i+1}^n - 1110T_{i+2}^n + 435T_{i+3}^n - 71T_{i+4}^n}{1920\Delta x} \tag{3.50}$$

Daí, a fórmula para o termo difusivo se torna

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n &= (22(5k_{i-1}^n + 15k_i^n - 5k_{i+1}^n + k_{i+2}^n) \\
&\cdot (1689T_{i-1}^n - 1005T_i^n - 1430T_{i+1}^n + 1110T_{i+2}^n - 435T_{i+3}^n + 71T_{i+4}^n) \\
&+ 17(5k_i^n + 15k_{i+1}^n - 5k_{i+2}^n + k_{i+3}^n) \\
&\cdot (-1689T_i^n + 1005T_{i+1}^n + 1430T_{i+2}^n - 1110T_{i+3}^n + 435T_{i+4}^n - 71T_{i+5}^n) \\
&+ 9(5k_{i+1}^n + 15k_{i+2}^n - 5k_{i+3}^n + k_{i+4}^n) \\
&\cdot (-1689T_{i+1}^n + 1005T_{i+2}^n + 1430T_{i+3}^n - 1110T_{i+4}^n + 435T_{i+5}^n - 71T_{i+6}^n) \\
&+ 5(5k_{i+2}^n + 15k_{i+3}^n - 5k_{i+4}^n + k_{i+5}^n) \\
&\cdot (1689T_{i+2}^n - 1005T_{i+3}^n - 1430T_{i+4}^n + 1110T_{i+5}^n - 435T_{i+6}^n + 71T_{i+7}^n) \\
&+ (5k_{i+3}^n + 15k_{i+4}^n - 5k_{i+5}^n + k_{i+6}^n) \\
&\cdot (-1689T_{i+3}^n + 1005T_{i+4}^n + 1430T_{i+5}^n - 1110T_{i+6}^n + 435T_{i+7}^n - 71T_{i+8}^n))/737280\Delta x^2
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Para $i = 3$ a fórmula para derivada interna é tem a forma

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{71T_{i-2}^n - 2115T_{i-1}^n + 2070T_i^n + 10T_{i+1}^n - 45T_{i+2}^n + 9T_{i+3}^n}{1920\Delta x} \tag{3.52}$$

Então, a fórmula para o termo difusivo é dada por

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n &= (22(k_{i-2}^n - 9k_{i-1}^n - 9k_i^n + k_{i+1}^n) \\
&\cdot (71T_{i-2}^n - 2115T_{i-1}^n + 2070T_i^n + 10T_{i+1}^n - 45T_{i+2}^n + 9T_{i+3}^n) \\
&- 17(k_{i-1}^n - 9k_i^n - 9k_{i+1}^n + k_{i+2}^n) \\
&\cdot (71T_{i-1}^n - 2115T_i^n + 2070T_{i+1}^n + 10T_{i+2}^n - 45T_{i+3}^n + 9T_{i+4}^n) \\
&- 9(k_i^n - 9k_{i+1}^n - 9k_{i+2}^n + k_{i+3}^n) \\
&\cdot (71T_i^n - 2115T_{i+1}^n + 2070T_{i+2}^n + 10T_{i+3}^n - 45T_{i+4}^n + 9T_{i+5}^n) \\
&+ 5(k_{i+1}^n - 9k_{i+2}^n - 9k_{i+3}^n + k_{i+4}^n) \\
&\cdot (71T_{i+1}^n - 2115T_{i+2}^n + 2070T_{i+3}^n + 10T_{i+4}^n - 45T_{i+5}^n + 9T_{i+6}^n) \\
&- (k_{i+2}^n - 9k_{i+3}^n - 9k_{i+4}^n + k_{i+5}^n) \\
&\cdot (71T_{i+2}^n - 2115T_{i+3}^n + 2070T_{i+4}^n + 10T_{i+5}^n - 45T_{i+6}^n + 9T_{i+7}^n))/737280\Delta x^2
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Agora, para $i = 4$, a fórmula para a derivada interna é dada por

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{-9T_{i-3}^n + 125T_{i-2}^n - 2250T_{i-1}^n + 2250T_i^n - 125T_{i+1}^n + 9T_{i+2}^n}{1920\Delta x} \tag{3.54}$$

A fórmula para o termo difusivo é então

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n &= ((k_{i-3}^n - 9k_{i-2}^n - 9k_{i-1}^n + k_i^n) \\
&\cdot (9T_{i-4}^n - 125T_{i-3}^n + 2250T_{i-2}^n - 2250T_{i-1}^n + 125T_i^n - 9T_{i+1}^n) \\
&- 27(k_{i-2}^n - 9k_{i-1}^n - 9k_i^n + k_{i+1}^n) \\
&\cdot (9T_{i-3}^n - 125T_{i-2}^n + 2250T_{i-1}^n - 2250T_i^n + 125T_{i+1}^n - 9T_{i+2}^n) \\
&+ 27(k_{i-1}^n - 9k_i^n - 9k_{i+1}^n + k_{i+2}^n) \\
&\cdot (9T_{i-2}^n - 125T_{i-1}^n + 2250T_i^n - 2250T_{i+1}^n + 125T_{i+2}^n - 9T_{i+3}^n) \\
&+ (k_i^n - 9k_{i+1}^n - 9k_{i+2}^n + k_{i+3}^n) \\
&\cdot (-9T_{i-1}^n + 125T_i^n - 2250T_{i+1}^n + 2250T_{i+2}^n - 125T_{i+3}^n + 9T_{i+4}^n))/737280\Delta x^2
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Para $i = Nx - 3$, a fórmula para a derivada interna tem a forma

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{-9T_{i-4}^n + 45T_{i-3}^n - 10T_{i-2}^n - 2070T_{i-1}^n + 2115T_i^n - 71T_{i+1}^n}{1920\Delta x} \tag{3.56}$$

Assim, a fórmula para o termo difusivo se dá por:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n &= ((k_{i-3}^n - 9k_{i-2}^n - 9k_{i-1}^n + k_i^n) \\
&\cdot (9T_{i-5}^n - 45T_{i-4}^n + 10T_{i-3}^n + 2070T_{i-2}^n - 2115T_{i-1}^n + 71T_i^n) \\
&- 27(k_{i-2}^n - 9k_{i-1}^n - 9k_i^n + k_{i+1}^n) \\
&\cdot (9T_{i-4}^n - 45T_{i-3}^n + 10T_{i-2}^n + 2070T_{i-1}^n - 2115T_i^n + 71T_{i+1}^n) \\
&+ 27(k_{i-1}^n - 9k_i^n - 9k_{i+1}^n + k_{i+2}^n) \\
&\cdot (9T_{i-3}^n - 45T_{i-2}^n + 10T_{i-1}^n + 2070T_i^n - 2115T_{i+1}^n + 71T_{i+2}^n) \\
&- (k_i^n - 9k_{i+1}^n - 9k_{i+2}^n + k_{i+3}^n) \\
&\cdot (9T_{i-2}^n - 45T_{i-1}^n + 10T_i^n + 2070T_{i+1}^n - 2115T_{i+2}^n + 71T_{i+3}^n))/737280\Delta x^2
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Continuando, com $i = Nx - 2$, a fórmula para a derivada interna é:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{-9T_{i-4}^n + 45T_{i-3}^n - 10T_{i-2}^n - 2070T_{i-1}^n + 2115T_i^n - 71T_{i+1}^n}{1920\Delta x} \tag{3.58}$$

Logo, a fórmula para o termo difusivo é dada por

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n &= ((-k_{i-5}^n + 9k_{i-4}^n + 9k_{i-3}^n - k_{i-2}^n) \\
&\cdot (9T_{i-7}^n - 45T_{i-6}^n + 10T_{i-5}^n + 2070T_{i-4}^n - 2115T_{i-3}^n + 71T_{i-2}^n) \\
&+ 5(k_{i-4}^n - 9k_{i-3}^n - 9k_{i-2}^n + k_{i-1}^n) \\
&\cdot (9T_{i-6}^n - 45T_{i-5}^n + 10T_{i-4}^n + 2070T_{i-3}^n - 2115T_{i-2}^n + 71T_{i-1}^n) \\
&- 9(k_{i-3}^n - 9k_{i-2}^n - 9k_{i-1}^n + k_i^n) \\
&\cdot (9T_{i-5}^n - 45T_{i-4}^n + 10T_{i-3}^n + 2070T_{i-2}^n - 2115T_{i-1}^n + 71T_i^n) \\
&- 17(k_{i-2}^n - 9k_{i-1}^n - 9k_i^n + k_{i+1}^n) \\
&\cdot (9T_{i-4}^n - 45T_{i-3}^n + 10T_{i-2}^n + 2070T_{i-1}^n - 2115T_i^n + 71T_{i+1}^n) \\
&+ 22(k_{i-1}^n - 9k_i^n - 9k_{i+1}^n + k_{i+2}^n) \\
&\cdot (9T_{i-3}^n - 45T_{i-2}^n + 10T_{i-1}^n + 2070T_i^n - 2115T_{i+1}^n + 71T_{i+2}^n))/737280\Delta x^2
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Finalizando essa formulação, para $i = Nx - 1$, temos a fórmula para a derivada interna:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{71T_{i-5}^n - 435T_{i-4}^n + 1110T_{i-3}^n - 1430T_{i-2}^n - 1005T_{i-1}^n + 1689T_i^n}{1920\Delta x} \tag{3.60}$$

Então, a fórmula para o termo difusivo é:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n &= ((-k_{i-6}^n - 5(-k_{i-5}^n + 3k_{i-4}^n + k_{i-3}^n)) \\
&\cdot (71T_{i-8}^n - 435T_{i-7}^n + 1110T_{i-6}^n - 1430T_{i-5}^n - 1005T_{i-4}^n + 1689T_{i-3}^n) \\
&+ 5(k_{i-5}^n + 5(-k_{i-4}^n + 3k_{i-3}^n + k_{i-2}^n)) \\
&\cdot (71T_{i-7}^n - 435T_{i-6}^n + 1110T_{i-5}^n - 1430T_{i-4}^n - 1005T_{i-3}^n + 1689T_{i-2}^n) \\
&- 9(k_{i-4}^n + 5(-k_{i-3}^n + 3k_{i-2}^n + k_{i-1}^n)) \\
&\cdot (71T_{i-6}^n - 435T_{i-5}^n + 1110T_{i-4}^n - 1430T_{i-3}^n - 1005T_{i-2}^n + 1689T_{i-1}^n) \\
&- 17(k_{i-3}^n + 5(-k_{i-2}^n + 3k_{i-1}^n + k_i^n)) \\
&\cdot (71T_{i-5}^n - 435T_{i-4}^n + 1110T_{i-3}^n - 1430T_{i-2}^n - 1005T_{i-1}^n + 1689T_i^n) \\
&+ 22(k_{i-2}^n + 5(-k_{i-1}^n + 3k_i^n + k_{i+1}^n)) \\
&\cdot (71T_{i-4}^n - 435T_{i-3}^n + 1110T_{i-2}^n - 1430T_{i-1}^n - 1005T_i^n + 1689T_{i+1}^n))/737280\Delta x^2
\end{aligned} \tag{3.61}$$

E fórmula para o número de onda modificado tem a forma

$$\bar{K} = \frac{\text{sen}^2\left(\frac{\Delta x K}{2}\right) (5159 \cos(\Delta x K) - 350 \cos(2\Delta x K) + 9 \cos(3\Delta x K) - 27858)}{5760} \tag{3.62}$$

A formulação SA4(3) aumenta para sexta ordem apenas a função. Onde a fórmula para função tem a forma

$$k_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{256}(3k_{i-3}^n - 25k_{i-2}^n + 150k_{i-1}^n + 150k_i^n - 25k_{i+1}^n + 3k_{i+2}^n) \tag{3.63}$$

onde $5 \leq i \leq Nx - 4$.

Assim, a fórmula para o termo difusivo é dada por

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n &= ((3k_{i-4}^n - 25k_{i-3}^n + 150k_{i-2}^n + 150k_{i-1}^n - 25k_i^n + 3k_{i+1}^n) \\
&\cdot (T_{i-3}^n - 27T_{i-2}^n + 27T_{i-1}^n - T_i^n) \\
&- 27(3k_{i-3}^n - 25k_{i-2}^n + 150k_{i-1}^n + 150k_i^n - 25k_{i+1}^n + 3k_{i+2}^n) \\
&\cdot (T_{i-2}^n - 27T_{i-1}^n + 27T_i^n - T_{i+1}^n) \\
&+ 27(3k_{i-2}^n - 25k_{i-1}^n + 150k_i^n + 150k_{i+1}^n - 25k_{i+2}^n + 3k_{i+3}^n) \\
&\cdot (T_{i-1}^n - 27T_i^n + 27T_{i+1}^n - T_{i+2}^n) \\
&- (3k_{i-1}^n - 25k_i^n + 150k_{i+1}^n + 150k_{i+2}^n - 25k_{i+3}^n + 3k_{i+4}^n) \\
&\cdot (T_i^n - 27T_{i+1}^n + 27T_{i+2}^n - T_{i+3}^n))/147456\Delta x^2
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Nos pontos próximo ao contorno continuamos com sexta ordem na função. Então, para $i = 2$, a fórmula para a função tem a forma

$$k_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{256}(63k_{i-1}^n + 315k_i^n - 210k_{i+1}^n + 126k_{i+2}^n - 45k_{i+3}^n + 7k_{i+4}^n) \tag{3.65}$$

Assim, a fórmula para o termo difusivo é dada por

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n &= (-22(63k_{i-1}^n + 315k_i^n - 210k_{i+1}^n + 126k_{i+2}^n - 45k_{i+3}^n + 7k_{i+4}^n) \\
&\cdot (-22T_{i-1}^n + 17T_i^n + 9T_{i+1}^n - 5T_{i+2}^n + T_{i+3}^n) \\
&+ 17(63k_i^n + 315k_{i+1}^n - 210k_{i+2}^n + 126k_{i+3}^n - 45k_{i+4}^n + 7k_{i+5}^n) \\
&\cdot (-22T_i^n + 17T_{i+1}^n + 9T_{i+2}^n - 5T_{i+3}^n + T_{i+4}^n) \\
&+ 9(63k_{i+1}^n + 315k_{i+2}^n - 210k_{i+3}^n + 126k_{i+4}^n - 45k_{i+5}^n + 7k_{i+6}^n) \quad (3.66) \\
&\cdot (-22T_{i+1}^n + 17T_{i+2}^n + 9T_{i+3}^n - 5T_{i+4}^n + T_{i+5}^n) \\
&- 5(63k_{i+2}^n + 315k_{i+3}^n - 210k_{i+4}^n + 126k_{i+5}^n - 45k_{i+6}^n + 7k_{i+7}^n) \\
&\cdot (-22T_{i+2}^n + 17T_{i+3}^n + 9T_{i+4}^n - 5T_{i+5}^n + T_{i+6}^n) \\
&+ (63k_{i+3}^n + 315k_{i+4}^n - 210k_{i+5}^n + 126k_{i+6}^n - 45k_{i+7}^n + 7k_{i+8}^n) \\
&\cdot (-22T_{i+3}^n + 17T_{i+4}^n + 9T_{i+5}^n - 5T_{i+6}^n + T_{i+7}^n))/147456\Delta x^2
\end{aligned}$$

Para $i = 3$ a fórmula para a função é dada por

$$k_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{256}(-7k_{i-2}^n + 105k_{i-1}^n + 210k_i^n - 70k_{i+1}^n + 21k_{i+2}^n - 3k_{i+3}^n) \quad (3.67)$$

Então a fórmula para o termo difusivo é dada por

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n &= (22(7k_{i-2}^n - 105k_{i-1}^n - 210k_i^n + 70k_{i+1}^n - 21k_{i+2}^n + 3k_{i+3}^n) \\
&\cdot (T_{i-2}^n - 27T_{i-1}^n + 27T_i^n - T_{i+1}^n) \\
&+ 17(-7k_{i-1}^n + 105k_i^n + 210k_{i+1}^n - 70k_{i+2}^n + 21k_{i+3}^n - 3k_{i+4}^n) \\
&\cdot (T_{i-1}^n - 27T_i^n + 27T_{i+1}^n - T_{i+2}^n) \\
&+ 9(-7k_i^n + 105k_{i+1}^n + 210k_{i+2}^n - 70k_{i+3}^n + 21k_{i+4}^n - 3k_{i+5}^n) \quad (3.68) \\
&\cdot (T_i^n - 27T_{i+1}^n + 27T_{i+2}^n - T_{i+3}^n) \\
&+ 5(7k_{i+1}^n - 105k_{i+2}^n - 210k_{i+3}^n + 70k_{i+4}^n - 21k_{i+5}^n + 3k_{i+6}^n) \\
&\cdot (T_{i+1}^n - 27T_{i+2}^n + 27T_{i+3}^n - T_{i+4}^n) \\
&+ (-7k_{i+2}^n + 105k_{i+3}^n + 210k_{i+4}^n - 70k_{i+5}^n + 21k_{i+6}^n - 3k_{i+7}^n) \\
&\cdot (T_{i+2}^n - 27T_{i+3}^n + 27T_{i+4}^n - T_{i+5}^n))/147456\Delta x^2
\end{aligned}$$

Agora, para $i = 4$, a fórmula para a função é dada por

$$k_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{256}(-7k_{i-2}^n + 105k_{i-1}^n + 210k_i^n - 70k_{i+1}^n + 21k_{i+2}^n - 3k_{i+3}^n) \quad (3.69)$$

Daí, a fórmula para o termo difusivo tem a forma

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n &= ((-7k_{i-3}^n + 105k_{i-2}^n + 210k_{i-1}^n - 70k_i^n + 21k_{i+1}^n - 3k_{i+2}^n) \\
&\cdot (T_{i-3}^n - 27T_{i-2}^n + 27T_{i-1}^n - T_i^n) \\
&+ 27(7k_{i-2}^n - 105k_{i-1}^n - 210k_i^n + 70k_{i+1}^n - 21k_{i+2}^n + 3k_{i+3}^n) \\
&\cdot (T_{i-2}^n - 27T_{i-1}^n + 27T_i^n - T_{i+1}^n) \\
&+ 27(-7k_{i-1}^n + 105k_i^n + 210k_{i+1}^n - 70k_{i+2}^n + 21k_{i+3}^n - 3k_{i+4}^n) \\
&\cdot (T_{i-1}^n - 27T_i^n + 27T_{i+1}^n - T_{i+2}^n) \\
&+ (7k_i^n - 105k_{i+1}^n - 210k_{i+2}^n + 70k_{i+3}^n - 21k_{i+4}^n + 3k_{i+5}^n) \\
&\cdot (T_i^n - 27T_{i+1}^n + 27T_{i+2}^n - T_{i+3}^n))/147456\Delta x^2
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Para $i = Nx - 3$, a fórmula para a função tem a forma

$$k_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{256}(7(3k_{i-3}^n - 10k_{i-2}^n + 30k_{i-1}^n + 15k_i^n - k_{i+1}^n - 3k_{i-4}^n)) \tag{3.71}$$

Assim, a fórmula para o termo difusivo se dá por

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n &= ((7(3k_{i-4}^n - 10k_{i-3}^n + 30k_{i-2}^n + 15k_{i-1}^n - k_i^n) - 3k_{i-5}^n) \\
&\cdot (T_{i-3}^n - 27T_{i-2}^n + 27T_{i-1}^n - T_i^n) \\
&+ 27(3k_{i-4}^n - 7(3k_{i-3}^n - 10k_{i-2}^n + 30k_{i-1}^n + 15k_i^n - k_{i+1}^n)) \\
&\cdot (T_{i-2}^n - 27T_{i-1}^n + 27T_i^n - T_{i+1}^n) \\
&+ 27(7(3k_{i-2}^n - 10k_{i-1}^n + 30k_i^n + 15k_{i+1}^n - k_{i+2}^n) - 3k_{i-3}^n) \\
&\cdot (T_{i-1}^n - 27T_i^n + 27T_{i+1}^n - T_{i+2}^n) \\
&+ (3k_{i-2}^n - 7(3k_{i-1}^n - 10k_i^n + 30k_{i+1}^n + 15k_{i+2}^n - k_{i+3}^n)) \\
&\cdot (T_i^n - 27T_{i+1}^n + 27T_{i+2}^n - T_{i+3}^n))/147456\Delta x^2
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Continuando, com $i = Nx - 2$, a fórmula para a função tem a forma

$$k_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{256}(7(3k_{i-3}^n - 10k_{i-2}^n + 30k_{i-1}^n + 15k_i^n - k_{i+1}^n) - 3k_{i-4}^n) \tag{3.73}$$

Logo a fórmula para o termo difusivo é dada por:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n &= ((3k_{i-7}^n - 7(3k_{i-6}^n - 10k_{i-5}^n + 30k_{i-4}^n + 15k_{i-3}^n - k_{i-2}^n)) \\
&\cdot (T_{i-5} - 27T_{i-4} + 27T_{i-3} - T_{i-2}) \\
&+ 5(7(3k_{i-5}^n - 10k_{i-4}^n + 30k_{i-3}^n + 15k_{i-2}^n - k_{i-1}^n) - 3k_{i-6}^n) \\
&\cdot (T_{i-4} - 27T_{i-3} + 27T_{i-2} - T_{i-1}) \\
&+ 9(3k_{i-5}^n - 7(3k_{i-4}^n - 10k_{i-3}^n + 30k_{i-2}^n + 15k_{i-1}^n - k_i^n)) \\
&\cdot (T_{i-3} - 27T_{i-2} + 27T_{i-1} - T_i) \\
&+ 17(3k_{i-4}^n - 7(3k_{i-3}^n - 10k_{i-2}^n + 30k_{i-1}^n + 15k_i^n - k_{i+1}^n)) \\
&\cdot (T_{i-2} - 27T_{i-1} + 27T_i - T_{i+1}) \\
&+ 22(7(3k_{i-2}^n - 10k_{i-1}^n + 30k_i^n + 15k_{i+1}^n - k_{i+2}^n) - 3k_{i-3}^n) \\
&\cdot (T_{i-1} - 27T_i + 27T_{i+1} - T_{i+2}))/147456\Delta x^2
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Finalizando essa formulação, para $i = Nx - 1$, a fórmula para a função é dada por

$$k_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{256}(7k_{i-5}^n - 45k_{i-4}^n + 21(6k_{i-3}^n - 10k_{i-2}^n + 15k_{i-1}^n + 3k_i^n)) \tag{3.75}$$

Então a fórmula para o termo difusivo tem a forma

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial T^n}{\partial x} \right|_i &= ((7k_{i-8}^n - 45k_{i-7}^n + 21(6k_{i-6}^n - 10k_{i-5}^n + 15k_{i-4}^n + 3k_{i-3}^n)) \\
&\cdot (T_{i-7}^n - 5T_{i-6}^n + 9T_{i-5}^n + 17T_{i-4}^n - 22T_{i-3}^n) \\
&- 5(7k_{i-7}^n - 45k_{i-6}^n + 21(6k_{i-5}^n - 10k_{i-4}^n + 15k_{i-3}^n + 3k_{i-2}^n)) \\
&\cdot (T_{i-6}^n - 5T_{i-5}^n + 9T_{i-4}^n + 17T_{i-3}^n - 22T_{i-2}^n) \\
&+ 9(7k_{i-6}^n - 45k_{i-5}^n + 21(6k_{i-4}^n - 10k_{i-3}^n + 15k_{i-2}^n + 3k_{i-1}^n)) \\
&\cdot (T_{i-5}^n - 5T_{i-4}^n + 9T_{i-3}^n + 17T_{i-2}^n - 22T_{i-1}^n) \\
&+ 17(7k_{i-5}^n - 45k_{i-4}^n + 21(6k_{i-3}^n - 10k_{i-2}^n + 15k_{i-1}^n + 3k_i^n)) \\
&\cdot (T_{i-4}^n - 5T_{i-3}^n + 9T_{i-2}^n + 17T_{i-1}^n - 22T_i^n) \\
&- 22(7k_{i-4}^n - 45k_{i-3}^n + 21(6k_{i-2}^n - 10k_{i-1}^n + 15k_i^n + 3k_{i+1}^n)) \\
&\cdot (T_{i-3}^n - 5T_{i-2}^n + 9T_{i-1}^n + 17T_i^n - 22T_{i+1}^n))/147456\Delta x^2
\end{aligned} \tag{3.76}$$

E a fórmula para o número de onda modificado é

$$\bar{K} = -\frac{1}{144} \left(\text{sen} \left(\frac{3\Delta x K}{2} \right) - 27 \text{sen} \left(\frac{\Delta x K}{2} \right) \right)^2 \tag{3.78}$$

Finalizando, a formulação SA4(4) aumenta para sexta ordem tanto na função quanto na primeira derivada interna. Ou seja, para $5 \leq i \leq Nx - 4$, a fórmula para função tem a forma

$$k_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{256}(3k_{i-3}^n - 25k_{i-2}^n + 150k_{i-1}^n + 150k_i^n - 25k_{i+1}^n + 3k_{i+2}^n) \tag{3.79}$$

e a fórmula para a primeira derivada interna tem a forma

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{-9T_{i-3}^n + 125T_{i-2}^n - 2250T_{i-1}^n + 2250T_i^n - 125T_{i+1}^n + 9T_{i+2}^n}{1920\Delta x} \quad (3.80)$$

Assim, a fórmula para o termo difusivo é dada por

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T^n}{\partial x} \right|_i &= ((3k_{i-4}^n - 25k_{i-3}^n + 150k_{i-2}^n + 150k_{i-1}^n - 25k_i^n + 3k_{i+1}^n) \\ &\cdot (-9T_{i-4}^n + 125T_{i-3}^n - 2250T_{i-2}^n + 2250T_{i-1}^n - 125T_i^n + 9T_{i+1}^n) \\ &+ 27(3k_{i-3}^n - 25k_{i-2}^n + 150k_{i-1}^n + 150k_i^n - 25k_{i+1}^n + 3k_{i+2}^n) \\ &\cdot (9T_{i-3}^n - 125T_{i-2}^n + 2250T_{i-1}^n - 2250T_i^n + 125T_{i+1}^n - 9T_{i+2}^n) \\ &+ 27(3k_{i-2}^n - 25k_{i-1}^n + 150k_i^n + 150k_{i+1}^n - 25k_{i+2}^n + 3k_{i+3}^n) \\ &\cdot (-9T_{i-2}^n + 125T_{i-1}^n - 2250T_i^n + 2250T_{i+1}^n - 125T_{i+2}^n + 9T_{i+3}^n) \\ &+ (3k_{i-1}^n - 25k_i^n + 150k_{i+1}^n + 150k_{i+2}^n - 25k_{i+3}^n + 3k_{i+4}^n) \\ &\cdot (9T_{i-1}^n - 125T_i^n + 2250T_{i+1}^n - 2250T_{i+2}^n + 125T_{i+3}^n - 9T_{i+4}^n)) / 11796480\Delta x^2 \end{aligned} \quad (3.81)$$

Nos pontos perto do contorno voltamos para quinta ordem na derivada interna e continuamos com sexta ordem na função.

Então, para $i = 2$, a fórmula para a função tem a forma

$$k_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{256}(63k_{i-1}^n + 315k_i^n - 210k_{i+1}^n + 126k_{i+2}^n - 45k_{i+3}^n + 7k_{i+4}^n) \quad (3.82)$$

e a fórmula para a derivada interna:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{-1689T_{i-1}^n + 1005T_i^n + 1430T_{i+1}^n - 1110T_{i+2}^n + 435T_{i+3}^n - 71T_{i+4}^n}{1920\Delta x} \quad (3.83)$$

Então a fórmula para o termo difusivo é dada por

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T^n}{\partial x} \right|_i &= (22(63k_{i-1}^n + 315k_i^n - 210k_{i+1}^n + 126k_{i+2}^n - 45k_{i+3}^n + 7k_{i+4}^n) \\ &\cdot (1689T_{i-1}^n - 1005T_i^n - 1430T_{i+1}^n + 1110T_{i+2}^n - 435T_{i+3}^n + 71T_{i+4}^n) \\ &+ 17(63k_i^n + 315k_{i+1}^n - 210k_{i+2}^n + 126k_{i+3}^n - 45k_{i+4}^n + 7k_{i+5}^n) \\ &\cdot (-1689T_i^n + 1005T_{i+1}^n + 1430T_{i+2}^n - 1110T_{i+3}^n + 435T_{i+4}^n - 71T_{i+5}^n) \\ &+ 9(63k_{i+1}^n + 315k_{i+2}^n - 210k_{i+3}^n + 126k_{i+4}^n - 45k_{i+5}^n + 7k_{i+6}^n) \\ &\cdot (-1689T_{i+1}^n + 1005T_{i+2}^n + 1430T_{i+3}^n - 1110T_{i+4}^n + 435T_{i+5}^n - 71T_{i+6}^n) \\ &+ 5(63k_{i+2}^n + 315k_{i+3}^n - 210k_{i+4}^n + 126k_{i+5}^n - 45k_{i+6}^n + 7k_{i+7}^n) \\ &\cdot (1689T_{i+2}^n - 1005T_{i+3}^n - 1430T_{i+4}^n + 1110T_{i+5}^n - 435T_{i+6}^n + 71T_{i+7}^n) \\ &+ (63k_{i+3}^n + 315k_{i+4}^n - 210k_{i+5}^n + 126k_{i+6}^n - 45k_{i+7}^n + 7k_{i+8}^n) \\ &\cdot (-1689T_{i+3}^n + 1005T_{i+4}^n + 1430T_{i+5}^n - 1110T_{i+6}^n + 435T_{i+7}^n - 71T_{i+8}^n)) \\ &/ 11796480\Delta x^2 \end{aligned} \quad (3.84)$$

Para $i = 3$ a fórmula para a função tem a forma

$$k_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{256}(-7k_{i-2}^n + 105k_{i-1}^n + 210k_i^n - 70k_{i+1}^n + 21k_{i+2}^n - 3k_{i+3}^n) \quad (3.85)$$

E a derivada interna é dada por:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{71T_{i-2}^n - 2115T_{i-1}^n + 2070T_i^n + 10T_{i+1}^n - 45T_{i+2}^n + 9T_{i+3}^n}{1920\Delta x} \quad (3.86)$$

Então a fórmula para o termo difusivo é dada por:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T^n}{\partial x} \right|_i &= (22(7k_{i-2}^n - 105k_{i-1}^n - 210k_i^n + 70k_{i+1}^n - 21k_{i+2}^n + 3k_{i+3}^n) \\ &\cdot (71T_{i-2}^n - 2115T_{i-1}^n + 2070T_i^n + 10T_{i+1}^n - 45T_{i+2}^n + 9T_{i+3}^n) \\ &+ 17(-7k_{i-1}^n + 105k_i^n + 210k_{i+1}^n - 70k_{i+2}^n + 21k_{i+3}^n - 3k_{i+4}^n) \\ &\cdot (71T_{i-1}^n - 2115T_i^n + 2070T_{i+1}^n + 10T_{i+2}^n - 45T_{i+3}^n + 9T_{i+4}^n) \\ &+ 9(-7k_i^n + 105k_{i+1}^n + 210k_{i+2}^n - 70k_{i+3}^n + 21k_{i+4}^n - 3k_{i+5}^n) \\ &\cdot (71T_i^n - 2115T_{i+1}^n + 2070T_{i+2}^n + 10T_{i+3}^n - 45T_{i+4}^n + 9T_{i+5}^n) \\ &+ 5(7k_{i+1}^n - 105k_{i+2}^n - 210k_{i+3}^n + 70k_{i+4}^n - 21k_{i+5}^n + 3k_{i+6}^n) \\ &\cdot (71T_{i+1}^n - 2115T_{i+2}^n + 2070T_{i+3}^n + 10T_{i+4}^n - 45T_{i+5}^n + 9T_{i+6}^n) \\ &+ (-7k_{i+2}^n + 105k_{i+3}^n + 210k_{i+4}^n - 70k_{i+5}^n + 21k_{i+6}^n - 3k_{i+7}^n) \\ &\cdot (71T_{i+2}^n - 2115T_{i+3}^n + 2070T_{i+4}^n + 10T_{i+5}^n - 45T_{i+6}^n + 9T_{i+7}^n))/11796480\Delta x^2 \end{aligned} \quad (3.87)$$

Agora, para $i = 4$, a fórmula para a função é dada por

$$k_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{256}(-7k_{i-2}^n + 105k_{i-1}^n + 210k_i^n - 70k_{i+1}^n + 21k_{i+2}^n - 3k_{i+3}^n) \quad (3.88)$$

e a fórmula para a derivada interna tem a forma

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{62T_{i-2}^n - 2061T_{i-1}^n + 1935T_i^n + 190T_{i+1}^n - 180T_{i+2}^n + 63T_{i+3}^n - 9T_{i+4}^n}{1920\Delta x} \quad (3.89)$$

A fórmula para o termo difusivo é então

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T^n}{\partial x} \right|_i &= ((-7k_{i-3}^n + 105k_{i-2}^n + 210k_{i-1}^n - 70k_i^n + 21k_{i+1}^n - 3k_{i+2}^n) \\ &\cdot (62T_{i-3}^n - 2061T_{i-2}^n + 1935T_{i-1}^n + 190T_i^n - 180T_{i+1}^n + 63T_{i+2}^n - 9T_{i+3}^n) \\ &+ 27(7k_{i-2}^n - 105k_{i-1}^n - 210k_i^n + 70k_{i+1}^n - 21k_{i+2}^n + 3k_{i+3}^n) \\ &\cdot (62T_{i-2}^n - 2061T_{i-1}^n + 1935T_i^n + 190T_{i+1}^n - 180T_{i+2}^n + 63T_{i+3}^n - 9T_{i+4}^n) \\ &+ 27(-7k_{i-1}^n + 105k_i^n + 210k_{i+1}^n - 70k_{i+2}^n + 21k_{i+3}^n - 3k_{i+4}^n) \\ &\cdot (62T_{i-1}^n - 2061T_i^n + 1935T_{i+1}^n + 190T_{i+2}^n - 180T_{i+3}^n + 63T_{i+4}^n - 9T_{i+5}^n) \\ &+ (7k_i^n - 105k_{i+1}^n - 210k_{i+2}^n + 70k_{i+3}^n - 21k_{i+4}^n + 3k_{i+5}^n) \\ &\cdot (62T_i^n - 2061T_{i+1}^n + 1935T_{i+2}^n + 190T_{i+3}^n - 180T_{i+4}^n + 63T_{i+5}^n - 9T_{i+6}^n))/11796480\Delta x^2 \end{aligned} \quad (3.90)$$

Para $i = Nx - 3$, a fórmula para a função é dada por

$$k_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{256}(7(3k_{i-3}^n - 10k_{i-2}^n + 30k_{i-1}^n + 15k_i^n - k_{i+1}^n) - 3k_{i-4}^n) \quad (3.91)$$

e a fórmula para a primeira derivada interna tem a forma

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{-9T_{i-4}^n + 45T_{i-3}^n - 10T_{i-2}^n - 2070T_{i-1}^n + 2115T_i^n - 71T_{i+1}^n}{1920\Delta x} \quad (3.92)$$

Assim, a fórmula para o termo difusivo se dá por

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n &= ((3k_{i-5}^n - 7(3k_{i-4}^n - 10k_{i-3}^n + 30k_{i-2}^n + 15k_{i-1}^n - k_i^n)) \\ &\cdot (9T_{i-5}^n - 45T_{i-4}^n + 10T_{i-3}^n + 2070T_{i-2}^n - 2115T_{i-1}^n + 71T_i^n) \\ &- 27(3k_{i-4}^n - 7(3k_{i-3}^n - 10k_{i-2}^n + 30k_{i-1}^n + 15k_i^n - k_{i+1}^n)) \\ &\cdot (9T_{i-4}^n - 45T_{i-3}^n + 10T_{i-2}^n + 2070T_{i-1}^n - 2115T_i^n + 71T_{i+1}^n) \\ &+ 27(3k_{i-3}^n - 7(3k_{i-2}^n - 10k_{i-1}^n + 30k_i^n + 15k_{i+1}^n - k_{i+2}^n)) \\ &\cdot (9T_{i-3}^n - 45T_{i-2}^n + 10T_{i-1}^n + 2070T_i^n - 2115T_{i+1}^n + 71T_{i+2}^n) \\ &- (3k_{i-2}^n - 7(3k_{i-1}^n - 10k_i^n + 30k_{i+1}^n + 15k_{i+2}^n - k_{i+3}^n)) \\ &\cdot (9T_{i-2}^n - 45T_{i-1}^n + 10T_i^n + 2070T_{i+1}^n - 2115T_{i+2}^n + 71T_{i+3}^n))/11796480\Delta x^2 \end{aligned} \quad (3.93)$$

Continuando, com $i = Nx - 2$, a fórmula para a função é dada por

$$k_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{256}(7(3k_{i-3}^n - 10k_{i-2}^n + 30k_{i-1}^n + 15k_i^n - k_{i+1}^n) - 3k_{i-4}^n) \quad (3.94)$$

e a fórmula da primeira derivada interna tem a forma

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{-9T_{i-4}^n + 45T_{i-3}^n - 10T_{i-2}^n - 2070T_{i-1}^n + 2115T_i^n - 71T_{i+1}^n}{1920\Delta x} \quad (3.95)$$

Logo, a fórmula para o termo difusivo é dada por

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n &= ((7(3k_{i-6}^n - 10k_{i-5}^n + 30k_{i-4}^n + 15k_{i-3}^n - k_{i-2}^n) - 3k_{i-7}^n) \\ &\cdot (9T_{i-7}^n - 45T_{i-6}^n + 10T_{i-5}^n + 2070T_{i-4}^n - 2115T_{i-3}^n + 71T_{i-2}^n) \\ &+ 5(3k_{i-6}^n - 7(3k_{i-5}^n - 10k_{i-4}^n + 30k_{i-3}^n + 15k_{i-2}^n - k_{i-1}^n)) \\ &\cdot (9T_{i-6}^n - 45T_{i-5}^n + 10T_{i-4}^n + 2070T_{i-3}^n - 2115T_{i-2}^n + 71T_{i-1}^n) \\ &- 9(3k_{i-5}^n - 7(3k_{i-4}^n - 10k_{i-3}^n + 30k_{i-2}^n + 15k_{i-1}^n - k_i^n)) \\ &\cdot (9T_{i-5}^n - 45T_{i-4}^n + 10T_{i-3}^n + 2070T_{i-2}^n - 2115T_{i-1}^n + 71T_i^n) \\ &- 17(3k_{i-4}^n - 7(3k_{i-3}^n - 10k_{i-2}^n + 30k_{i-1}^n + 15k_i^n - k_{i+1}^n)) \\ &\cdot (9T_{i-4}^n - 45T_{i-3}^n + 10T_{i-2}^n + 2070T_{i-1}^n - 2115T_i^n + 71T_{i+1}^n) \\ &+ 22(3k_{i-3}^n - 7(3k_{i-2}^n - 10k_{i-1}^n + 30k_i^n + 15k_{i+1}^n - k_{i+2}^n)) \\ &\cdot (9T_{i-3}^n - 45T_{i-2}^n + 10T_{i-1}^n + 2070T_i^n - 2115T_{i+1}^n + 71T_{i+2}^n))/11796480\Delta x^2 \end{aligned} \quad (3.96)$$

Finalizando essa última formulação, para $i = Nx - 1$, a fórmula para a função tem a forma

$$k_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{256}(7k_{i-5}^n - 45k_{i-4}^n + 21(6k_{i-3}^n - 10k_{i-2}^n + 15k_{i-1}^n + 3k_i^n)) \quad (3.97)$$

e a fórmula para a primeira derivada interna é dada por

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{71T_{i-5}^n - 435T_{i-4}^n + 1110T_{i-3}^n - 1430T_{i-2}^n - 1005T_{i-1}^n + 1689T_i^n}{1920\Delta x} \quad (3.98)$$

Então a fórmula para o termo difusivo é tem a forma

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n &= ((-7k_{i-8}^n + 45k_{i-7}^n - 21(6k_{i-6}^n - 10k_{i-5}^n + 3(5k_{i-4}^n + k_{i-3}^n)))) \\ &\cdot (71T_{i-8}^n - 435T_{i-7}^n + 1110T_{i-6}^n - 1430T_{i-5}^n - 1005T_{i-4}^n + 1689T_{i-3}^n) \\ &+ 5(7k_{i-7}^n - 45k_{i-6}^n + 21(6k_{i-5}^n - 10k_{i-4}^n + 15k_{i-3}^n + 3k_{i-2}^n)) \\ &\cdot (71T_{i-7}^n - 435T_{i-6}^n + 1110T_{i-5}^n - 1430T_{i-4}^n - 1005T_{i-3}^n + 1689T_{i-2}^n) \\ &+ 9(-7k_{i-6}^n + 45k_{i-5}^n - 21(6k_{i-4}^n - 10k_{i-3}^n + 3(5k_{i-2}^n + k_{i-1}^n))) \\ &\cdot (71T_{i-6}^n - 435T_{i-5}^n + 1110T_{i-4}^n - 1430T_{i-3}^n - 1005T_{i-2}^n + 1689T_{i-1}^n) \\ &- 17(7k_{i-5}^n - 45k_{i-4}^n + 21(6k_{i-3}^n - 10k_{i-2}^n + 15k_{i-1}^n + 3k_i^n)) \\ &\cdot (71T_{i-5}^n - 435T_{i-4}^n + 1110T_{i-3}^n - 1430T_{i-2}^n - 1005T_{i-1}^n + 1689T_i^n) \\ &+ 22(7k_{i-4}^n - 45k_{i-3}^n + 21(6k_{i-2}^n - 10k_{i-1}^n + 15k_i^n + 3k_{i+1}^n)) \\ &\cdot (71T_{i-4}^n - 435T_{i-3}^n + 1110T_{i-2}^n - 1430T_{i-1}^n - 1005T_i^n + 1689T_{i+1}^n))/11796480\Delta x^2 \end{aligned} \quad (3.99)$$

E a fórmula para o número de onda modificado é

$$\bar{K} = \frac{\text{sen}^2\left(\frac{\Delta x K}{2}\right) (5159 \cos(\Delta x K) - 350 \cos(2\Delta x K) + 9 \cos(3\Delta x K) - 27858)}{5760} \quad (3.100)$$

4 RESULTADOS

A seguir serão apresentados os resultados obtidos com a simulação da equação (2.5) usando os diferentes esquemas discutidos no capítulo 3. O desempenho destes esquemas serão avaliados com base no parâmetro θ , que controla a magnitude dos gradientes na condutividade térmica e temperatura, e no número de pontos na malha espacial. Os critérios de desempenho utilizados serão o erro, ordem de erro e máximo passo no tempo de cada esquema. Ressaltando que nos gráficos, os resultados foram adimensionalizados.

4.1 ORDEM DE ERRO

4.1.1 FORMULAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM

Formulação Não-Conservativa de Diferenças Finitas

Primeiramente, serão apresentados os resultados de ordem numérica para os métodos de segunda ordem das formulações não-conservativas analítica e numérica.

As tabelas 4.1 e 4.2 mostram claramente o crescimento da derivada com o aumento de θ . Usando o resultado analítico para $\partial k/\partial x$, não há variação de ordem para todos os θ . Contudo, quando o resultado numérico para $\partial k/\partial x$ é utilizado, já é possível observar uma perda de ordem mais significativa a partir de $\theta = 40$. Isso demonstra que o produto das derivadas da propriedade e do potencial é o principal responsável pela perda de ordem na avaliação do termo difusivo quando estas derivadas se tornam significativas.

NÃO-CONSERVATIVO ANALÍTICO		
Valores de θ	Ordem Mínima	Ordem Média
10	1.97566	1.99991
20	1.99523	2.0027
30	1.99737	2.00629
40	1.99889	2.01142
50	2.00452	2.01995
60	2.03583	2.04693

TAB. 4.1: Ordem de Erro mínima e média para malha 101-201-401 pontos, formulação Não-Conservativa Analítica

NÃO-CONSERVATIVO NUMÉRICO		
Valores de θ	Ordem Mínima	Ordem Média
10	1.9945	1.99697
20	1.98401	1.98804
30	1.96724	1.97305
40	1.94532	1.95209
50	1.91584	1.92586
60	1.88857	1.90021

TAB. 4.2: Ordem de Erro mínima e média para malha 101-201-401 pontos, formulação Não-Conservativa Numérica

Continuando, os resultados obtidos a seguir são dos mesmos métodos mostrados anteriormente, mas com uma malha mais refinada.

O mesmo problema observado no parágrafo anterior é observado novamente nas tabelas 4.3 e 4.4, porém em um θ maior. Desta forma, concluímos que o refinamento de malha apenas adia o produto das derivadas numéricas.

Esses resultados podem ser vistos graficamente no Apêndice 1.

NÃO-CONSERVATIVO ANALÍTICO		
Valores de θ	Ordem Mínima	Ordem Média
10	2.00004	2.00013
20	2.00027	2.00066
30	2.00094	2.00156
40	2.00196	2.00281
50	2.00335	2.00442
60	2.00511	2.00641
70	2.00721	2.00877
80	2.00989	2.01155
90	2.01293	2.01501
100	2.01777	2.02012

TAB. 4.3: Ordem de Erro mínima e média para malha 201-401-801 pontos, formulação Não-Conservativa Analítica

NÃO-CONSERVATIVO NUMÉRICO		
Valores de θ	Ordem Mínima	Ordem Média
10	1.99931	1.99928
20	1.99702	1.997
30	1.99329	1.99326
40	1.98805	1.988
50	1.9813	1.98125
60	1.97306	1.973
70	1.96333	1.96325
80	1.95211	1.95203
90	1.93951	1.93942
100	1.92588	1.92579

TAB. 4.4: Ordem de Erro mínima e média para malha 201-401-801 pontos, formulação Não-Conservativa Numérica

Formulação Conservativa de Diferenças Finitas

Os resultados apresentados a seguir são para os métodos conservativos de diferenças finitas. A oscilação que se percebe na formulação conservativa, no caso acima, de diferenças finitas, acontece pois desacopla pontos pares e pontos ímpares. Ou seja, na fórmula (3.7) vai de $i - 2$, salta para $i - 1$, vai para i , salta $i + 1$ e vai para $i + 2$, ($i - 2, i, i + 2$).

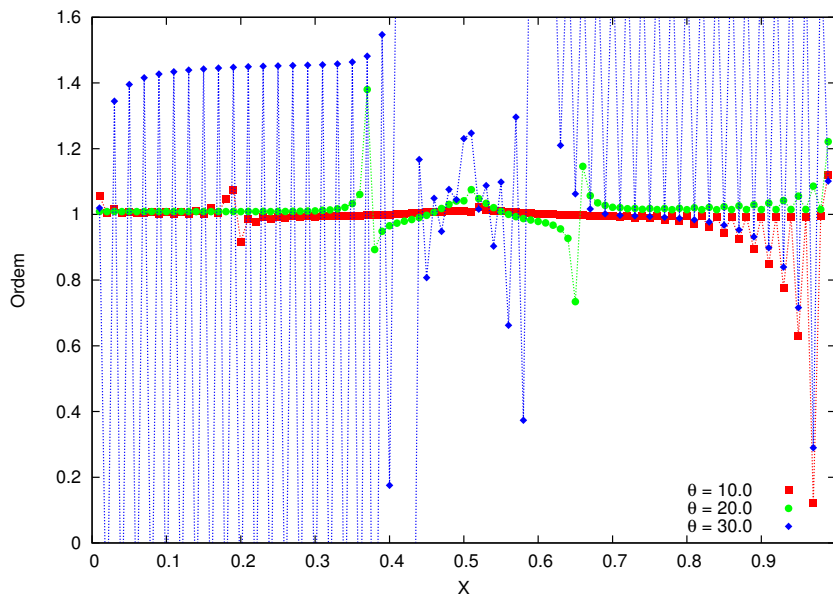


FIG. 4.1: Ordem numérica com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas de Segunda Ordem.

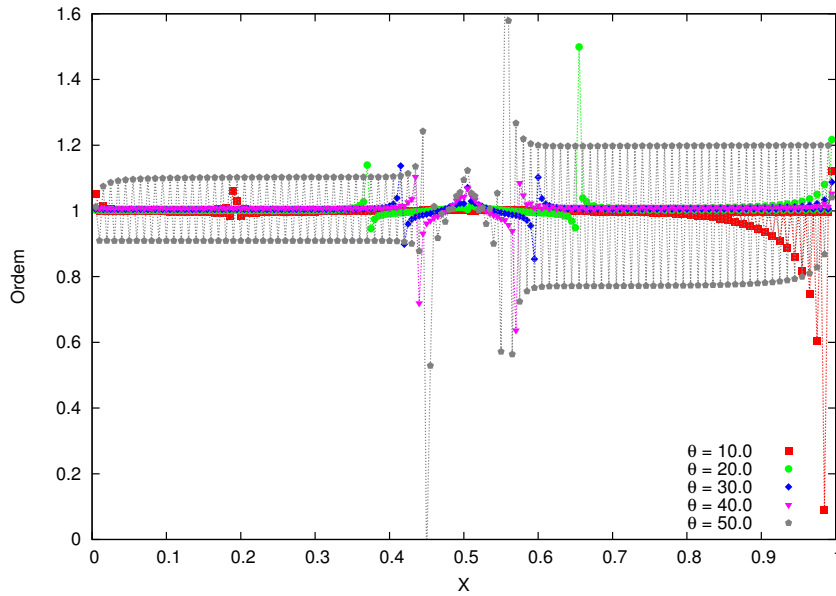


FIG. 4.2: Ordem numérica com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas de Segunda Ordem.

Observa-se também que não é possível fazer uma análise conclusiva de ordem, pois como nota-se nas figuras 4.1 e 4.2, o método é muito instável, causando inclusive, para valores maiores de θ , oscilação na solução. Para a malha mais refinada, nota-se que ordem se mantém até $\theta = 40$, como visto na figura 4.2. A partir de $\theta = 50$, não é mais possível fazer tal análise. Pois há grande oscilação, como também visto na figura 4.1 para malha menos refinada para menores valores de θ .

Formulação Conservativa de Volumes Finitos Tradicional

Continuando, serão apresentados resultados para a formulação conservativa de volumes finitos. Onde observamos na figura 4.3 uma maior perda de ordem e oscilação na região de propriedade variável para $\theta = 50$. Esse região é mostrada nas figuras do Apêndice 2.

Já para a malha mais refinada, observamos na figura 4.4 uma queda mais acentuada de ordem na região de propriedade variável para $\theta = 70$.

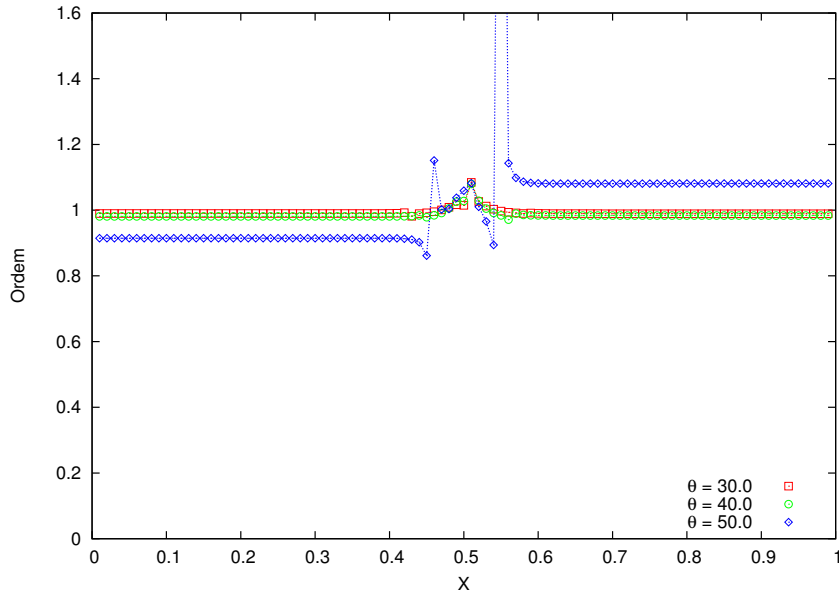


FIG. 4.3: Ordem numérica com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.

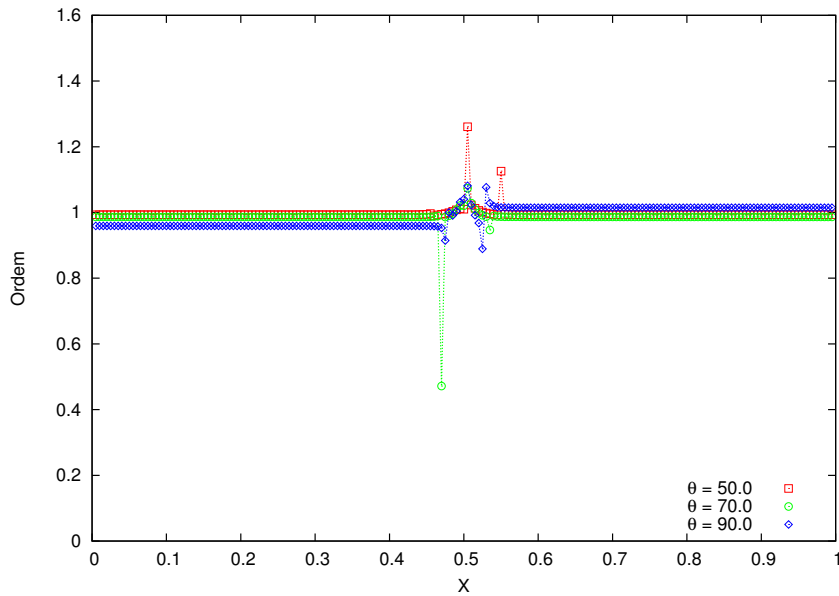


FIG. 4.4: Ordem numérica com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.

Formulação Conservativa de Volumes Finitos SA 2(0)

A seguir, os resultados para a primeira formulação modificada, SA 2(0). Podemos observar que para a malha menor, na figura 4.5, há uma perda de ordem maior quando $\theta = 50$, principalmente na região de propriedade variável, podemos ver na figura 7.53. Enquanto para a malha mais refinada, figura 4.6, também observamos essa perda para o mesmo valor de θ nessa região, porém um pouco menor, além de observar uma perda de ordem também para $\theta = 90$.

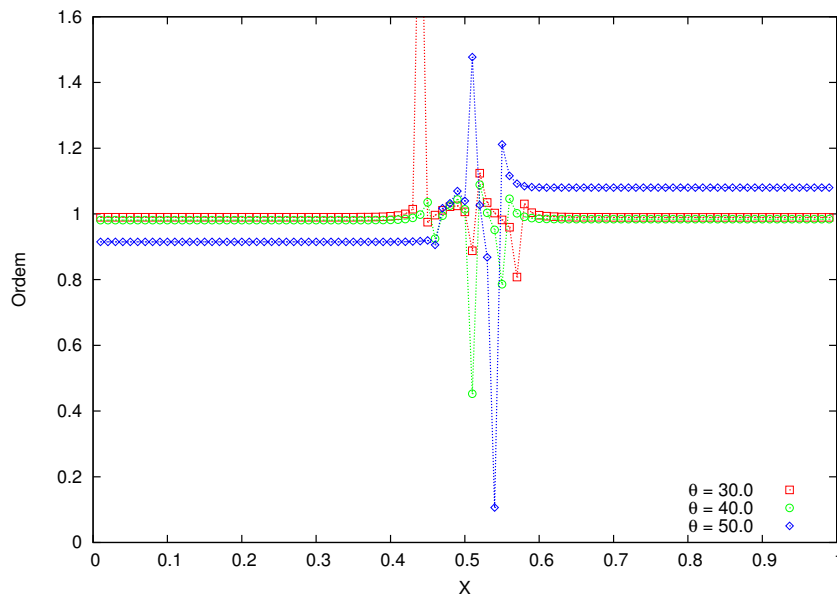


FIG. 4.5: Ordem numérica com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação SA 2(0).

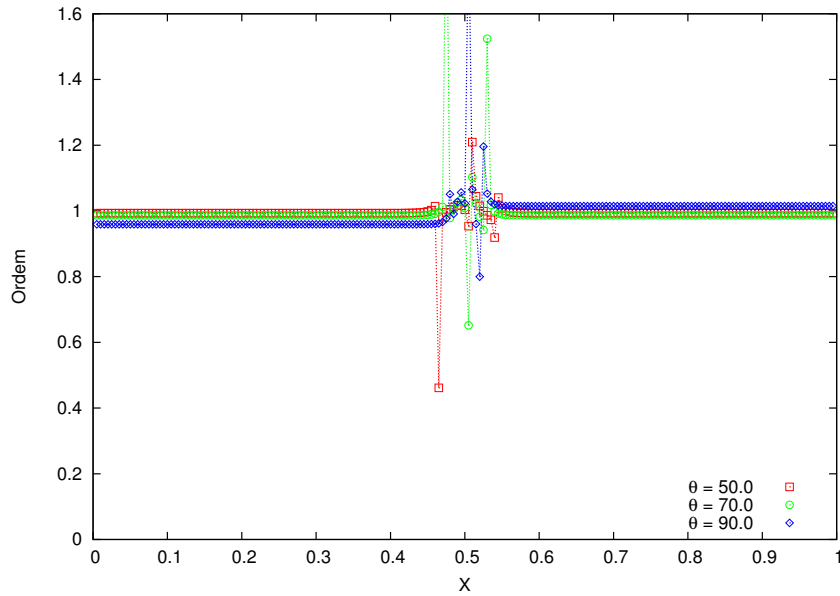


FIG. 4.6: Ordem numérica com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação SA 2(0).

Formulação Conservativa de Volumes Finitos SA 2(1)

Seguimos agora para os resultados da segunda formulação modificada, SA 2(1). Onde podemos ver que para $\theta = 40$ há perda na região de propriedade variável e também para $\theta = 90$, porém para esse valor de θ observamos uma perda de ordem na primeira metade do domínio. Como esse valor de θ é elevado para essa malha menor, não podemos fazer uma análise conclusiva para todo o domínio. Para a malha mais refinada podemos ver a queda maior de ordem na região variável quando $\theta = 90$.

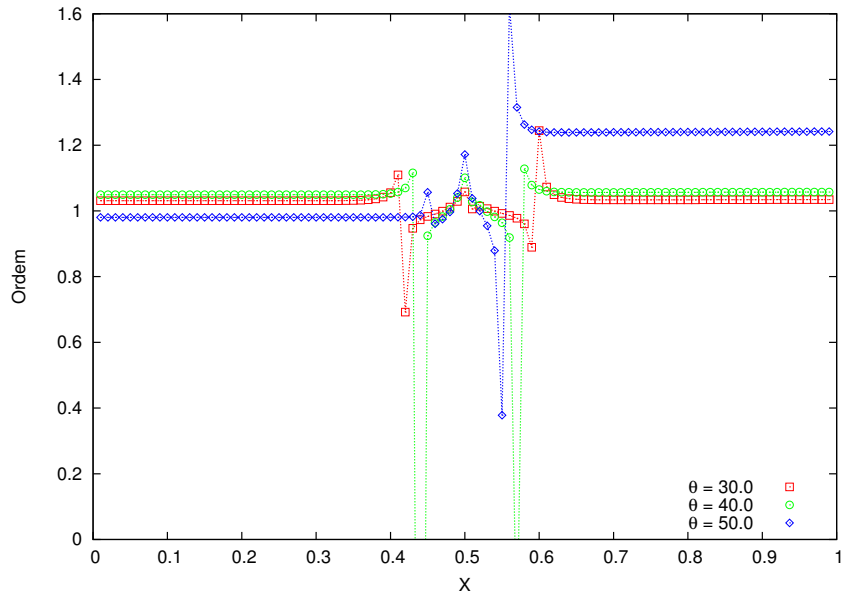


FIG. 4.7: Ordem numérica com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação SA 2(1).

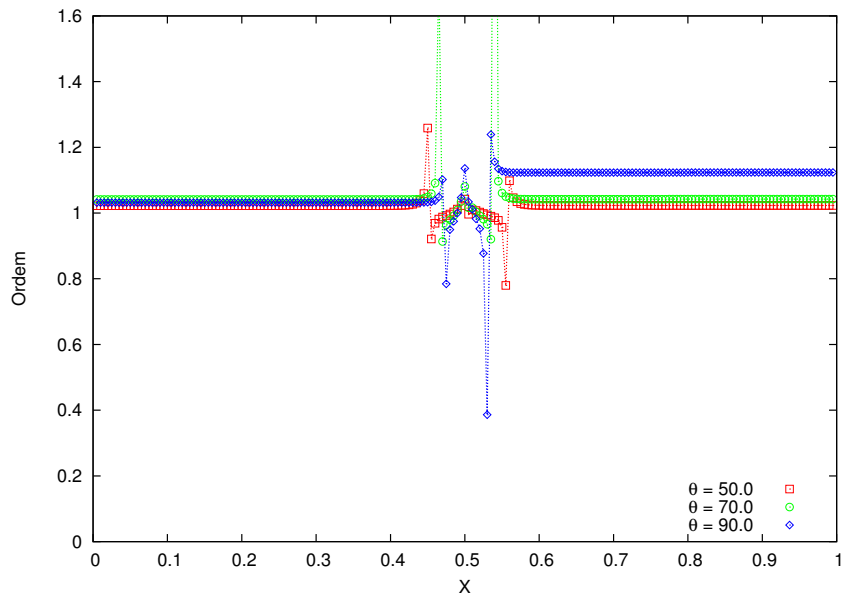


FIG. 4.8: Ordem numérica com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação SA 2(1).

Formulação Conservativa de Volumes Finitos SA 2(2)

A seguir, os resultados para a terceira formulação modificada, SA 2(2). Assim como na formulação anterior, observamos também perda ordem para os mesmos valores de θ , sendo maiores nessa formulação na região onde a propriedade muda.

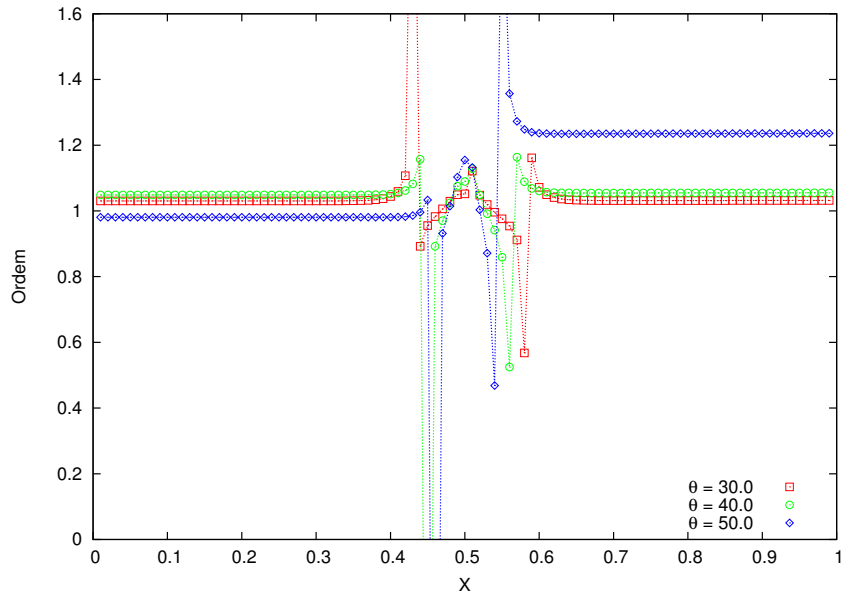


FIG. 4.9: Ordem numérica com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação SA 2(2).

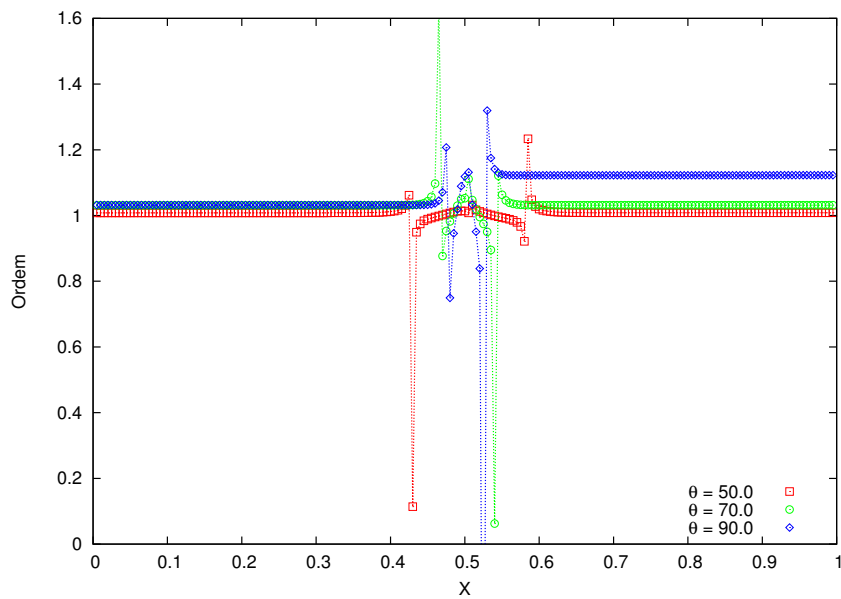


FIG. 4.10: Ordem numérica com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação SA 2(2).

4.1.2 FORMULAÇÕES DE QUARTA ORDEM

Formulação Não-Conservativa de Diferenças Finitas

A seguir, serão apresentados os resultados de ordem numérica para os métodos de quarta ordem das formulações não-conservativas analítica e numérica.

NÃO-CONSERVATIVO ANALÍTICO		
Valores de θ	Ordem Mínima	Ordem Média
10	3.97962	3.98921
20	3.95849	3.96738
30	3.92002	3.93039
40	3.87469	3.88427
50	3.83281	3.84154
60	3.84387	3.85397

TAB. 4.5: Ordem de Erro mínima e média para malha 101-201-401 pontos, formulação Não-Conservativa Analítica de Quarta Ordem

NÃO-CONSERVATIVO NUMÉRICO		
Valores de θ	Ordem Mínima	Ordem Média
10	3.98746	3.99118
20	3.96396	3.9676
30	3.92226	3.92595
40	3.86277	3.86667
50	3.78953	3.79428
60	3.73021	3.73389

TAB. 4.6: Ordem de Erro mínima e média para malha 101-201-401 pontos, formulação Não-Conservativa Numérica de Quarta Ordem

Assim como na versão de segunda ordem, as tabelas 4.5 e 4.6 mostram o crescimento da derivada com o aumento de θ . Porém, neste caso, usando o resultado analítico para $\partial k/\partial x$, notamos que há variação significativa de ordem a partir de $\theta = 30$. E quando utilizamos o resultado numérico para $\partial k/\partial x$, observamos uma perda mais significativa também a partir de $\theta = 30$, enquanto na versão de segunda ordem isso acontecia para $\theta = 40$.

Continuando, os resultados obtidos a seguir são com uma malha mais refinada dos mesmo métodos mostrados anteriormente.

NÃO-CONSERVATIVO ANALÍTICO		
Valores de θ	Ordem Mínima	Ordem Média
10	3.75811	3.84653
20	3.98339	3.98676
30	3.97832	3.9807
40	3.96398	3.9673
50	3.94672	3.95027
60	3.92717	3.93038
70	3.90569	3.90815
80	3.88276	3.88428
90	3.85949	3.86058
100	3.84039	3.8416

TAB. 4.7: Ordem de Erro mínima e média para malha 201-401-801 pontos, formulação Não-Conservativa Analítica de Quarta Ordem

NÃO-CONSERVATIVO NUMÉRICO		
Valores de θ	Ordem Mínima	Ordem Média
10	3.84039	3.8416
20	3.98879	3.9901
30	3.98007	3.98167
40	3.96559	3.96755
50	3.94704	3.94896
60	3.92441	3.92593
70	3.8976	3.89845
80	3.86619	3.86666
90	3.83074	3.83126
100	3.79362	3.7943

TAB. 4.8: Ordem de Erro mínima e média para malha 201-401-801 pontos, formulação Não-Conservativa Numérica de Quarta Ordem

Da mesma forma, como observado anteriormente, vemos nas tabelas 4.7 e 4.8 o mesmo problema do parágrafo anterior, porém em um θ maior. Semelhantemente como visto na versão de segunda ordem, apenas adiando o produto das derivadas numéricas.

Esses resultados podem ser vistos graficamente no Apêndice 7.

Formulação Conservativa de Diferenças Finitas

Os resultados apresentados a seguir são para os métodos conservativos de diferenças finitas. O problema das oscilação é mesmo já explicado na seção de segunda ordem.

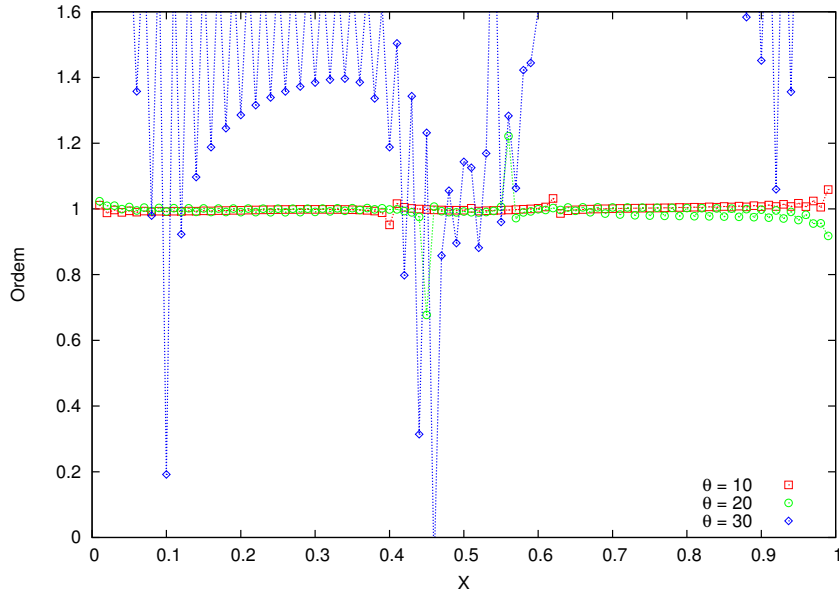


FIG. 4.11: Ordem numérica com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas de Quarta Ordem.

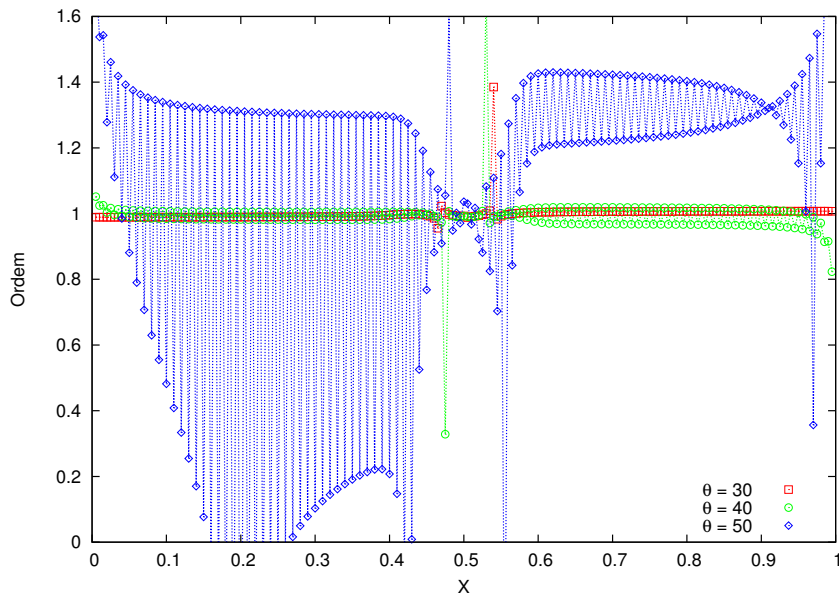


FIG. 4.12: Ordem numérica com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas de Quarta Ordem.

Assim como na versão de segunda ordem, não é possível fazer uma análise conclusiva de ordem, pois o método é muito instável, como podemos ver nas figuras 4.11 e 4.12. Notamos também que tanto nas versões de segunda e quarta ordem a maior oscilação ocorre em $\theta = 30$ e $\theta = 50$ nas malhas menor e maior, respectivamente. Assim, não é possível fazer tal análise

devido a grande instabilidade do método.

Formulação Conservativa de Volumes Finitos de Zingg & Pullian

Continuando com os resultados de quarta ordem, apresentaremos resultados da formulação de Zingg & Pullian. Onde podemos observar na figura 4.13 que a partir de $\theta = 40$ notamos maior queda na ordem, principalmente na região onde a propriedade varia. Já quando usando uma malha com maior número de pontos, observamos também essa perda, porém com $\theta = 90$ e com menor magnitude na região de propriedade variável. Podemos ver também nas figuras 7.132 e 7.143.

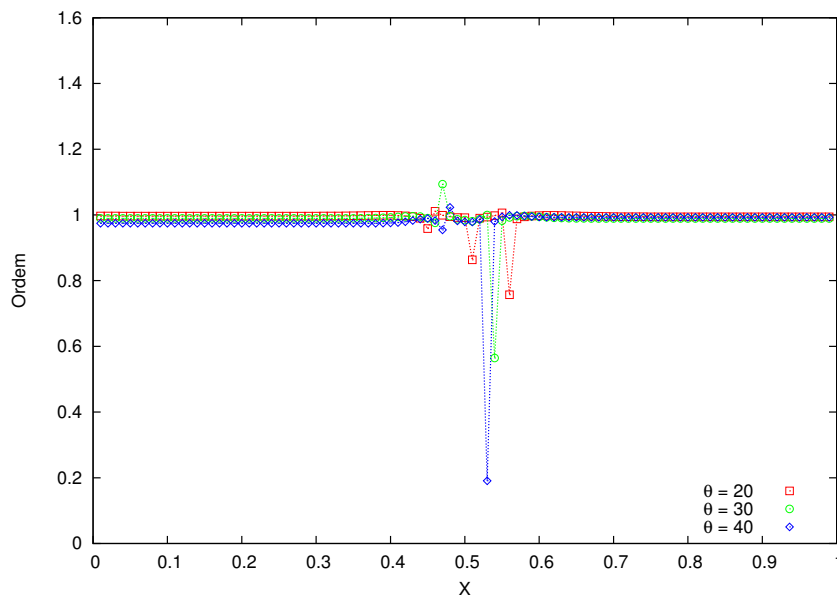


FIG. 4.13: Ordem numérica com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação de Zingg & Pullian.

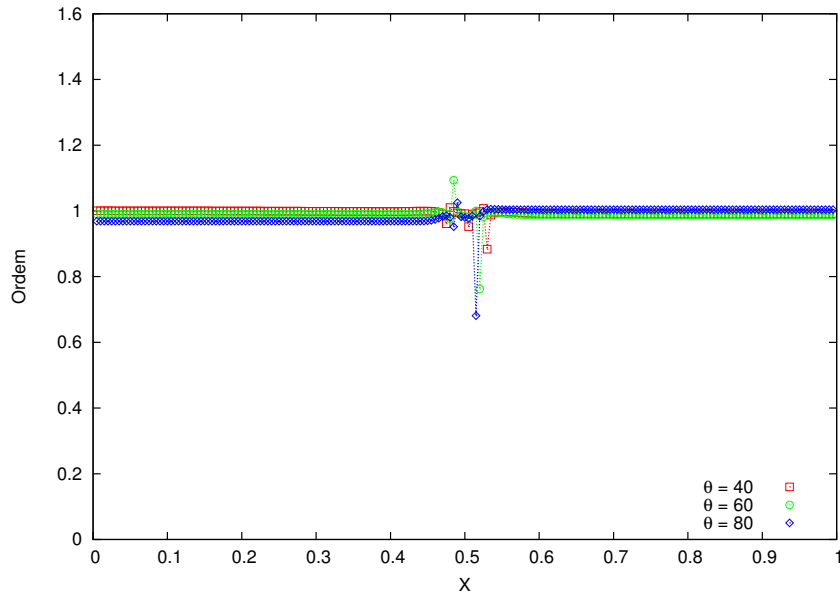


FIG. 4.14: Ordem numérica com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação de Zingg & Pullian.

Formulação Conservativa de Volumes Finitos SA 4(2)

Dando continuidade, apresentaremos os resultados da primeira formulação modificada de quarta ordem, SA 4(2). Podemos notar na figura 4.15 que há uma aparente perda de ordem quando $\theta = 50$, porém na região de propriedade variável há uma queda maior para $\theta = 30$. Notamos, semelhante, quando usamos uma malha mais refinada também essa perda de ordem, porém quando $\theta = 80$ e a queda mais acentuada quando $\theta = 60$, como podemos ver na figura 4.16.

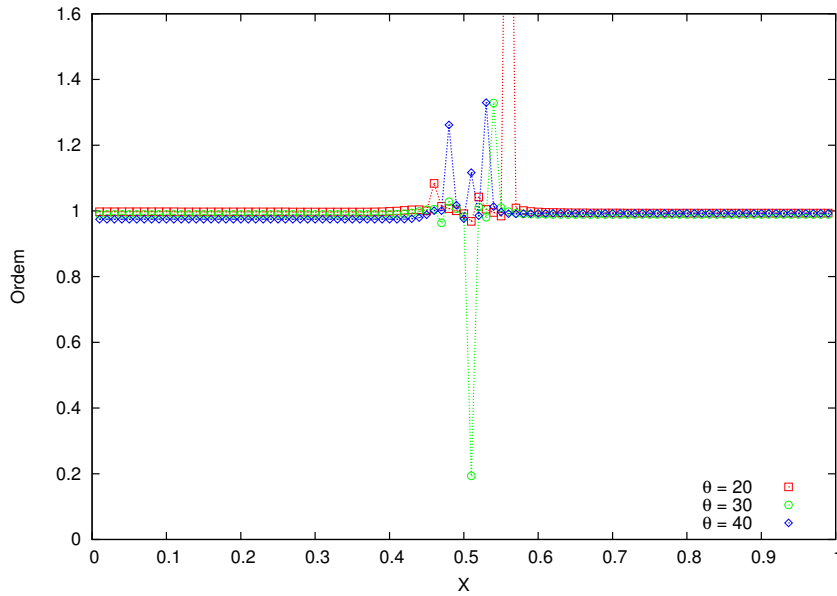


FIG. 4.15: Ordem numérica com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação SA 4(2).

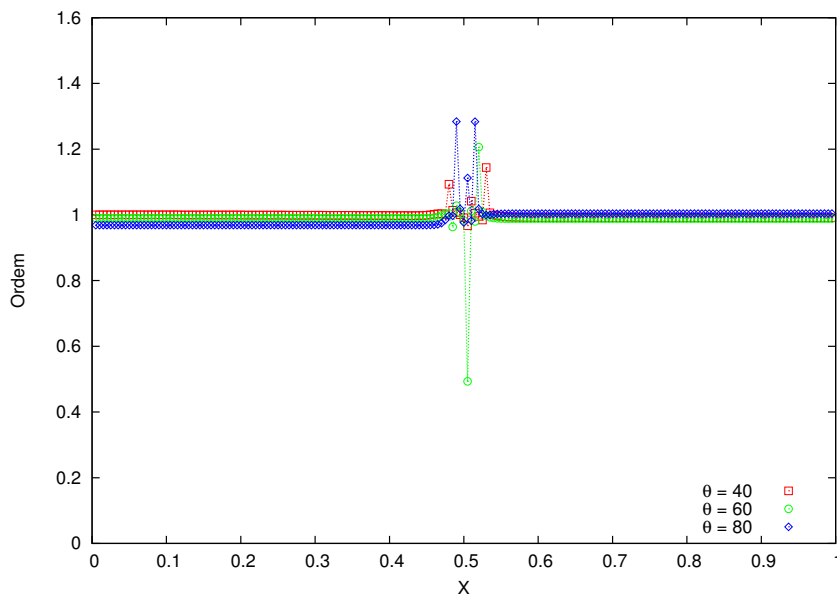


FIG. 4.16: Ordem numérica com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação SA 4(2).

Formulação Conservativa de Volumes Finitos SA 4(3)

A seguir, os resultados apresentados da formulação SA 4(3). Onde podemos nas figuras 4.17 e 4.18 que a ordem praticamente se mantem, sofrendo mais oscilação na região de propriedade variável, mais notável na figura 4.17, ainda nessa figura percebemos que quando $\theta = 50$ não temos analisar comprecisão a ordem numérica. Já quando a malha é mais refinada, a osclição é consideravelmete menor, e para $\theta = 90$ perdemos precisão no cálculo de ordem.

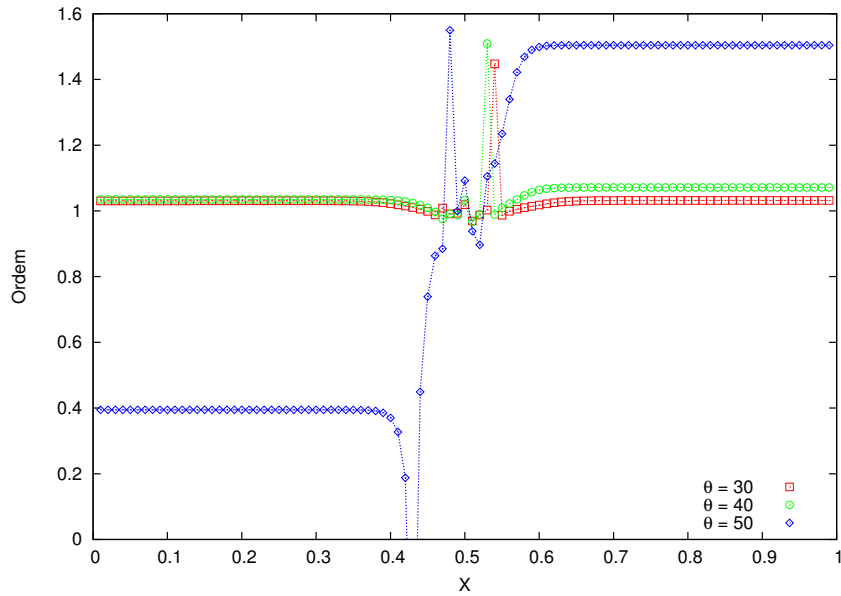


FIG. 4.17: Ordem numérica com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação SA 4(3).

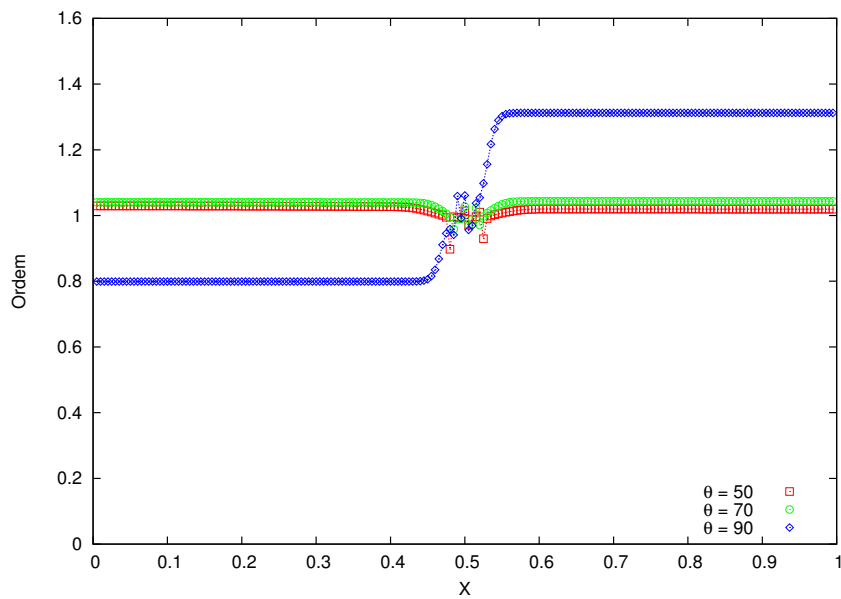


FIG. 4.18: Ordem numérica com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação SA 4(3).

Formulação Conservativa de Volumes Finitos SA 4(4)

Finalizando as formulações, temos a seguir os resultados a formulação SA 4(4). No qual precebemos claramente que a ordem se mantém mais estável em praticamente todo o domínio, sofrendo oscilação e perda de ordem na região onde a propriedade varia. Podemos ver essa perda de ordem nas figuras 4.19 e 4.19, para $\theta = 30$ e $\theta = 60$, respectivamente.

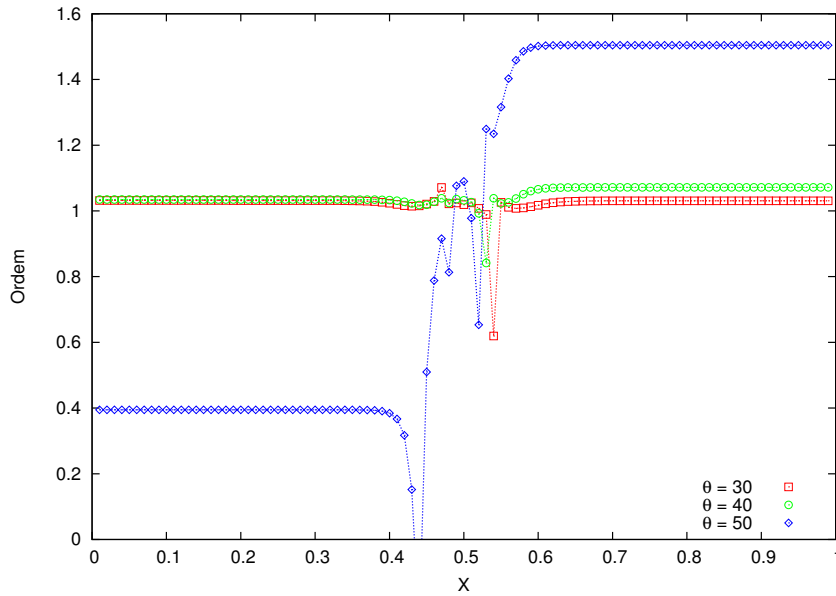


FIG. 4.19: Ordem numérica com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação SA 4(4).

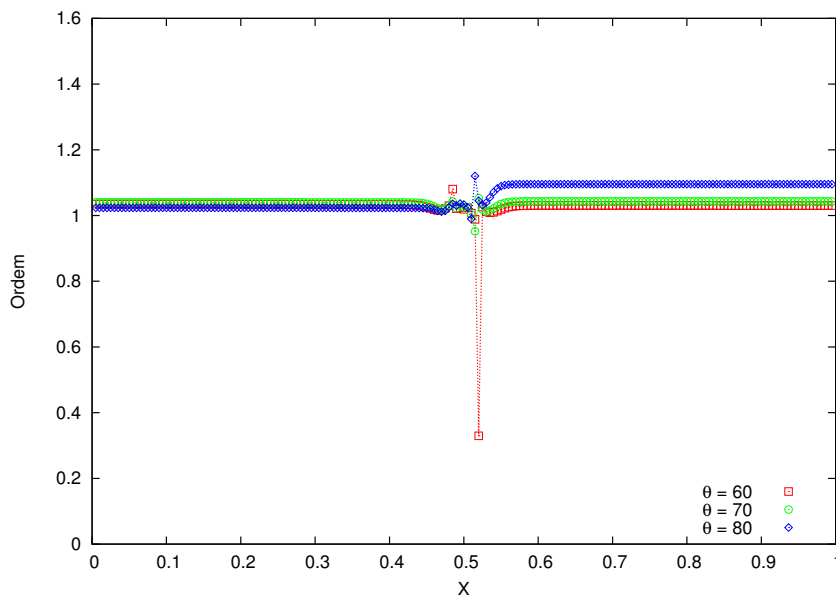


FIG. 4.20: Ordem numérica com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação SA 4(4).

4.2 ERRO E ESTABILIDADE NUMÉRICA

A seguir, os resultados obtidos pelo estudo feito para sabermos o valor máximo do CFL suportado por cada método de quarta ordem, para diferentes valores de θ . Onde CFL, mostrado abaixo na equação (4.1), é o número de Courant-Friedrich-Lewy, que relaciona as velocidades físicas com a velocidade numérica. O CFL é usado para definir o critério de estabilidade numérica de um método de marcha no tempo, indicando o quanto a velocidade numérica pode

crescer em relação às velocidades físicas sem provocar instabilidade. E também é mostrado o erro relativo, máximo e médio, tomando o CFL máximo suportado por cada método.

$$\text{CFL} = \frac{\Delta t}{\rho C_p} \quad (4.1)$$

Observamos nas tabelas 4.9 a 4.24, que o método conservativo de diferenças finitas é bem mais sensível, gera grande oscilação, e apesar de suportar um CFL maior, o erro aumenta consideravelmente a medida que aumentamos o θ , o que para um problema de escoamento de fluidos pode causar turbulência. Quando comparamos os métodos não-conservativos com os métodos SA, vemos uma ligeira vantagem para os métodos não-conservativos em relação ao CFL, porém os métodos SA chegam a ter um erro relativo até duas ordens de magnitude menor. Podemos ver claramente no método SA 4(4).

Estes resultados podem ser vistos graficamente no Apêndice 13.

ERRO E ESTABILIDADE NUMÉRICA - $\theta = 10$			
Métodos	Erro Máximo	Erro Médio	CFL Máximo
Não-Conservativo Analítico	8.472×10^{-6}	3.967×10^{-6}	0.7109
Não-Conservativo Numérico	1.294×10^{-5}	6.339×10^{-6}	0.7109
Conservativo Zingg & Pullian	5.595×10^{-6}	2.540×10^{-6}	0.6937
Conservativo SA 4(2)	5.770×10^{-6}	2.464×10^{-6}	0.6416
Conservativo SA 4(3)	5.689×10^{-6}	2.562×10^{-6}	0.6936
Conservativo SA 4(4)	5.868×10^{-6}	2.491×10^{-6}	0.6416
Conservativo Diferenças Finitas	1.596×10^{-5}	3.493×10^{-6}	1.0213

TAB. 4.9: Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 101-201-401 pontos.
 $\theta = 10$

ERRO E ESTABILIDADE NUMÉRICA - $\theta = 20$			
Métodos	Erro Máximo	Erro Médio	CFL Máximo
Não-Conservativo Analítico	1.399×10^{-4}	4.785×10^{-5}	0.7109
Não-Conservativo Numérico	2.970×10^{-4}	1.198×10^{-4}	0.7109
Conservativo Zingg & Pullian	4.268×10^{-5}	3.727×10^{-6}	0.6937
Conservativo SA 4(2)	3.089×10^{-5}	2.799×10^{-6}	0.6416
Conservativo SA 4(3)	3.650×10^{-5}	2.933×10^{-6}	0.6936
Conservativo SA 4(4)	2.144×10^{-5}	1.861×10^{-6}	0.6416
Conservativo Diferenças Finitas	2.542×10^{-4}	2.034×10^{-5}	1.0213

TAB. 4.10: Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 101-201-401 pontos.
 $\theta = 20$

ERRO E ESTABILIDADE NUMÉRICA - $\theta = 30$			
Métodos	Erro Máximo	Erro Médio	CFL Máximo
Não-Conservativo Analítico	9.456×10^{-4}	3.516×10^{-4}	0.7109
Não-Conservativo Numérico	2.202×10^{-3}	8.777×10^{-4}	0.7109
Conservativo Zingg & Pullian	2.163×10^{-4}	1.496×10^{-5}	0.6937
Conservativo SA 4(2)	1.556×10^{-4}	1.180×10^{-5}	0.6416
Conservativo SA 4(3)	1.788×10^{-4}	1.101×10^{-5}	0.6936
Conservativo SA 4(4)	1.183×10^{-4}	7.674×10^{-6}	0.6416
Conservativo Diferenças Finitas	1.136×10^{-3}	1.515×10^{-4}	1.0213

TAB. 4.11: Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 101-201-401 pontos.
 $\theta = 30$

ERRO E ESTABILIDADE NUMÉRICA - $\theta = 40$			
Métodos	Erro Máximo	Erro Médio	CFL Máximo
Não-Conservativo Analítico	3.658×10^{-3}	1.422×10^{-3}	0.7109
Não-Conservativo Numérico	9.203×10^{-3}	3.520×10^{-3}	0.7109
Conservativo Zingg & Pullian	6.461×10^{-4}	4.084×10^{-5}	0.6937
Conservativo SA 4(2)	4.513×10^{-4}	3.361×10^{-5}	0.6416
Conservativo SA 4(3)	5.608×10^{-4}	2.900×10^{-5}	0.6936
Conservativo SA 4(4)	3.660×10^{-4}	2.166×10^{-5}	0.6416
Conservativo Diferenças Finitas	1.326×10^{-2}	4.177×10^{-3}	1.0213

TAB. 4.12: Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 101-201-401 pontos.
 $\theta = 40$

ERRO E ESTABILIDADE NUMÉRICA - $\theta = 50$			
Métodos	Erro Máximo	Erro Médio	CFL Máximo
Não-Conservativo Analítico	1.103×10^{-2}	4.164×10^{-3}	0.7109
Não-Conservativo Numérico	2.705×10^{-2}	1.009×10^{-2}	0.7109
Conservativo Zingg & Pullian	1.421×10^{-3}	7.438×10^{-5}	0.6937
Conservativo SA 4(2)	9.826×10^{-4}	6.389×10^{-5}	0.6416
Conservativo SA 4(3)	1.281×10^{-3}	5.244×10^{-5}	0.6936
Conservativo SA 4(4)	8.420×10^{-4}	4.104×10^{-5}	0.6416
Conservativo Diferenças Finitas	9.705×10^{-2}	3.166×10^{-2}	1.0213

TAB. 4.13: Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 101-201-401 pontos.
 $\theta = 50$

ERRO E ESTABILIDADE NUMÉRICA - $\theta = 60$			
Métodos	Erro Máximo	Erro Médio	CFL Máximo
Não-Conservativo Analítico	2.775×10^{-2}	1.025×10^{-2}	0.7109
Não-Conservativo Numérico	6.455×10^{-2}	2.369×10^{-2}	0.7109
Conservativo Zingg & Pullian	3.622×10^{-3}	6.536×10^{-4}	0.6937
Conservativo SA 4(2)	2.834×10^{-3}	6.473×10^{-4}	0.6416
Conservativo SA 4(3)	3.438×10^{-3}	6.768×10^{-4}	0.6936
Conservativo SA 4(4)	2.648×10^{-3}	6.675×10^{-4}	0.6416
Conservativo Diferenças Finitas	3.544×10^{-1}	1.143×10^{-1}	1.0213

TAB. 4.14: Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 101-201-401 pontos.
 $\theta = 60$

ERRO E ESTABILIDADE NUMÉRICA - $\theta = 10$			
Métodos	Erro Máximo	Erro Médio	CFL Máximo
Não-Conservativo Analítico	6.312×10^{-6}	2.634×10^{-6}	0.7109
Não-Conservativo Numérico	6.583×10^{-6}	2.734×10^{-6}	0.7109
Conservativo Zingg & Pullian	6.130×10^{-6}	2.563×10^{-6}	0.6937
Conservativo SA 4(2)	6.142×10^{-6}	2.565×10^{-6}	0.6416
Conservativo SA 4(3)	6.136×10^{-6}	2.567×10^{-6}	0.6936
Conservativo SA 4(4)	6.148×10^{-6}	2.570×10^{-6}	0.6416
Conservativo Diferenças Finitas	5.950×10^{-6}	2.531×10^{-6}	1.0213

TAB. 4.15: Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 201-401-801 pontos.
 $\theta = 10$

ERRO E ESTABILIDADE NUMÉRICA - $\theta = 20$			
Métodos	Erro Máximo	Erro Médio	CFL Máximo
Não-Conservativo Analítico	9.037×10^{-6}	3.056×10^{-6}	0.7109
Não-Conservativo Numérico	1.894×10^{-5}	7.655×10^{-6}	0.7109
Conservativo Zingg & Pullian	2.810×10^{-6}	2.383×10^{-7}	0.6937
Conservativo SA 4(2)	1.927×10^{-6}	1.760×10^{-7}	0.6416
Conservativo SA 4(3)	2.308×10^{-6}	1.839×10^{-7}	0.6936
Conservativo SA 4(4)	1.357×10^{-6}	1.145×10^{-7}	0.6416
Conservativo Diferenças Finitas	1.631×10^{-5}	1.299×10^{-6}	1.0213

TAB. 4.16: Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 201-401-801 pontos.
 $\theta = 20$

ERRO E ESTABILIDADE NUMÉRICA - $\theta = 30$			
Métodos	Erro Máximo	Erro Médio	CFL Máximo
Não-Conservativo Analítico	6.174×10^{-5}	2.302×10^{-5}	0.7109
Não-Conservativo Numérico	1.445×10^{-4}	5.762×10^{-5}	0.7109
Conservativo Zingg & Pullian	1.401×10^{-5}	9.636×10^{-7}	0.6937
Conservativo SA 4(2)	9.556×10^{-6}	7.565×10^{-7}	0.6416
Conservativo SA 4(3)	1.139×10^{-5}	6.833×10^{-7}	0.6936
Conservativo SA 4(4)	6.934×10^{-6}	4.531×10^{-7}	0.6416
Conservativo Diferenças Finitas	7.958×10^{-4}	4.776×10^{-6}	1.0213

TAB. 4.17: Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 201-401-801 pontos.
 $\theta = 30$

ERRO E ESTABILIDADE NUMÉRICA - $\theta = 40$			
Métodos	Erro Máximo	Erro Médio	CFL Máximo
Não-Conservativo Analítico	2.476×10^{-4}	9.602×10^{-5}	0.7109
Não-Conservativo Numérico	6.284×10^{-4}	2.402×10^{-4}	0.7109
Conservativo Zingg & Pullian	4.239×10^{-5}	2.641×10^{-6}	0.6937
Conservativo SA 4(2)	3.061×10^{-5}	2.176×10^{-6}	0.6416
Conservativo SA 4(3)	3.627×10^{-5}	1.771×10^{-6}	0.6936
Conservativo SA 4(4)	2.117×10^{-5}	1.237×10^{-6}	0.6416
Conservativo Diferenças Finitas	2.528×10^{-4}	1.217×10^{-5}	1.0213

TAB. 4.18: Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 201-401-801 pontos.
 $\theta = 40$

ERRO E ESTABILIDADE NUMÉRICA - $\theta = 50$			
Métodos	Erro Máximo	Erro Médio	CFL Máximo
Não-Conservativo Analítico	7.682×10^{-4}	2.891×10^{-4}	0.7109
Não-Conservativo Numérico	1.937×10^{-3}	7.227×10^{-4}	0.7109
Conservativo Zingg & Pullian	1.025×10^{-4}	5.902×10^{-6}	0.6937
Conservativo SA 4(2)	7.557×10^{-5}	4.995×10^{-6}	0.6416
Conservativo SA 4(3)	8.195×10^{-5}	3.785×10^{-6}	0.6936
Conservativo SA 4(4)	5.497×10^{-5}	2.799×10^{-6}	0.6416
Conservativo Diferenças Finitas	5.813×10^{-4}	2.877×10^{-5}	1.0213

TAB. 4.19: Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 201-401-801 pontos.
 $\theta = 50$

ERRO E ESTABILIDADE NUMÉRICA - $\theta = 60$			
Métodos	Erro Máximo	Erro Médio	CFL Máximo
Não-Conservativo Analítico	1.918×10^{-3}	7.076×10^{-4}	0.7109
Não-Conservativo Numérico	4.816×10^{-3}	1.765×10^{-3}	0.7109
Conservativo Zingg & Pullian	2.150×10^{-4}	1.138×10^{-5}	0.6937
Conservativo SA 4(2)	1.552×10^{-4}	9.805×10^{-6}	0.6416
Conservativo SA 4(3)	1.777×10^{-4}	7.179×10^{-6}	0.6936
Conservativo SA 4(4)	1.178×10^{-4}	5.496×10^{-6}	0.6416
Conservativo Diferenças Finitas	1.423×10^{-4}	2.587×10^{-4}	1.0213

TAB. 4.20: Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 201-401-801 pontos.
 $\theta = 60$

ERRO E ESTABILIDADE NUMÉRICA - $\theta = 70$			
Métodos	Erro Máximo	Erro Médio	CFL Máximo
Não-Conservativo Analítico	4.125×10^{-3}	1.500×10^{-3}	0.7109
Não-Conservativo Numérico	1.030×10^{-2}	3.730×10^{-3}	0.7109
Conservativo Zingg & Pullian	3.928×10^{-4}	2.004×10^{-5}	0.6937
Conservativo SA 4(2)	2.787×10^{-4}	1.760×10^{-5}	0.6416
Conservativo SA 4(3)	3.335×10^{-4}	1.241×10^{-5}	0.6936
Conservativo SA 4(4)	2.196×10^{-4}	9.981×10^{-6}	0.6416
Conservativo Diferenças Finitas	6.205×10^{-3}	1.917×10^{-3}	1.0213

TAB. 4.21: Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 201-401-801 pontos.
 $\theta = 70$

ERRO E ESTABILIDADE NUMÉRICA - $\theta = 80$			
Métodos	Erro Máximo	Erro Médio	CFL Máximo
Não-Conservativo Analítico	7.957×10^{-3}	2.863×10^{-3}	0.7109
Não-Conservativo Numérico	1.976×10^{-2}	7.081×10^{-3}	0.7109
Conservativo Zingg & Pullian	6.457×10^{-4}	3.218×10^{-5}	0.6937
Conservativo SA 4(2)	4.519×10^{-4}	2.854×10^{-5}	0.6416
Conservativo SA 4(3)	5.608×10^{-4}	1.989×10^{-5}	0.6936
Conservativo SA 4(4)	3.670×10^{-4}	1.622×10^{-5}	0.6416
Conservativo Diferenças Finitas	2.628×10^{-2}	8.569×10^{-3}	1.0213

TAB. 4.22: Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 201-401-801 pontos.
 $\theta = 80$

ERRO E ESTABILIDADE NUMÉRICA - $\theta = 90$			
Métodos	Erro Máximo	Erro Médio	CFL Máximo
Não-Conservativo Analítico	1.413×10^{-2}	5.046×10^{-3}	0.7109
Não-Conservativo Numérico	3.480×10^{-2}	1.238×10^{-2}	0.7109
Conservativo Zingg & Pullian	9.881×10^{-4}	4.567×10^{-5}	0.6937
Conservativo SA 4(2)	6.863×10^{-4}	4.093×10^{-5}	0.6416
Conservativo SA 4(3)	8.758×10^{-4}	2.724×10^{-5}	0.6936
Conservativo SA 4(4)	5.738×10^{-4}	2.222×10^{-5}	0.6416
Conservativo Diferenças Finitas	8.120×10^{-2}	2.671×10^{-2}	1.0213

TAB. 4.23: Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 201-401-801 pontos.
 $\theta = 90$

ERRO E ESTABILIDADE NUMÉRICA - $\theta = 100$			
Métodos	Erro Máximo	Erro Médio	CFL Máximo
Não-Conservativo Analítico	7.957×10^{-3}	2.863×10^{-3}	0.7109
Não-Conservativo Numérico	1.976×10^{-2}	7.081×10^{-3}	0.7109
Conservativo Zingg & Pullian	6.457×10^{-4}	3.218×10^{-5}	0.6937
Conservativo SA 4(2)	4.519×10^{-4}	2.854×10^{-5}	0.6416
Conservativo SA 4(3)	5.608×10^{-4}	1.989×10^{-5}	0.6936
Conservativo SA 4(4)	3.670×10^{-4}	1.622×10^{-5}	0.6416
Conservativo Diferenças Finitas	2.628×10^{-2}	8.569×10^{-3}	1.0213

TAB. 4.24: Erro Relativo Máximo e Médio, e CFL Máximo, para malha 201-401-801 pontos.
 $\theta = 100$

4.3 ANÁLISE ESPECTRAL

A figura 4.21 mostra uma comparação para vários esquemas. Representamos o número de onda modificado $\bar{K}\Delta x$ em função do número de onda $K\Delta x$, para segunda derivada, estudada na seção 2.5. Onde podemos observar que comparando os esquemas não-conservativos com os conservativos de diferenças finitas, vemos a curva do número de onda do esquema de diferenças finitas bem abaixo do não-conservativo. Ao olharmos para os esquemas de segunda ordem, notamos que são equivalentes, com exceção do conservativo SA 2(0) e conservativo de diferenças finitas, já discutido anteriormente. Observamos também resultados equivalentes para os esquemas conservativos de Zingg & Pullian e SA 4(3). Já os esquemas que apresentaram melhores resultados, ou seja, se aproximaram melhor da curva K^2 , foram os esquemas SA 4(2) e SA 4(4), que apresentaram resultados equivalentes.

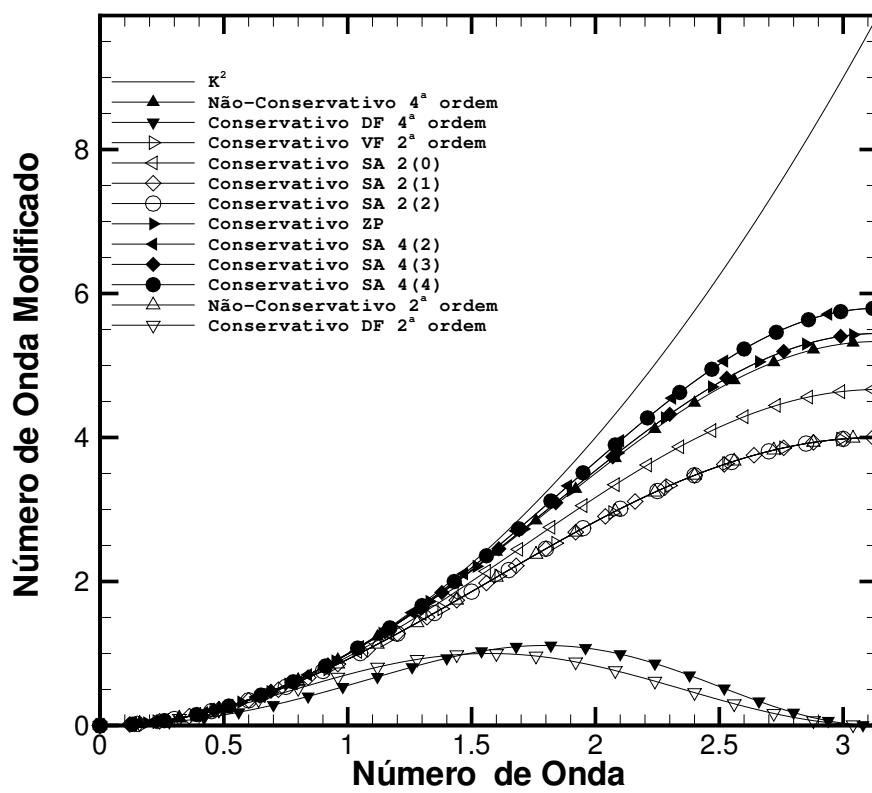


FIG. 4.21: $\bar{K} \Delta x$ em função de $K \Delta x$, para segunda derivada

5 CONCLUSÃO

Após estudar os resultados apresentados, podemos notar que o método conservativo de diferenças finitas pode ser claramente descartado, devido a sua grande sensibilidade no cálculo da ordem numérica e na análise de erro, que aumenta consideravelmente a medida na região de maior gradiente, além da instabilidade na solução e resultados piores na análise espectral.

Os métodos não-conservativos de diferenças, que são os mais utilizados na literatura, apresentaram resultados satisfatórios quanto ao cálculo de ordem, porém quando olhamos para o erro percebemos que é maior que todos os outros métodos, com exceção do método de diferenças finitas a partir de um determinado θ alto o suficiente.

Os métodos conservativos SA mostraram estabilidade no cálculo de ordem numérica, melhores nos de quarta ordem, com exceção de alguns casos na região de propriedade variável. Porém o esquema SA 4(4) mostrou uma estabilidade maior nessa região. Além disso, os métodos SA de quarta ordem, no caso SA 4(2) e SA 4(4), apresentaram melhores números de onda modificados. Os métodos SA apresentaram resultados melhores inclusive ao apresentado por ZINGG (2000).

Concluimos assim, que depois de todo esse estudo, o método de diferenças finitas SA 4(4), proposto nessa dissertação, foi o que, em geral, apresentou melhores resultados.

Para uma continuação desse estudo, pode-se estender a análise para sexta ordem, e usar também uma formulação compacta, além de analisar o outro termo da equação de energia, que envolve uma aproximação de um produto de três variáveis. Nesse estudo foram apenas duas variáveis.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BASSI, F. e REBAY, S. **A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations.** Journal of Computational Physics, 131:267–279, 1997.
- BOND, R. B., KNUPP, P. M. e C., O. C. **A manufactured solution for verifying cfd boundary conditions.** AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2005.
- FORTUNE, V.; LAMBALLAIS, E. G. Y. **Noise radiated by a non-isothermal, temporal mixing layer. Part I: Direct computation and prediction using compressible DNS.** Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 18:61–81, October 2004.
- LANEY, C. B. **Computational Gas Dynamics.** Cambridge University Press, 1998.
- LELE, S. K. **Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution.** Journal of Computational Physics, 103:16–42, August 1992.
- LOMAX, H., PULLIAM, T. H. e ZINGG, D. W. **Fundamentals of Computational Fluid Dynamics.** Springer & Verlag, 2001.
- NAGARAJAN, S., LELE, S. K. e FERZIGER, J. H. **A robust high-order compact method for large eddy simulation.** Journal of Computational Physics, 191:392–419, June 2003.
- OBERKAMPF, W. L. e ROY, C. J. **Verification and Validation in Scientific Computing.** Cambridge University Press, 2010.
- PIMENTEL, M. R. **Métodos de Alta Resolução Espacial para Termos Difusivos.** Instituto Militar de Engenharia - IME, 2010.
- RANGO, S.; ZINGG, D. W. **Higher-order spatial discretization for turbulent aerodynamic computations.** AIAA Journal, 39:1296–1304, July 2001.
- RANGO, S. D. e ZINGG, D. W. **Aerodynamic Computations Using a Higher-Order Algorithm.** Em AIAA Conference Paper, 99-0167, págs. 1–1, 2000.
- ROACHE, P. J. **Verification of codes and calculations.** AIAA Journal, 36:696–702, 1998.
- ROY, C. J. **Review of code and solution verification procedures for computational simulation.** Journal of Computational Physics, 44(1):131–156, May 2005.
- ROY, C., NELSON, C. C., SMITH, T. M. e OBER, C. C. **Verification of Euler/Navier-Stokes codes using the method of manufactured solutions.** International Journal for Numerical Methods in Fluids, 44:599–620, 2004.
- SALARI, K. e KNUPP, P. **Verification of computer codes in computational science and engineering.** CRC Press LLC, 2000.

- SANDHAM, N. D., LI, Q. e LEE, H. C. **Entropy Splitting for High-Order Numerical Simulation of Compressible Turbulence.** Journal of Computational Physics, 178:307–322, May 2002.
- SHEN, Y., WANG, B. e ZHA, G. **Implicit WENO Scheme and High Order Viscous Formulas for Compressible Flows.** Em 45th AIAA Conference, 2007. Paper 2007-4431.
- SHEN, Y., ZHA, G. e CHEN, X. **High Order Conservative Differencing for Viscous Terms and the Application to Vortex-Induced Vibration Flows.** Em 38th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, June 2008. Paper 2008-4059.
- TANNEHILL, J. C., ANDERSON, D. A. e PLETCHER, R. H. **Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer.** Taylor & Francis, 1997.
- VERSTEEG, H. K. e MALALASEKERA, W. **An introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite Volume Method.** Prentice Hall, 1995.
- ZHONG, X. **High-Order Finite-Difference Schemes for Numerical Simulation of Hypersonic Boundary-Layer Transition.** Journal of Computational Physics, 144(CP986010): 662–709, 1998.
- ZINGG, D. W.; RANGO, S. N. M. P. T. H. **Comparison of Several Spatial Discretizations for the Navier-Stokes Equations.** Journal of Computational Physics, 160:683–704, 2000.

7 APÊNDICES

7.1 APÊNDICE 1: FORMULAÇÃO NÃO-CONSERVATIVA DE DIFERENÇAS FINITAS -
2ª ORDEM

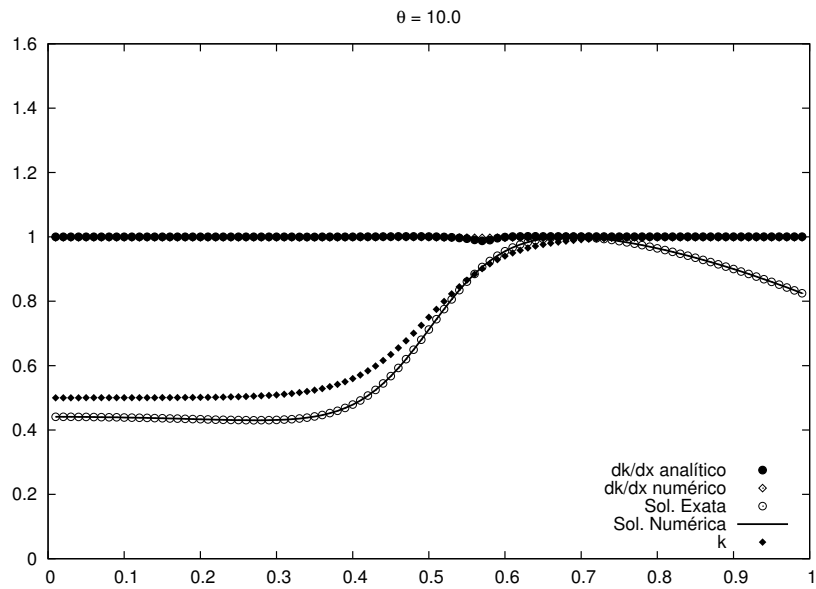


FIG. 7.1: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa.

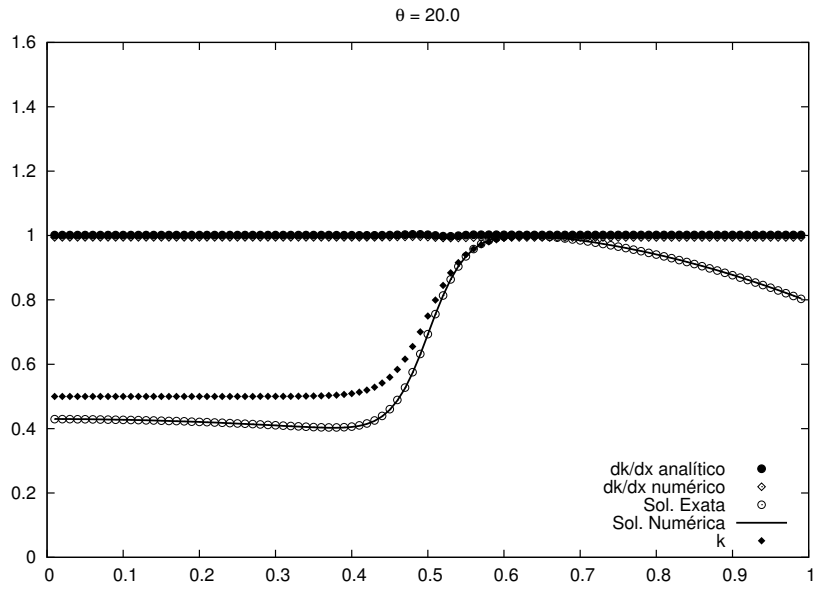


FIG. 7.2: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa.

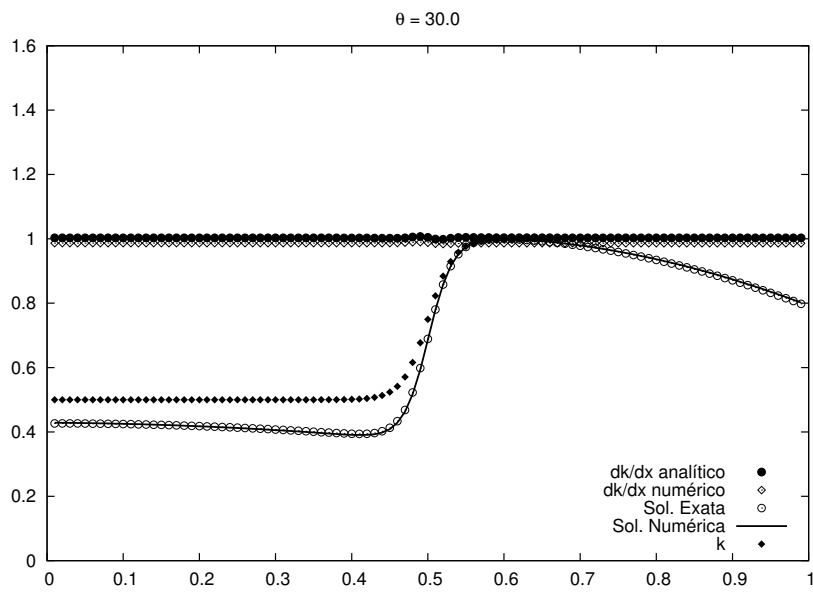


FIG. 7.3: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa.

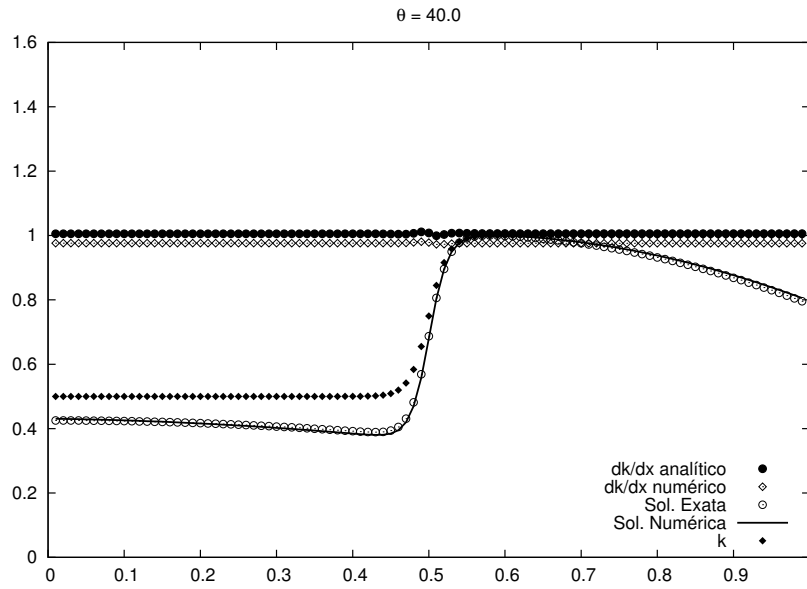


FIG. 7.4: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa.

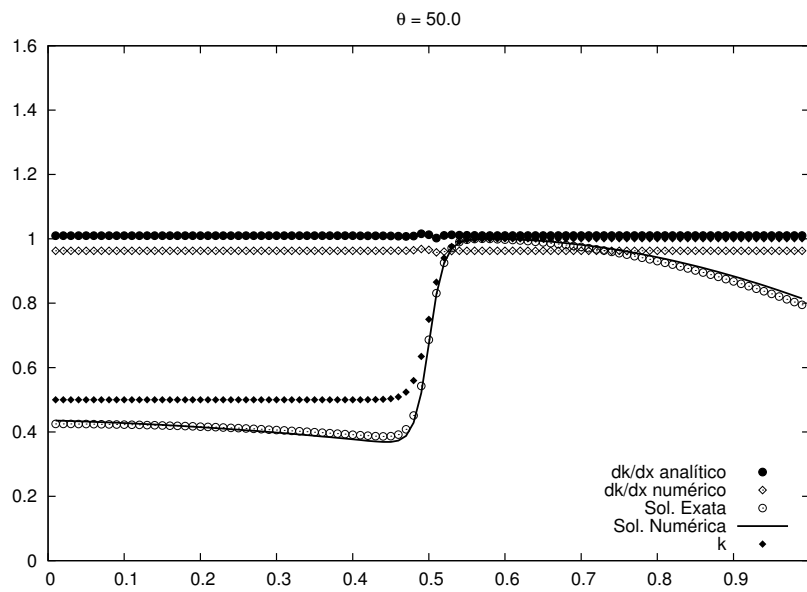


FIG. 7.5: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa.

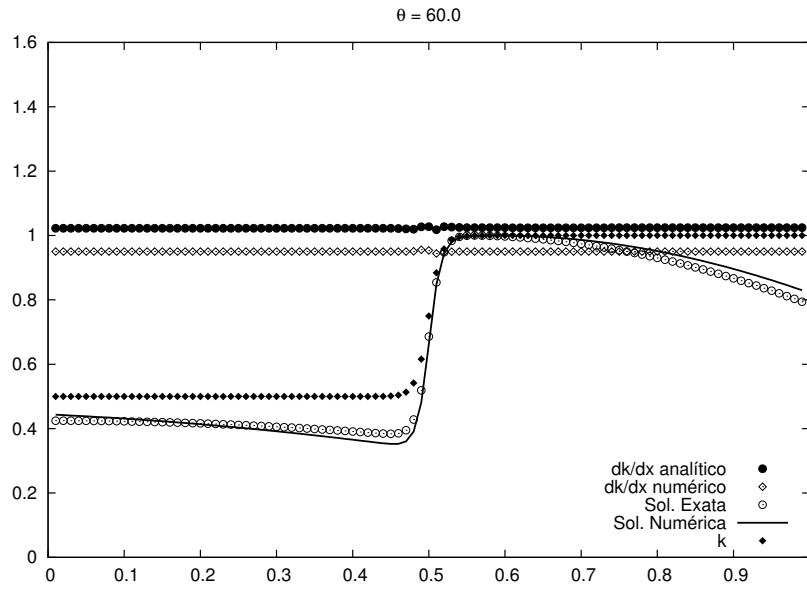


FIG. 7.6: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa.

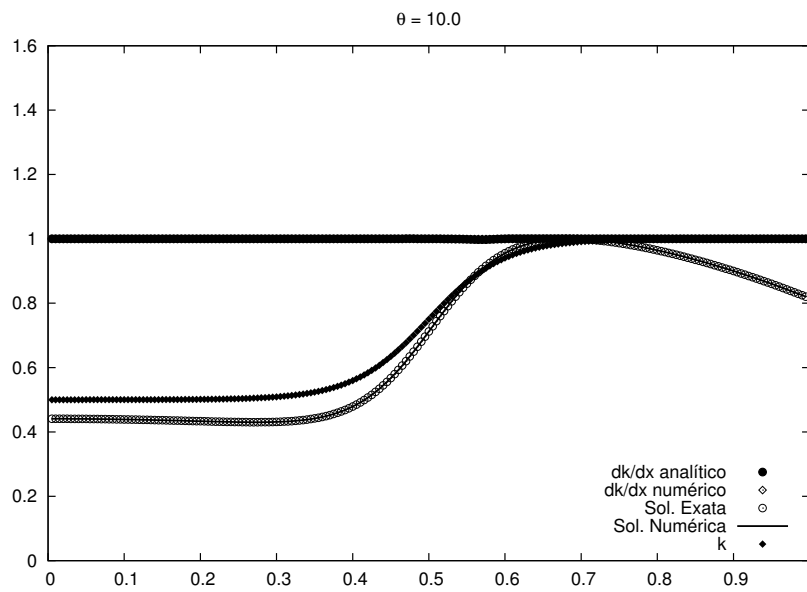


FIG. 7.7: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa.

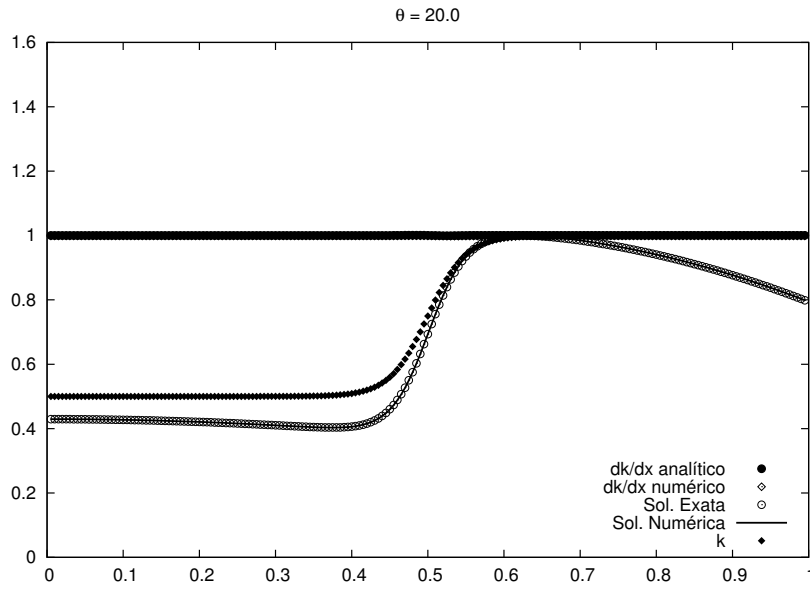


FIG. 7.8: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa.

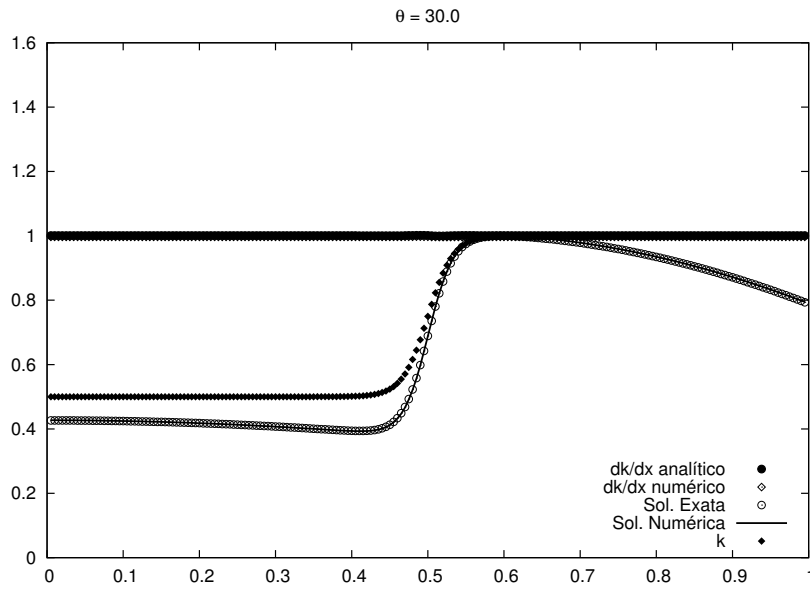


FIG. 7.9: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa.

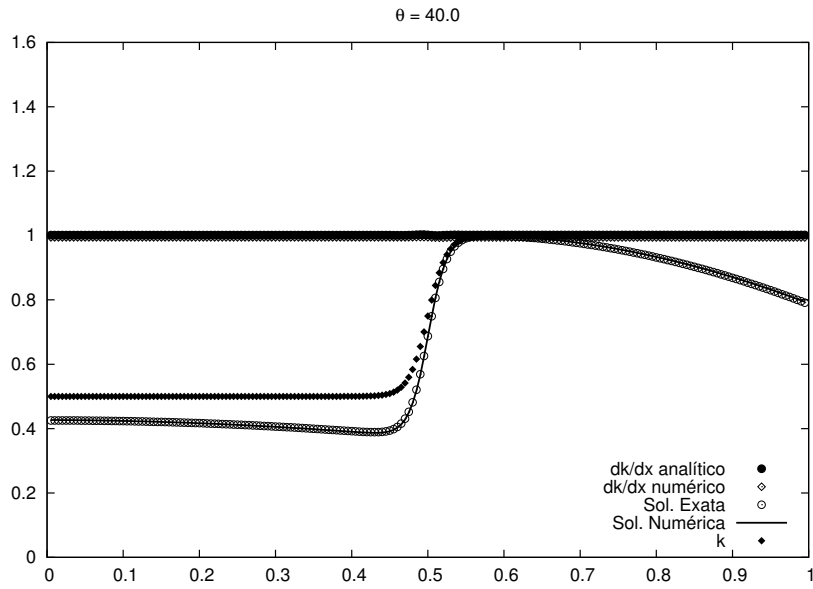


FIG. 7.10: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa.

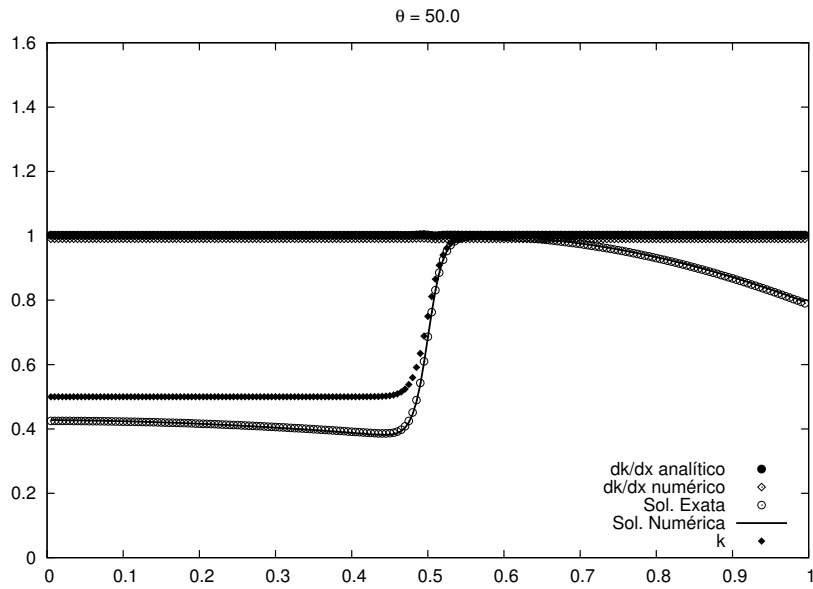


FIG. 7.11: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa.

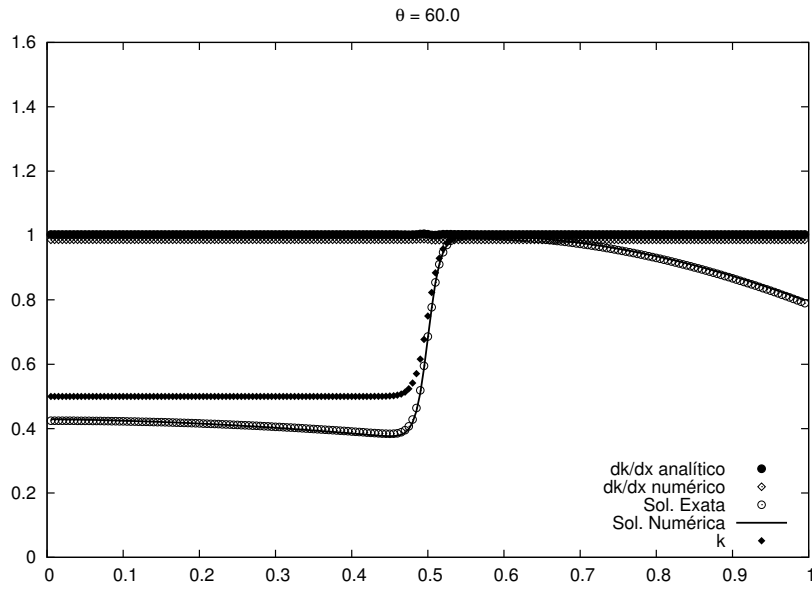


FIG. 7.12: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa.

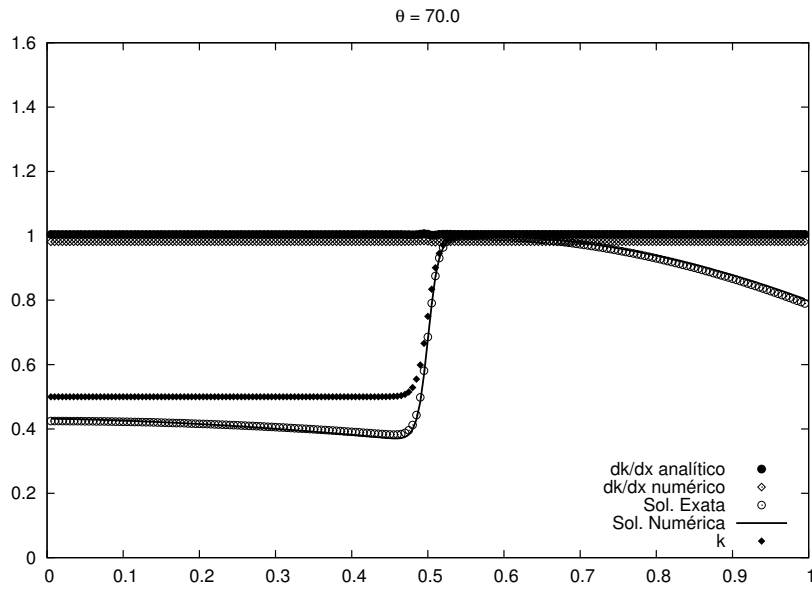


FIG. 7.13: Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa.

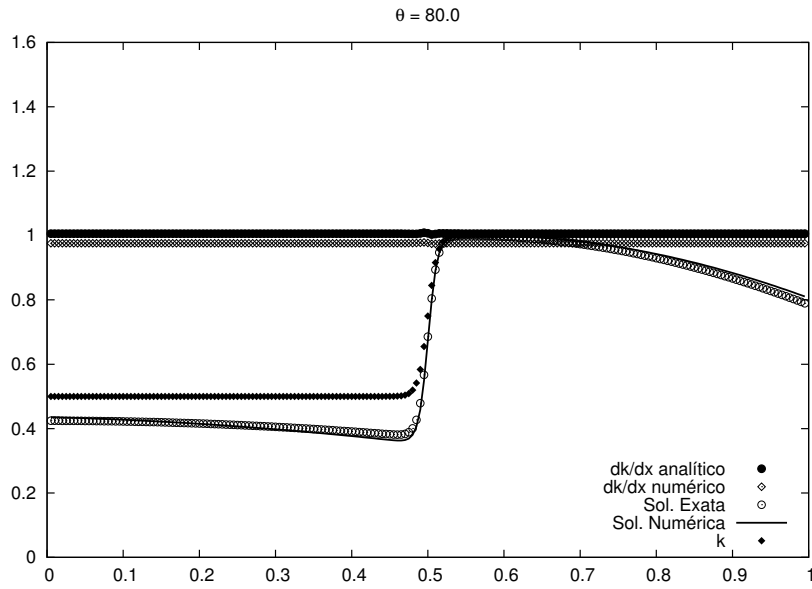


FIG. 7.14: Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa.

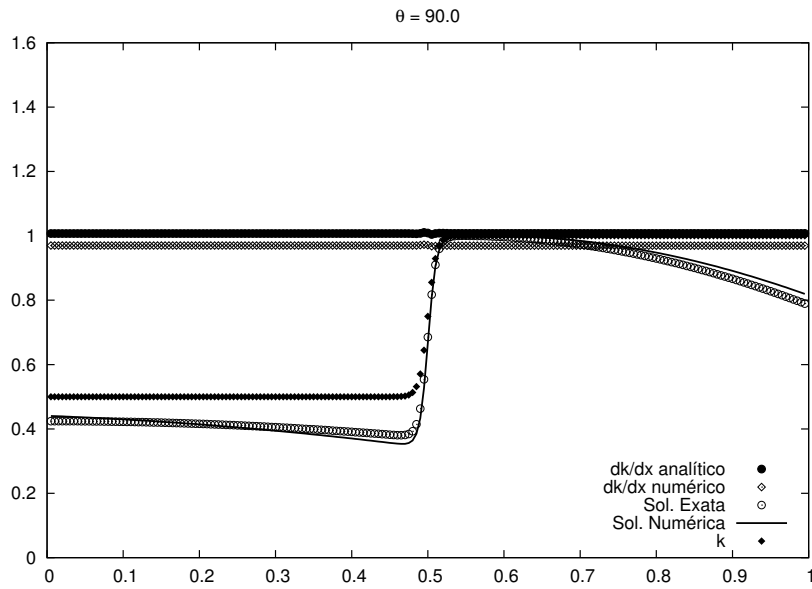


FIG. 7.15: Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa.

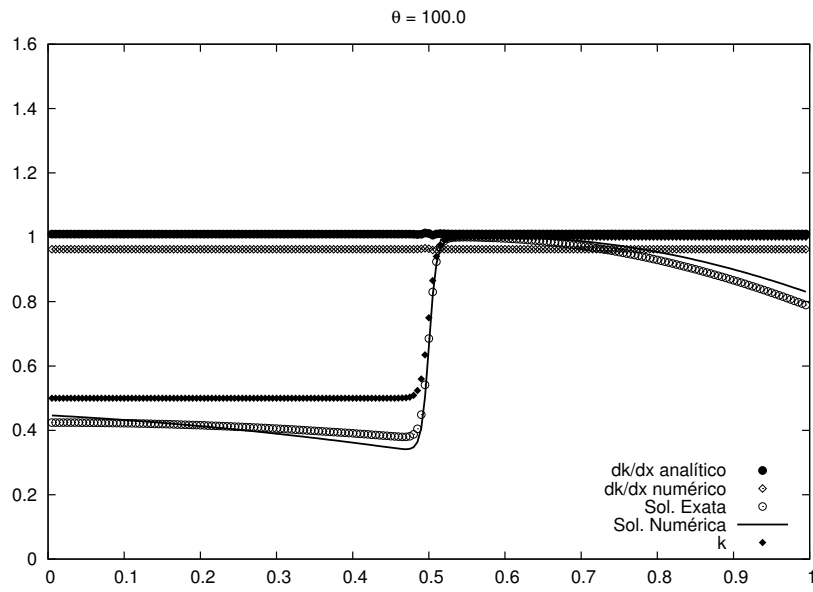


FIG. 7.16: Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa.

7.2 APÊNDICE 2: FORMULAÇÃO CONSERVATIVA DE DIFERENÇAS FINITAS -
2ª ORDEM

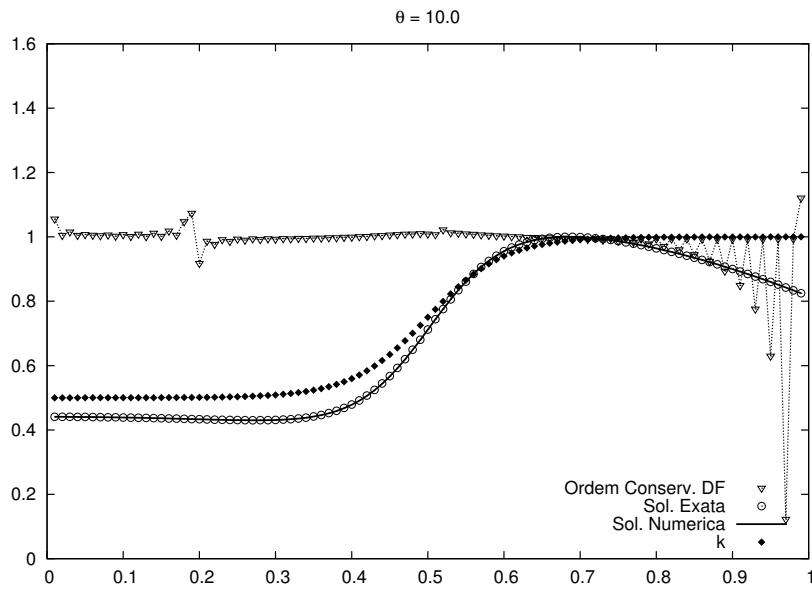


FIG. 7.17: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.

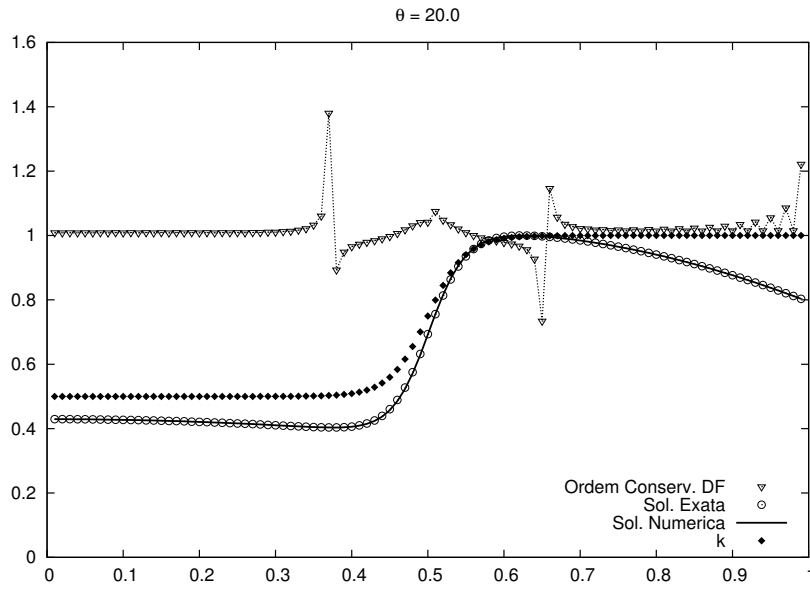


FIG. 7.18: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.

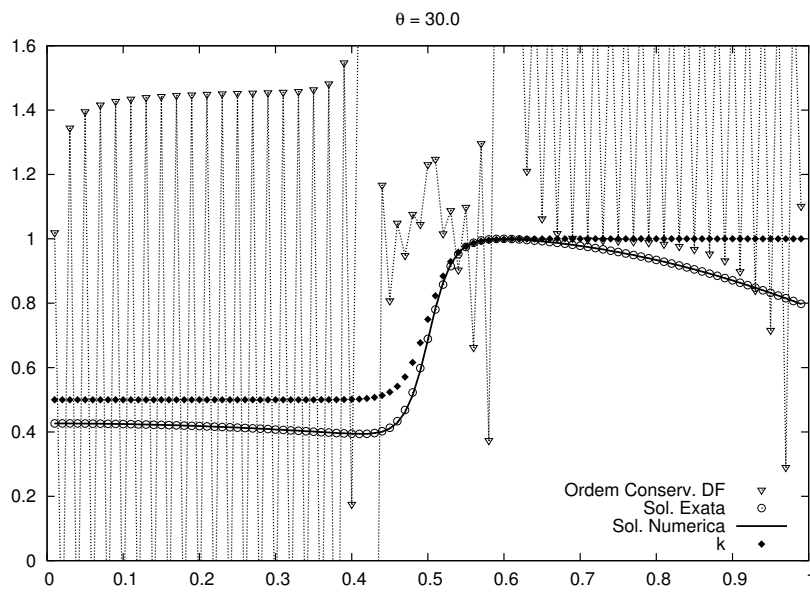


FIG. 7.19: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.

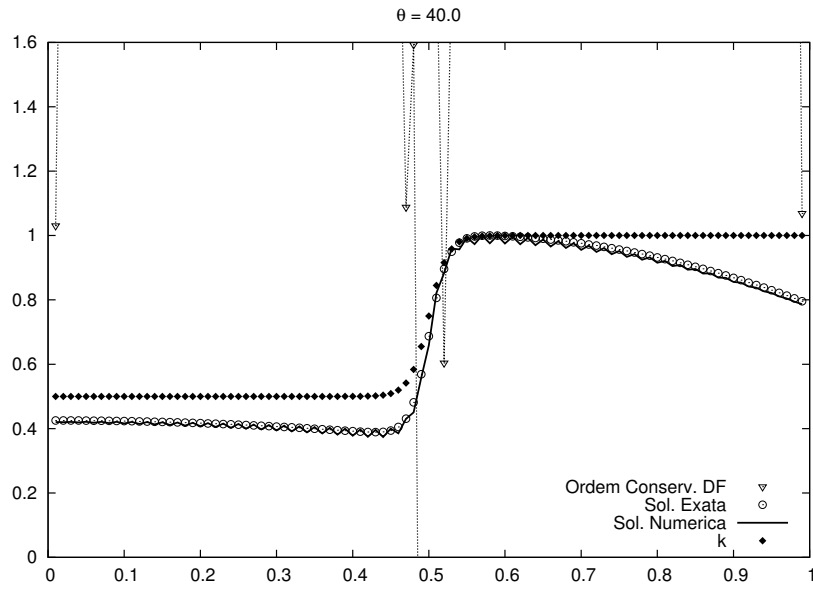


FIG. 7.20: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.

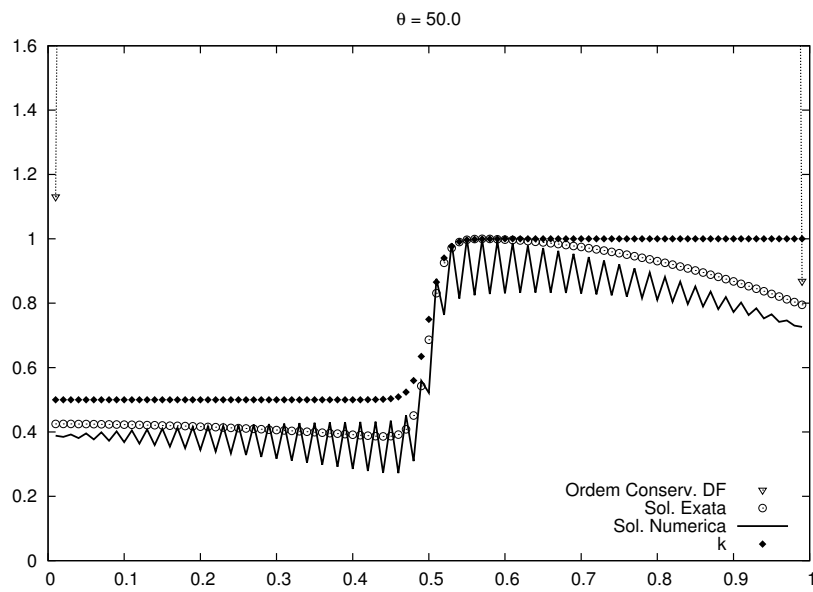


FIG. 7.21: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.

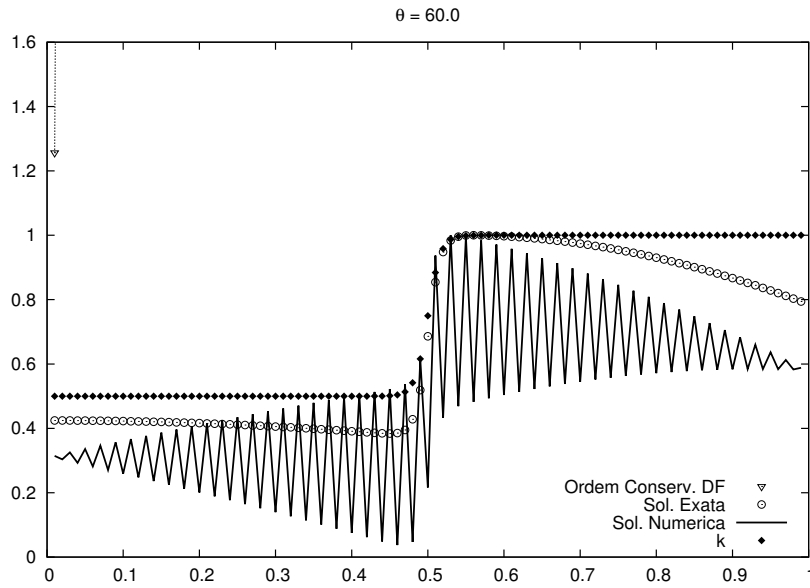


FIG. 7.22: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.

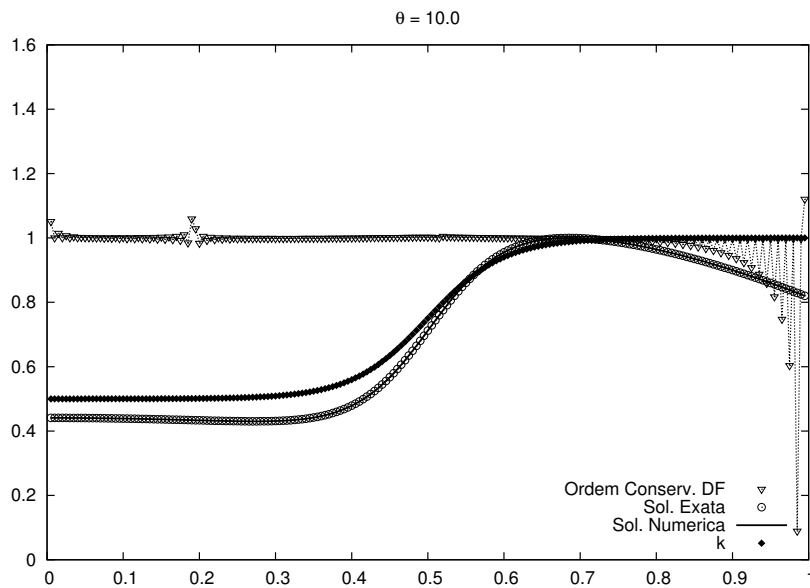


FIG. 7.23: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.

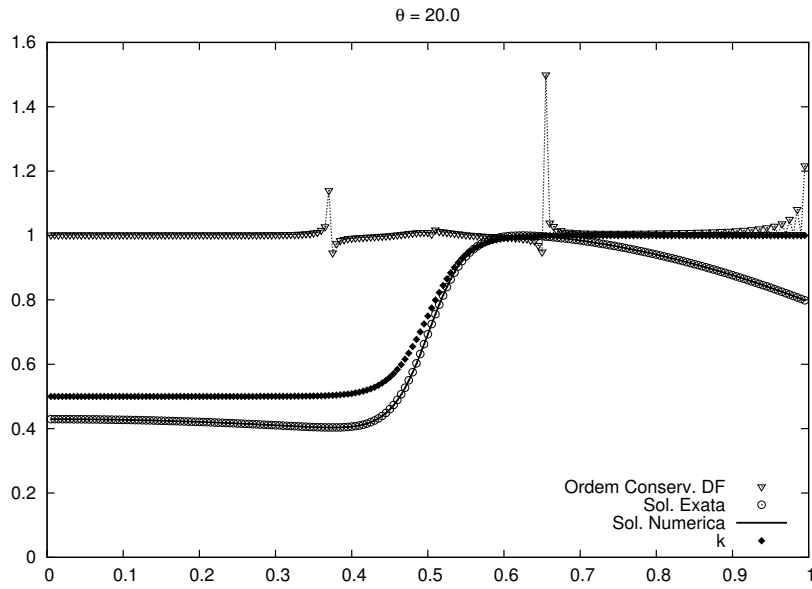


FIG. 7.24: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.

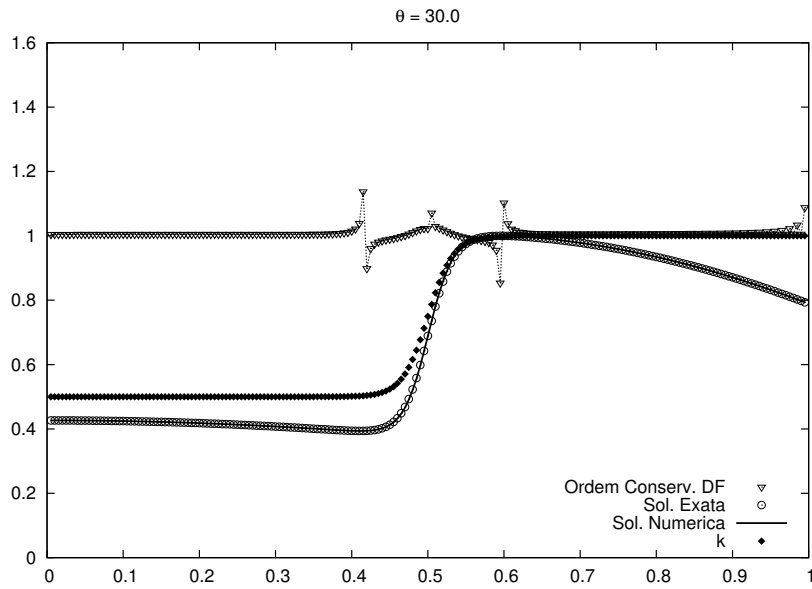


FIG. 7.25: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.

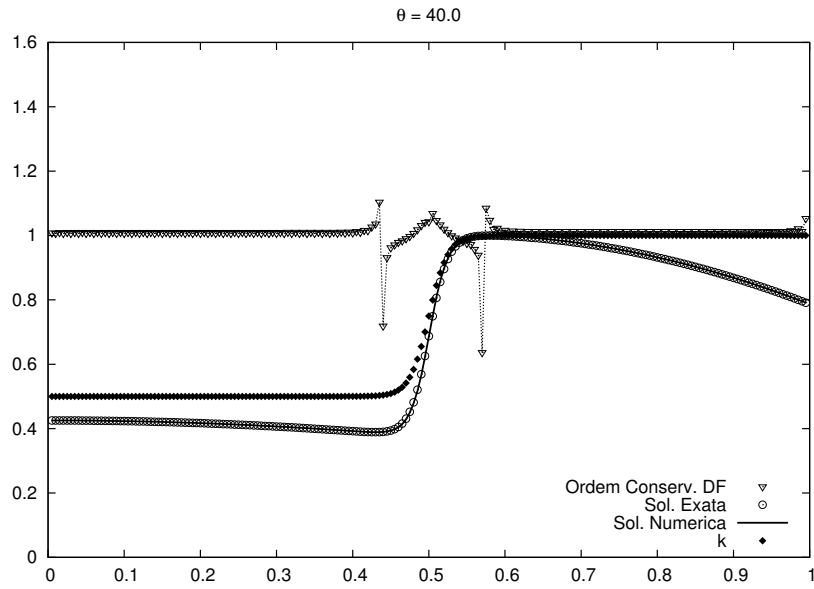


FIG. 7.26: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.

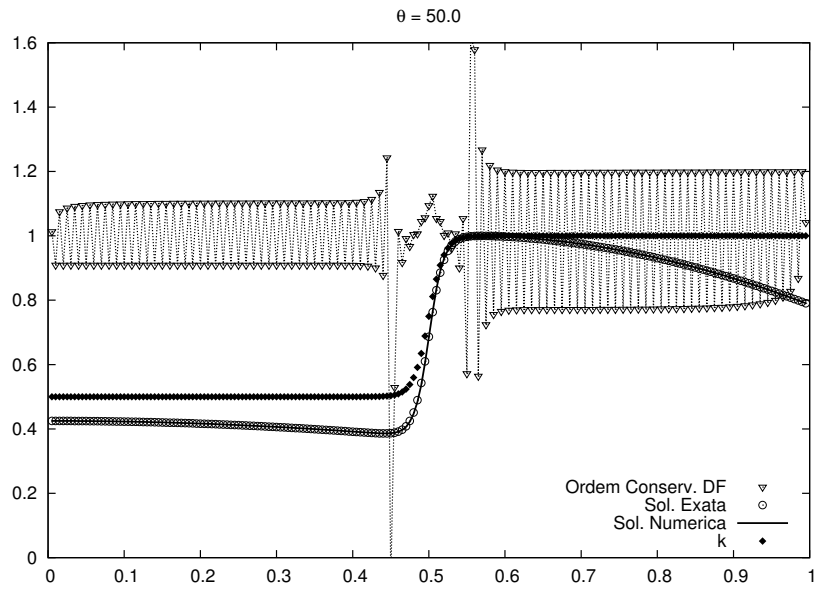


FIG. 7.27: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.

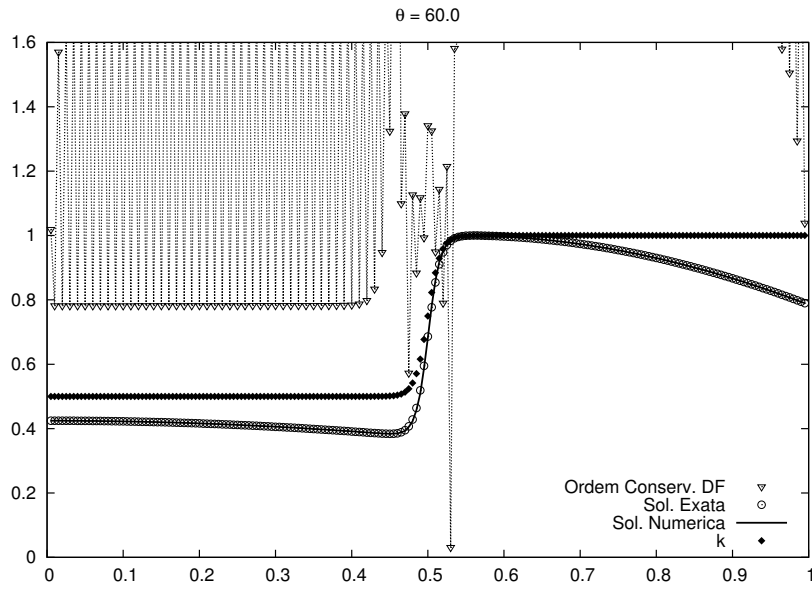


FIG. 7.28: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.

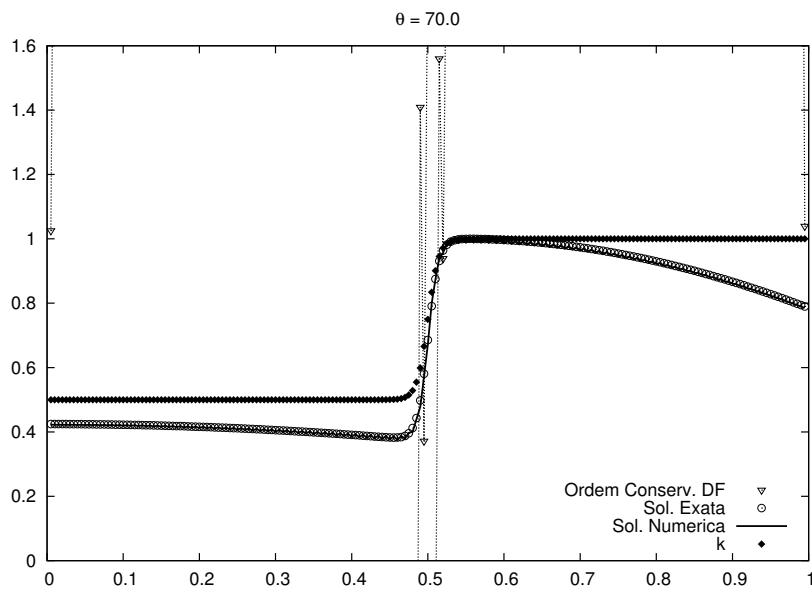


FIG. 7.29: Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.

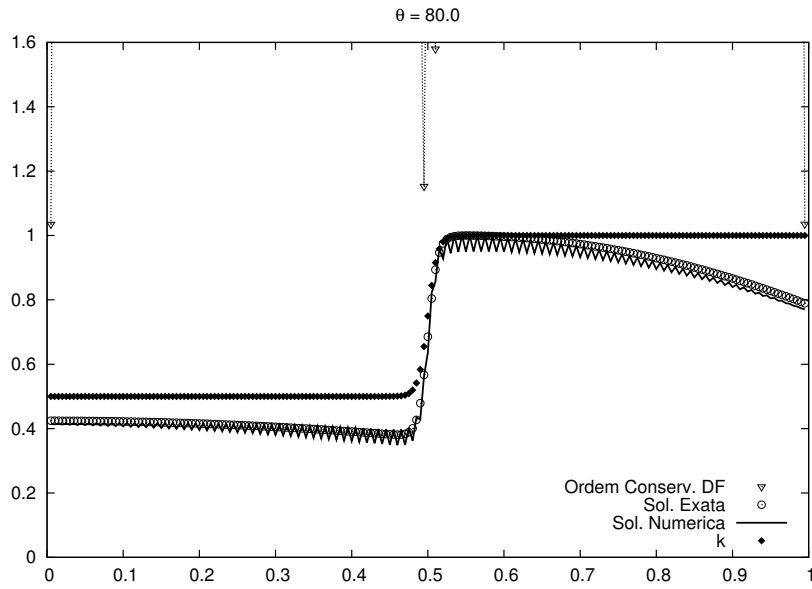


FIG. 7.30: Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.

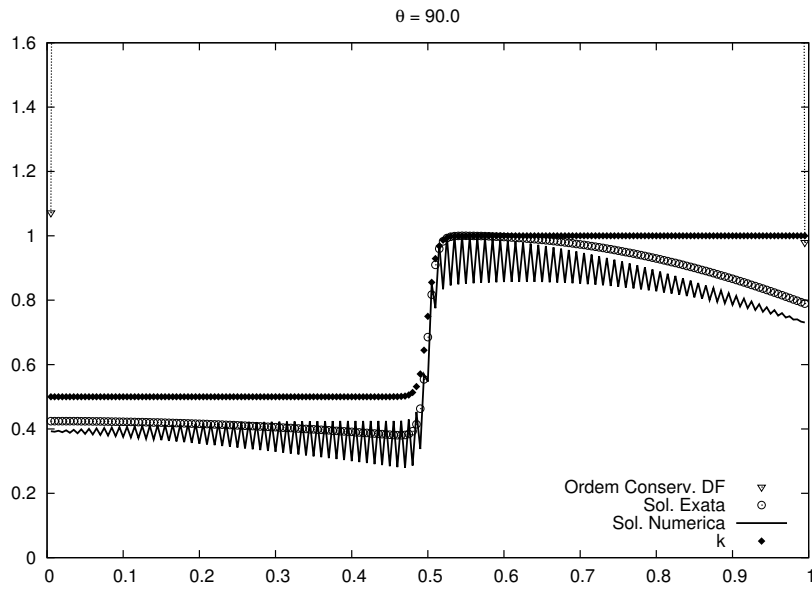


FIG. 7.31: Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.

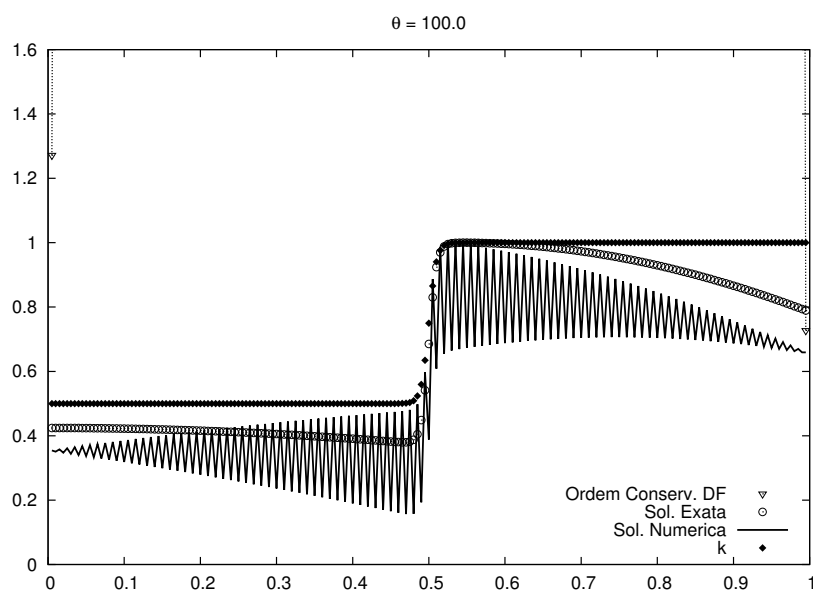


FIG. 7.32: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas.

7.3 APÊNDICE 3: FORMULAÇÃO DE VOLUMES FINITOS TRADICIONAL - 2ª ORDEM

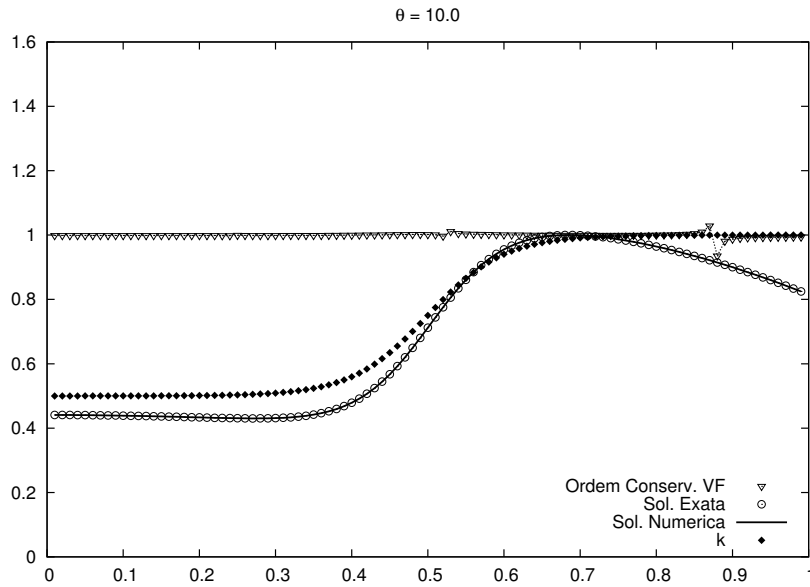


FIG. 7.33: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.

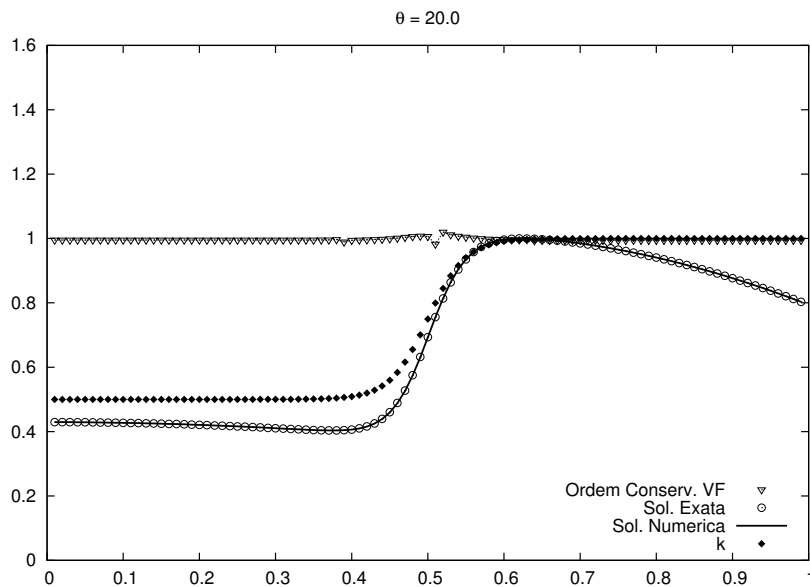


FIG. 7.34: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.

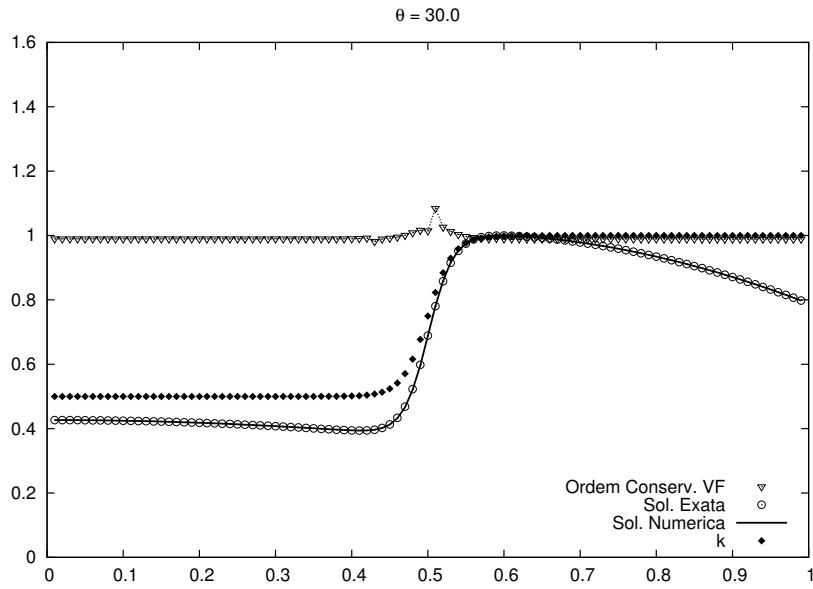


FIG. 7.35: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.

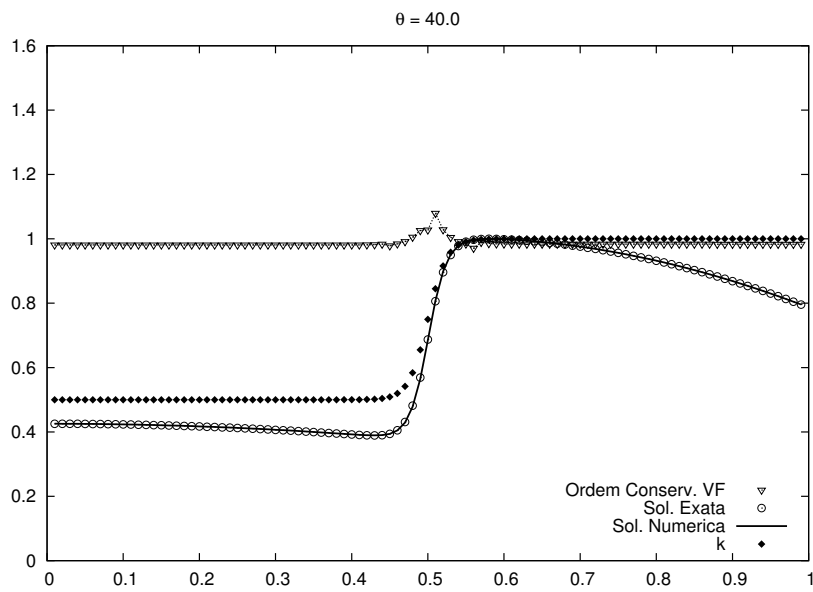


FIG. 7.36: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.

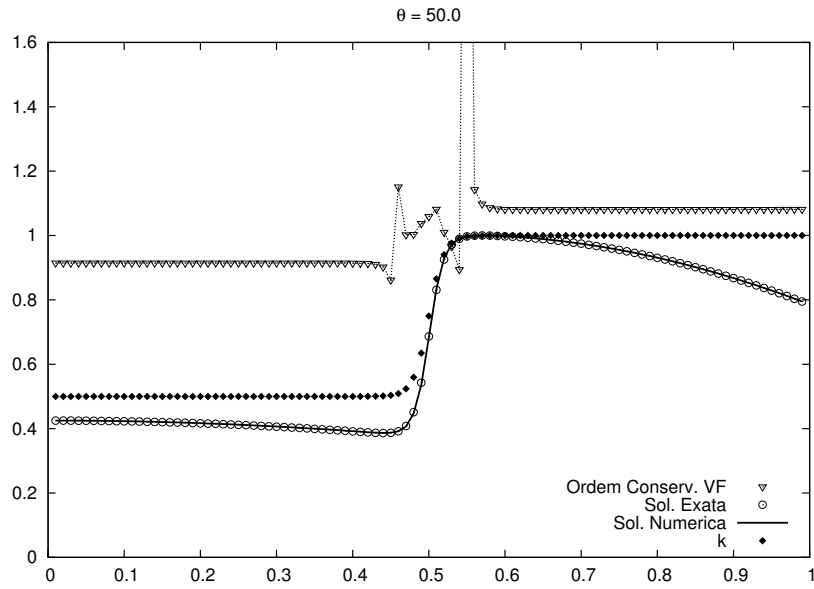


FIG. 7.37: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.

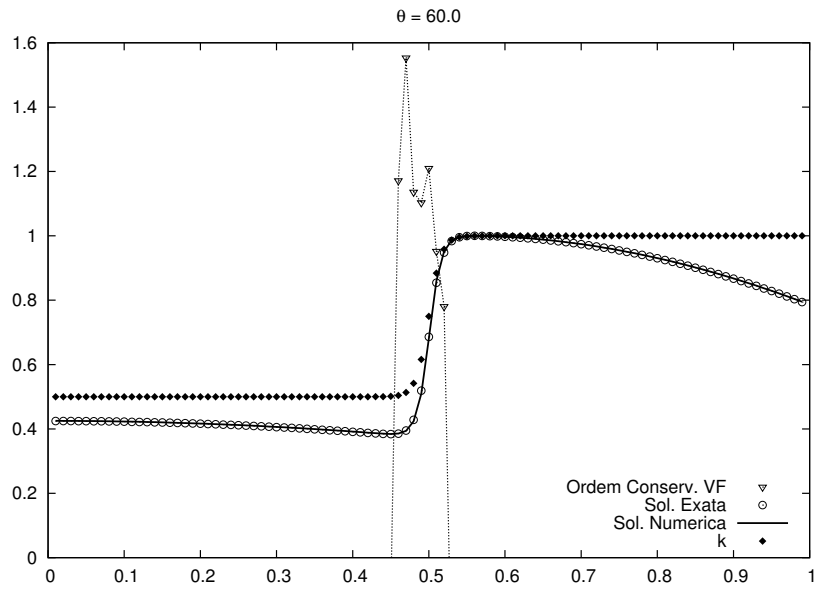


FIG. 7.38: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.

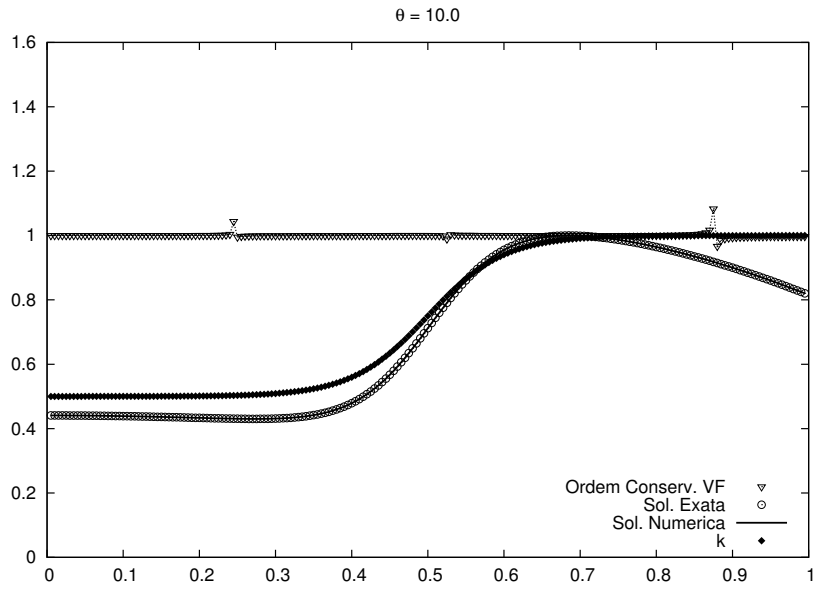


FIG. 7.39: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.

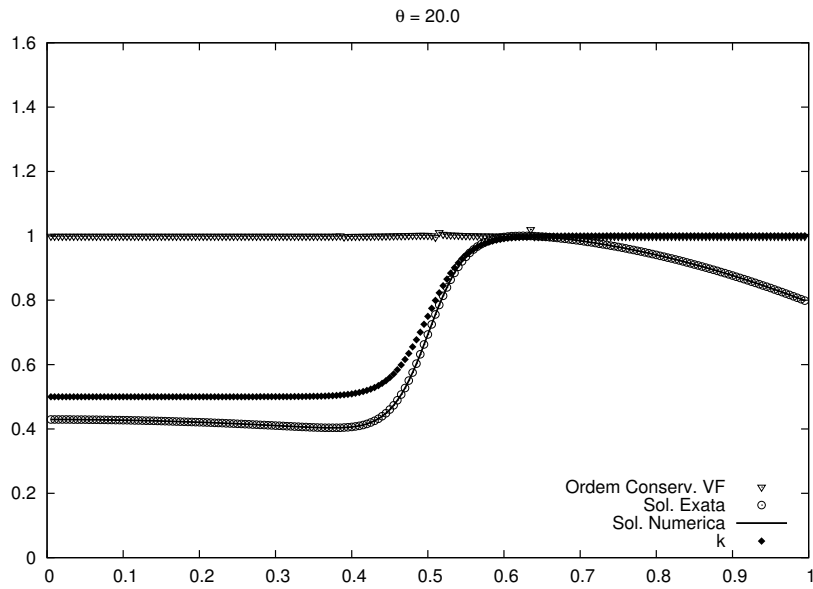


FIG. 7.40: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.

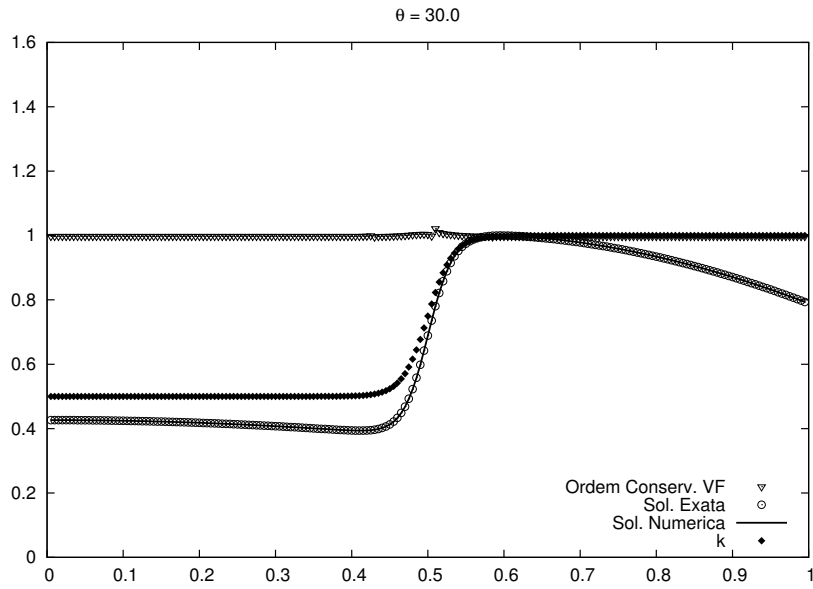


FIG. 7.41: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.

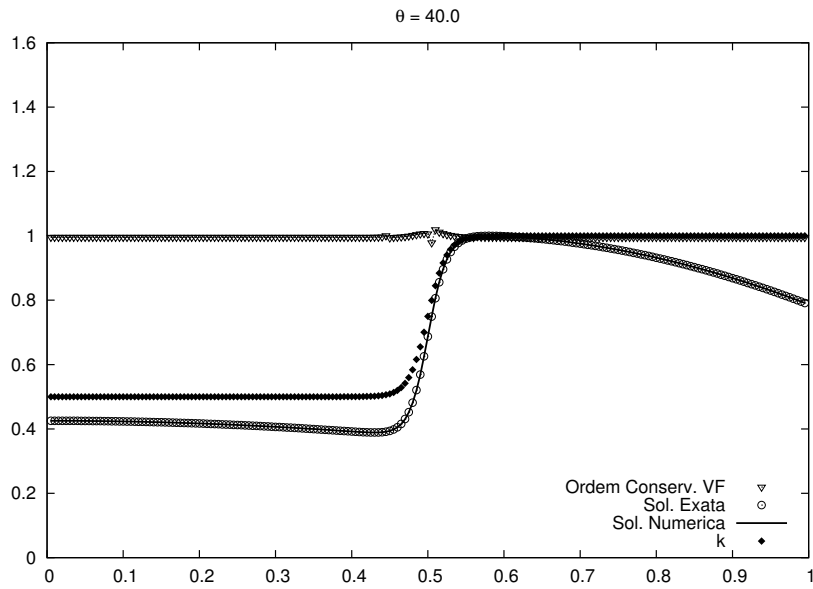


FIG. 7.42: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.

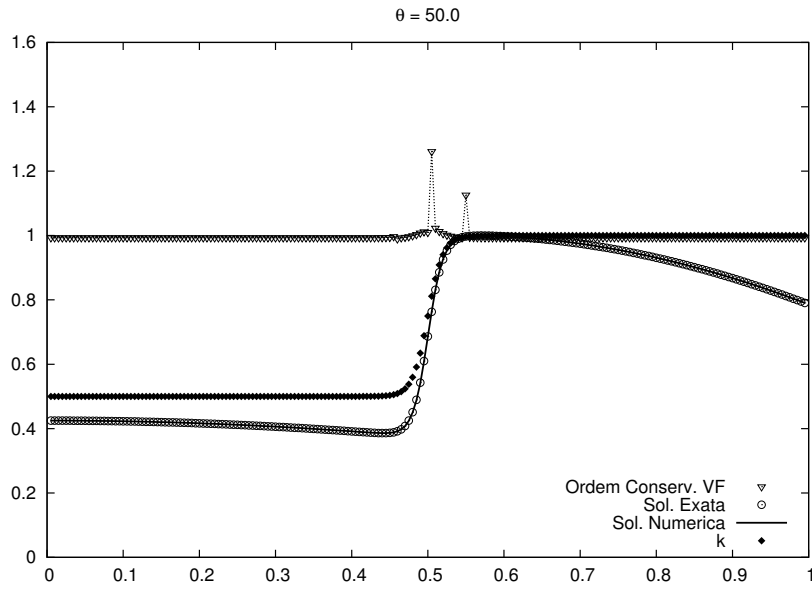


FIG. 7.43: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.

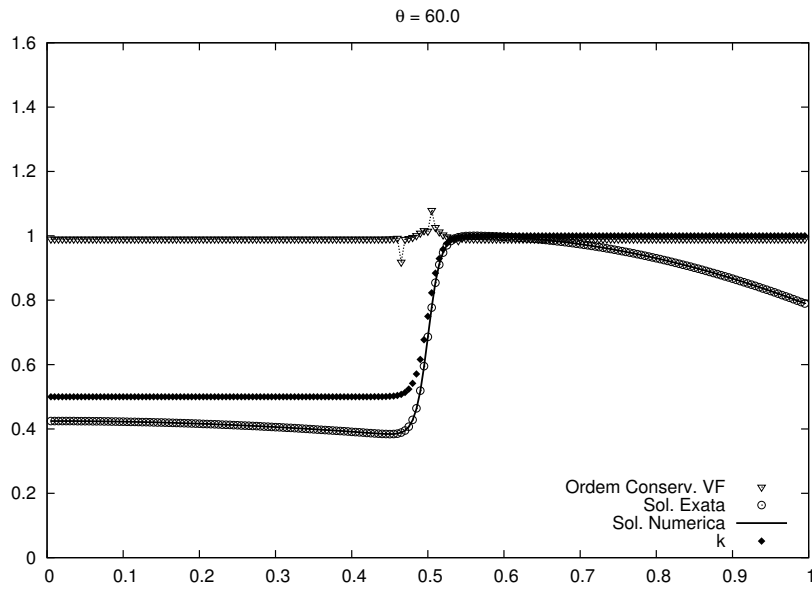


FIG. 7.44: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.

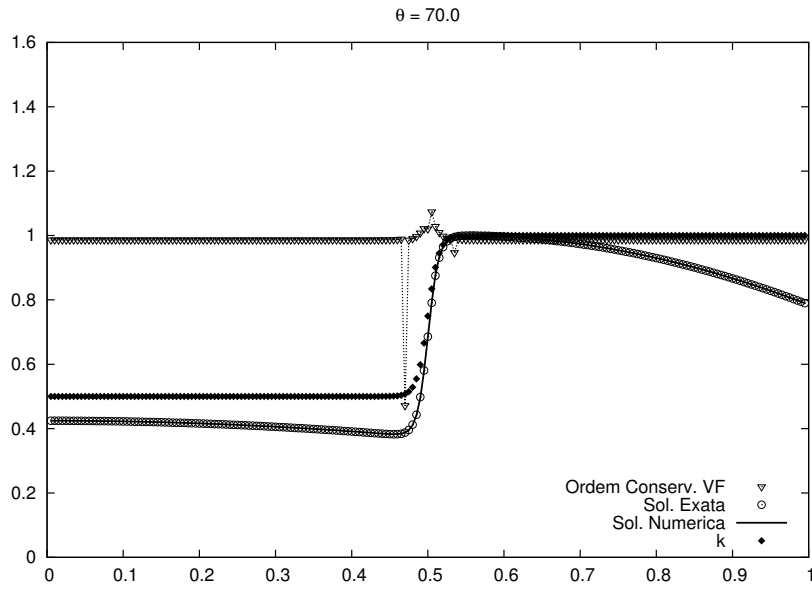


FIG. 7.45: Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.

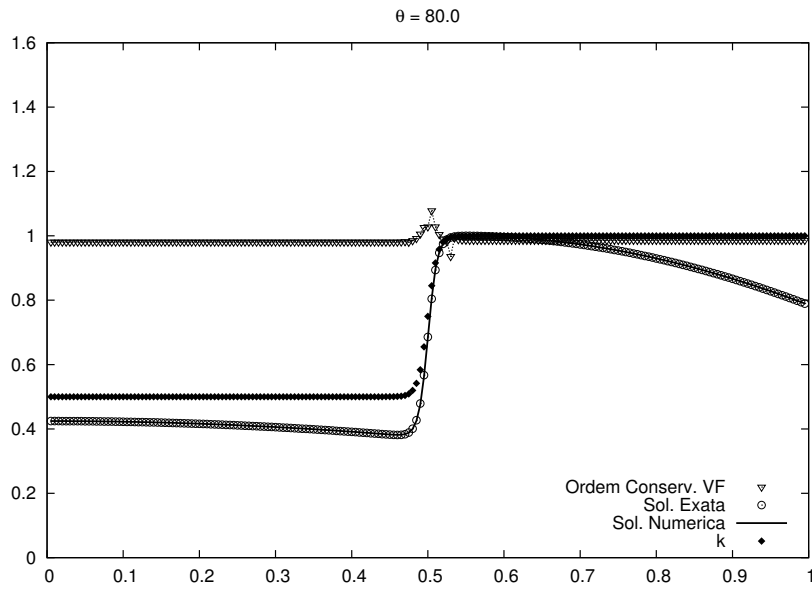


FIG. 7.46: Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.

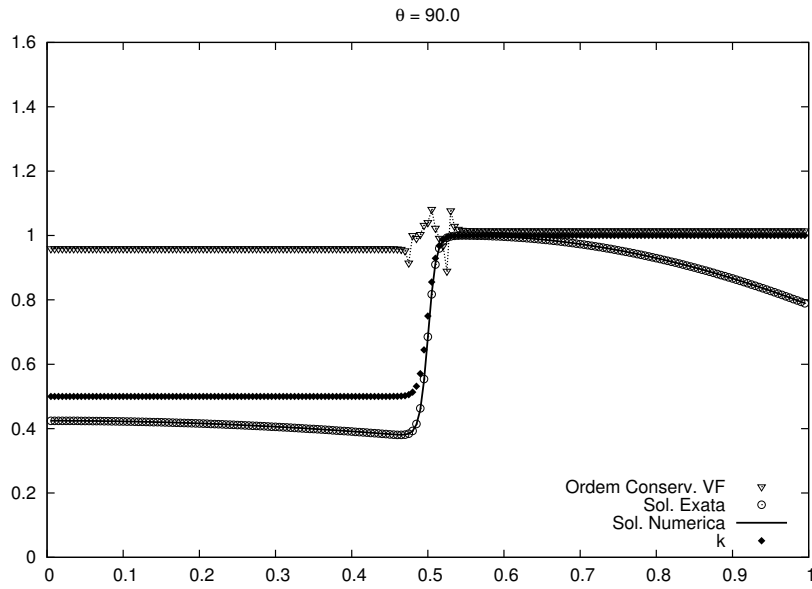


FIG. 7.47: Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.

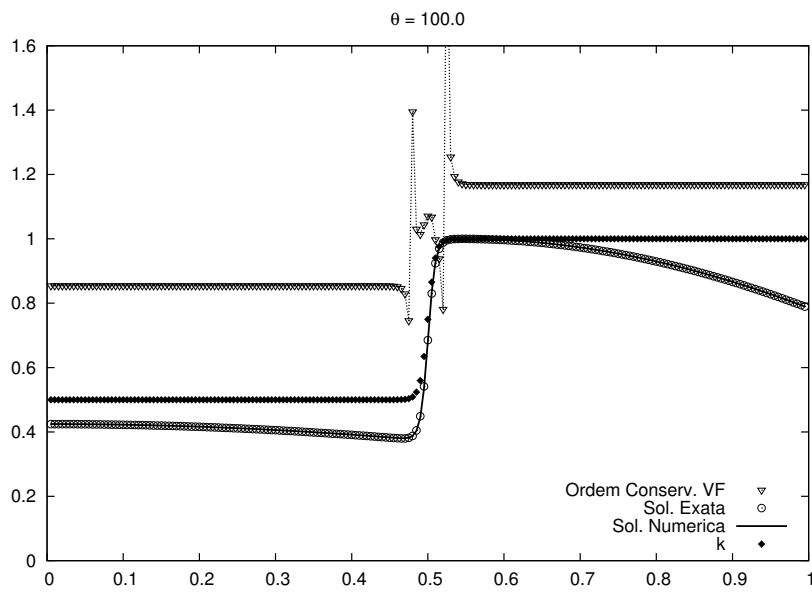


FIG. 7.48: Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Volumes Finitos.

7.4 APÊNDICE 4: FORMULAÇÃO CONSERVATIVA DE VOLUMES FINITOS SA 2(0)

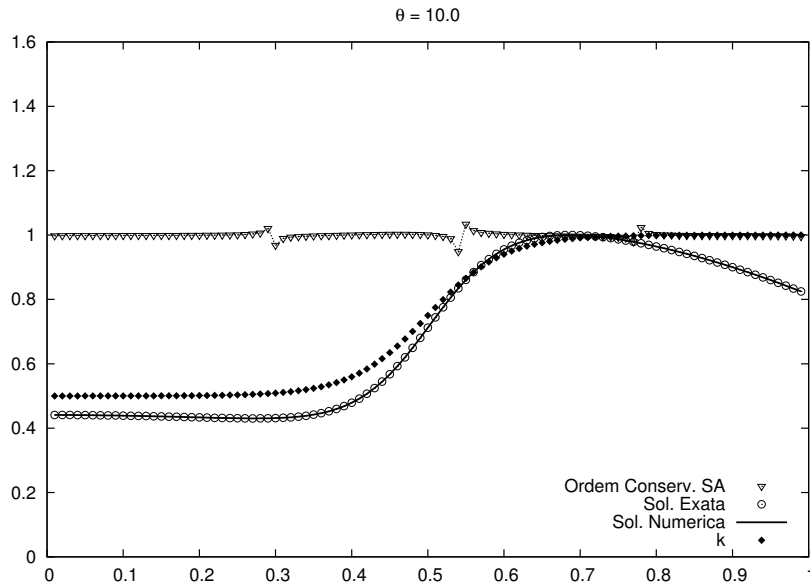


FIG. 7.49: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.

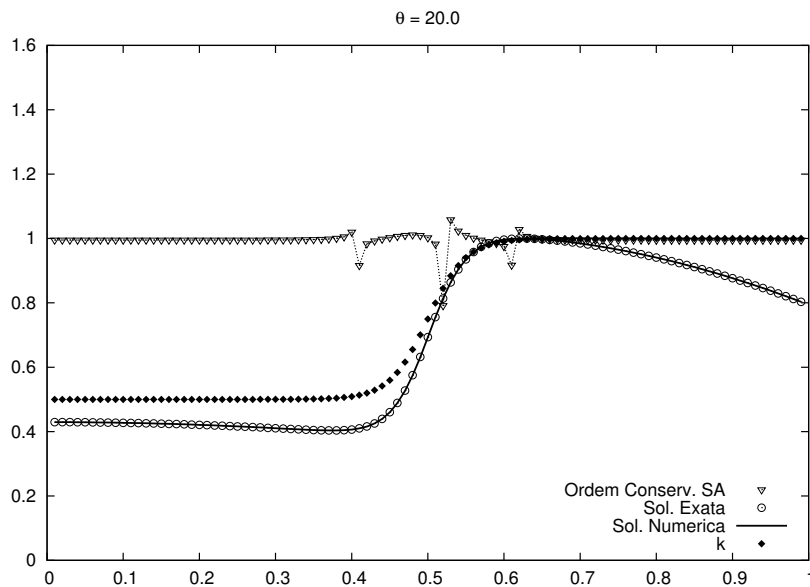


FIG. 7.50: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.

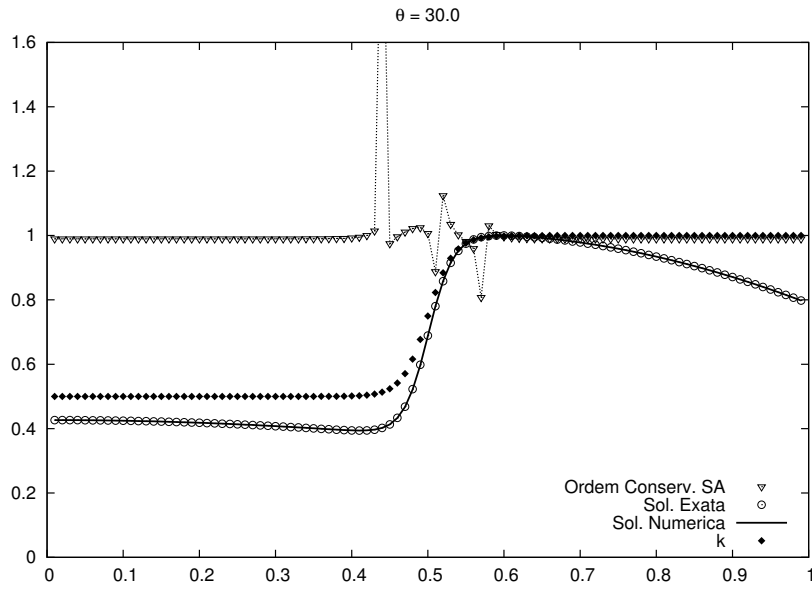


FIG. 7.51: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.

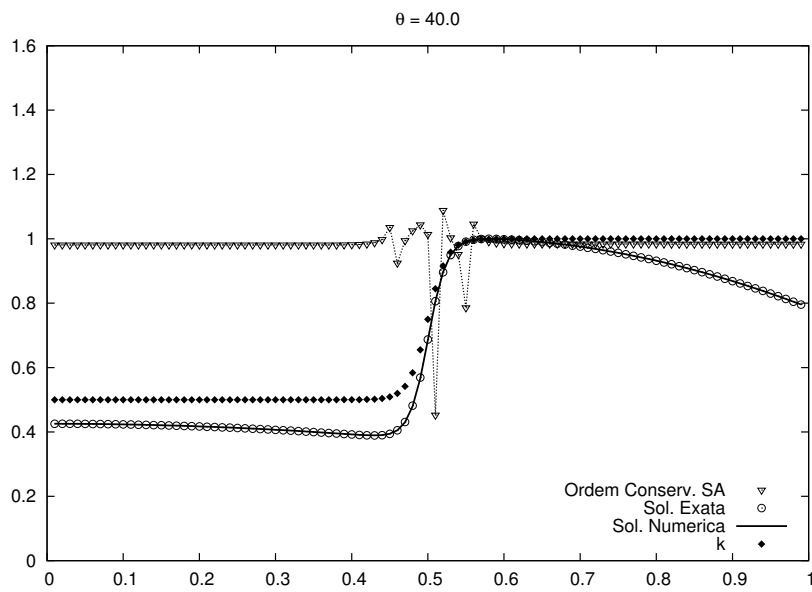


FIG. 7.52: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.

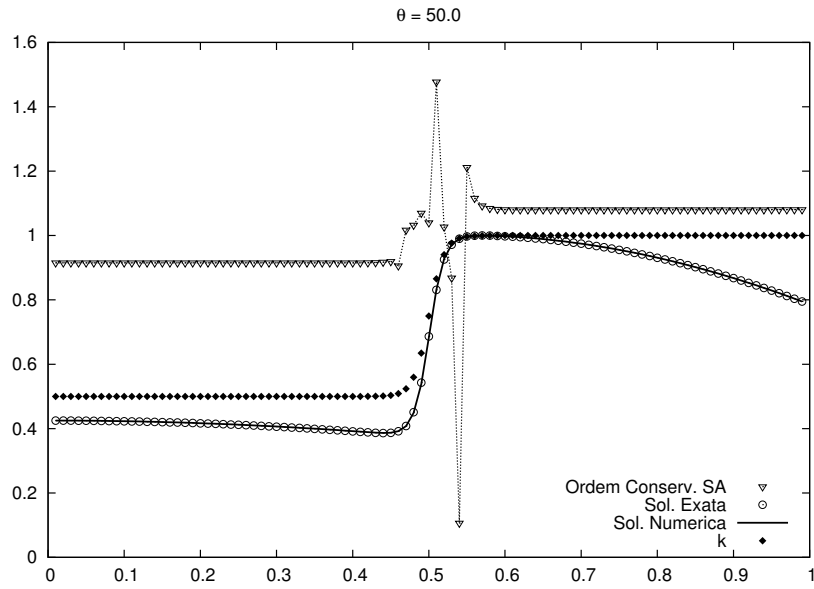


FIG. 7.53: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.

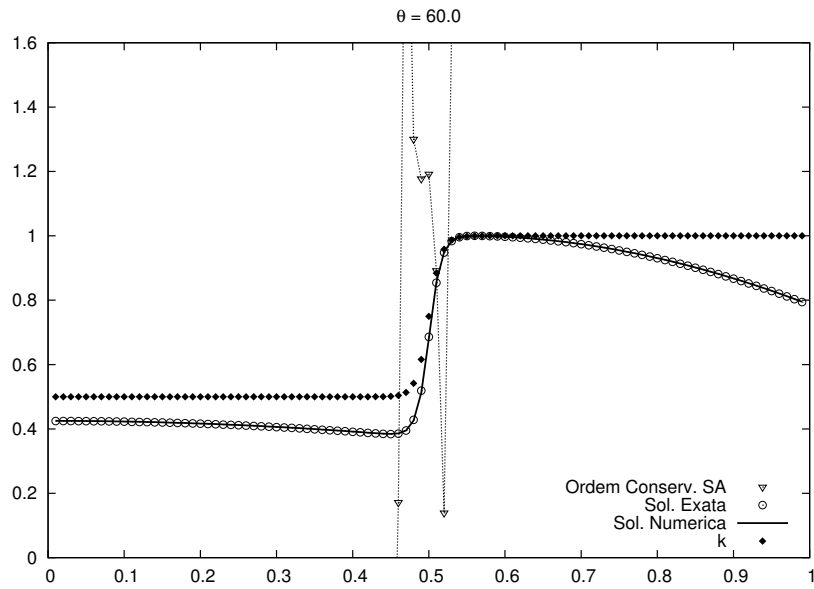


FIG. 7.54: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.

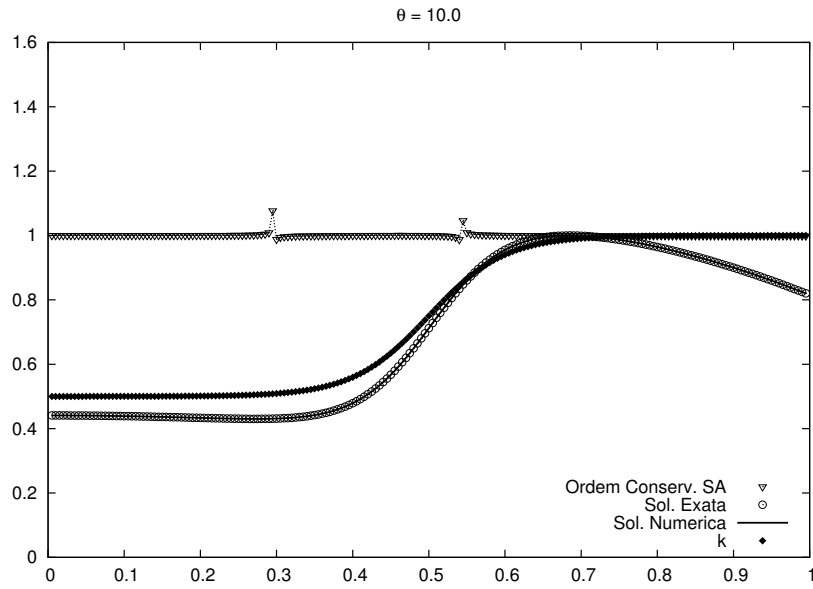


FIG. 7.55: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.

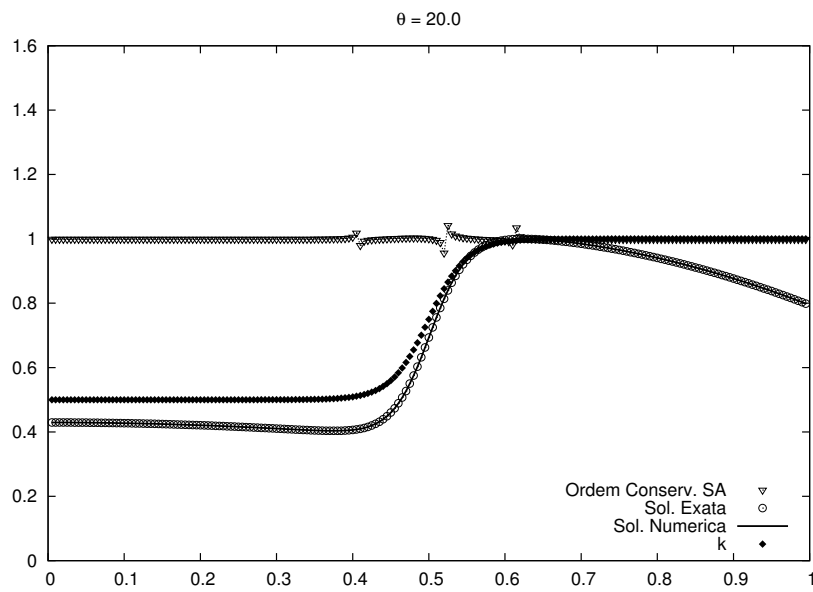


FIG. 7.56: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.

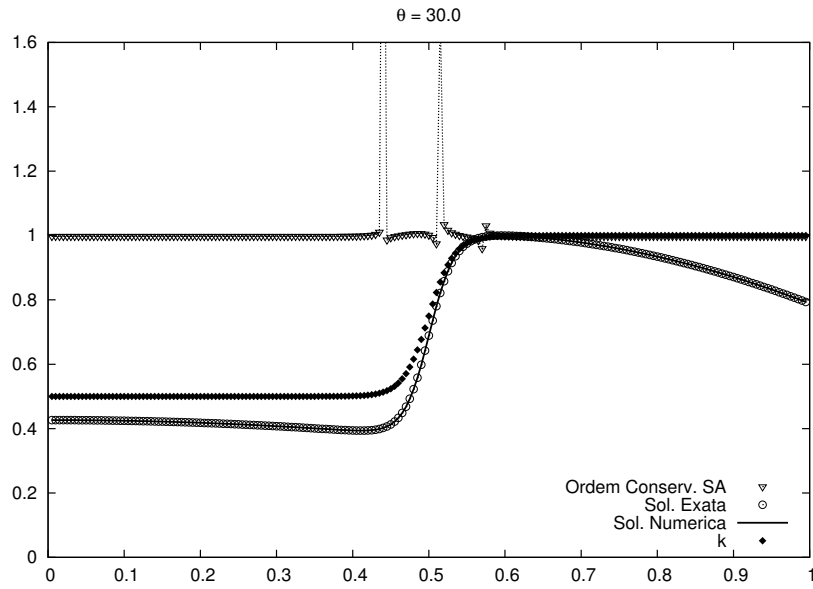


FIG. 7.57: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.

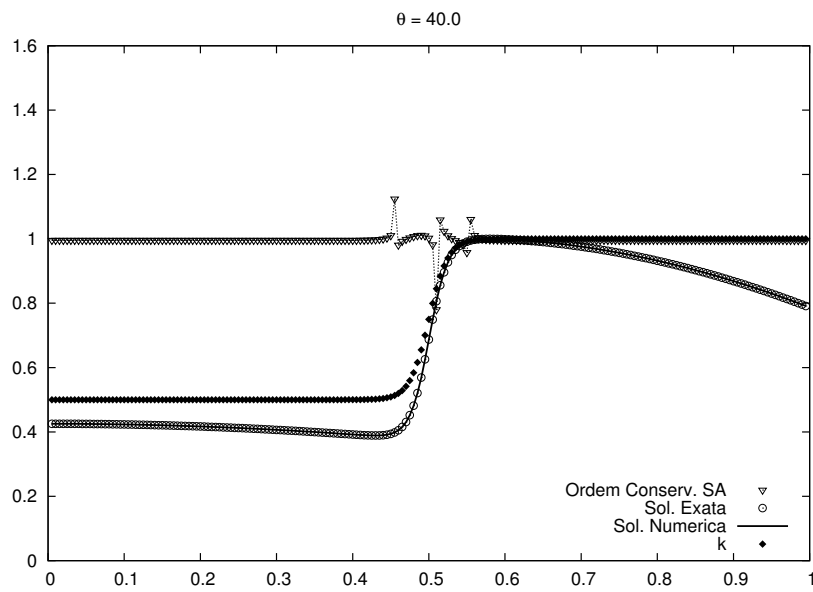


FIG. 7.58: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.

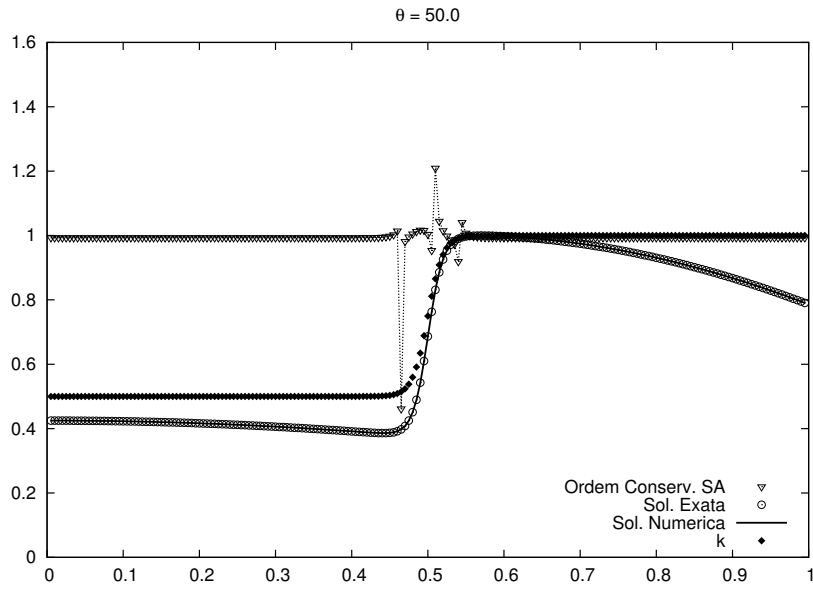


FIG. 7.59: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.

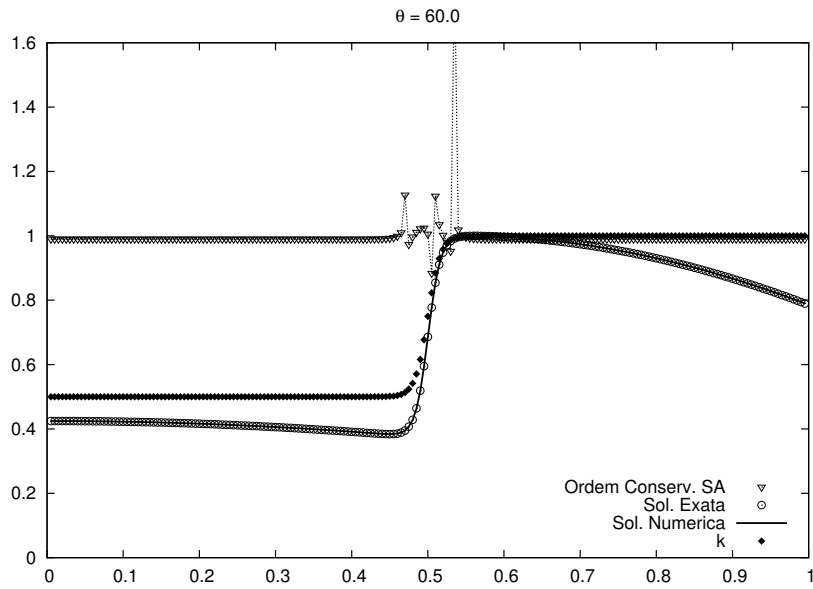


FIG. 7.60: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.

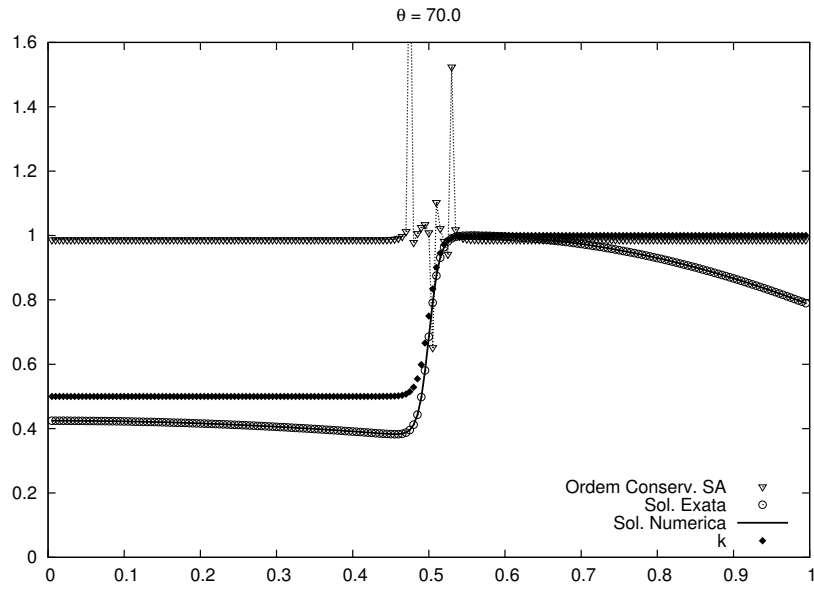


FIG. 7.61: Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.

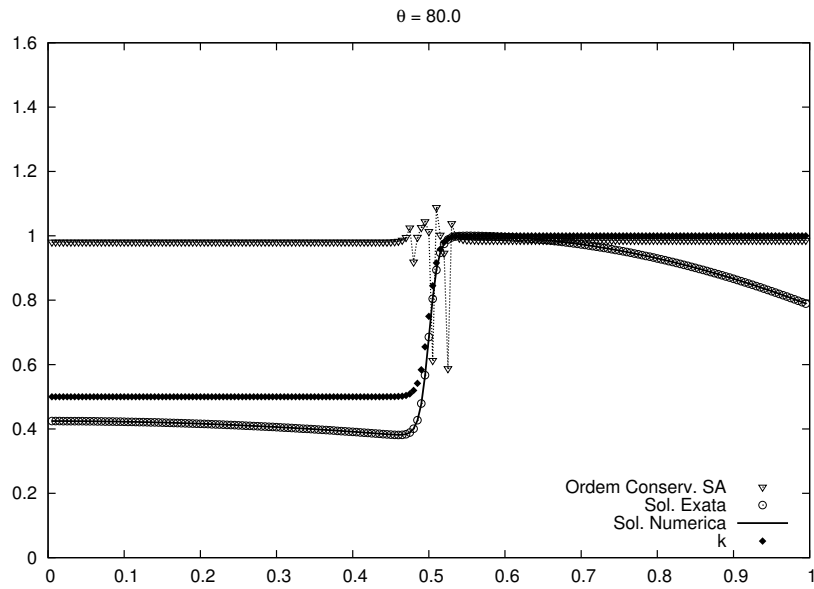


FIG. 7.62: Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.

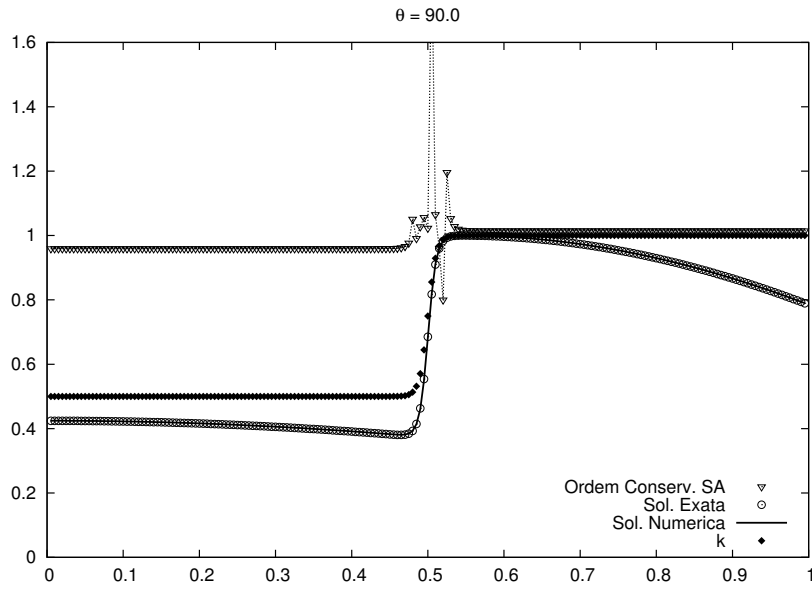


FIG. 7.63: Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.

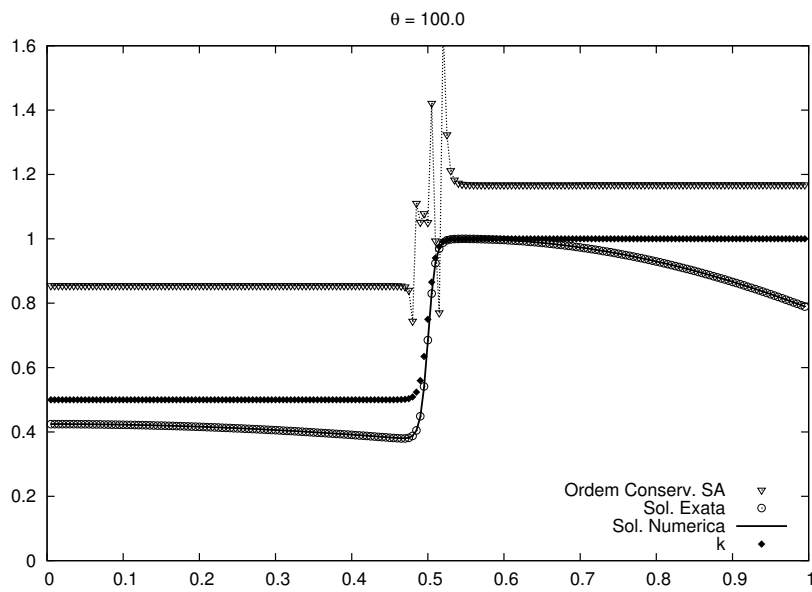


FIG. 7.64: Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 1 de Segunda Ordem.

7.5 APÊNDICE 5: FORMULAÇÃO CONSERVATIVA DE VOLUMES FINITOS SA 2(1)

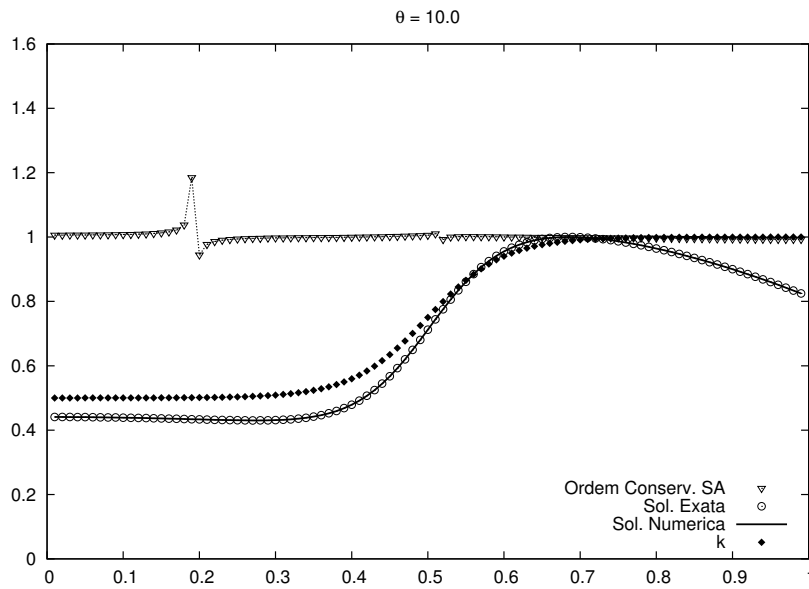


FIG. 7.65: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

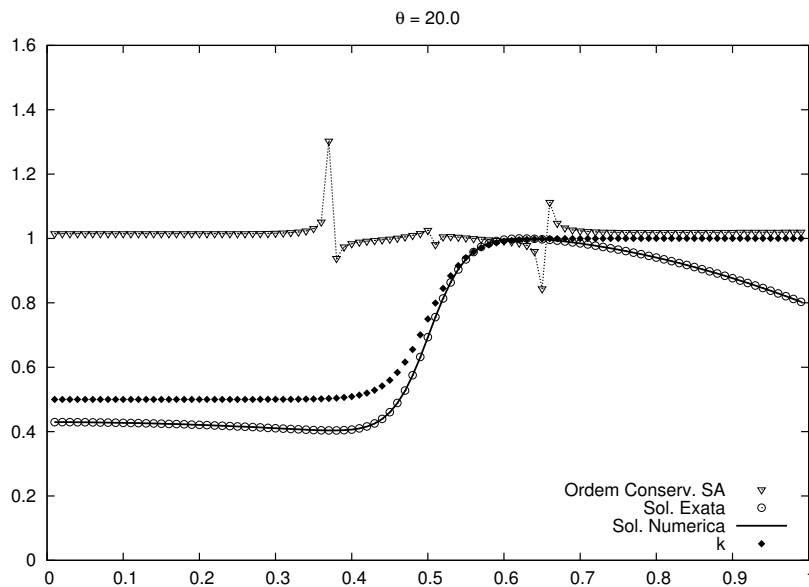


FIG. 7.66: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

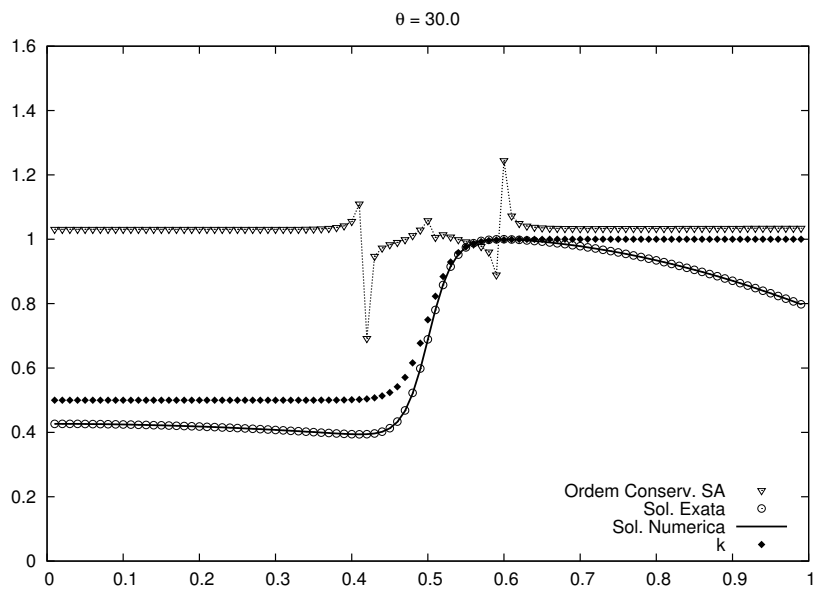


FIG. 7.67: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

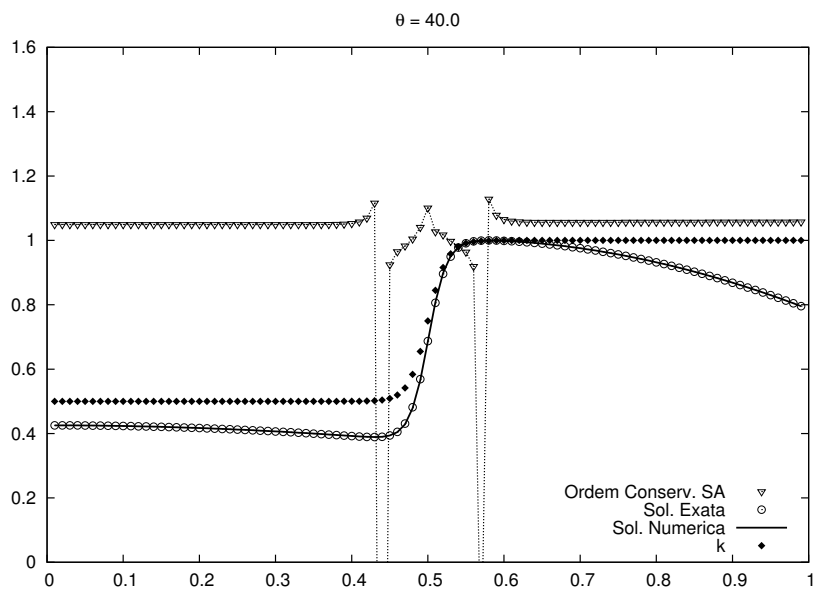


FIG. 7.68: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

A seguir, mesma análise com a malha maior.

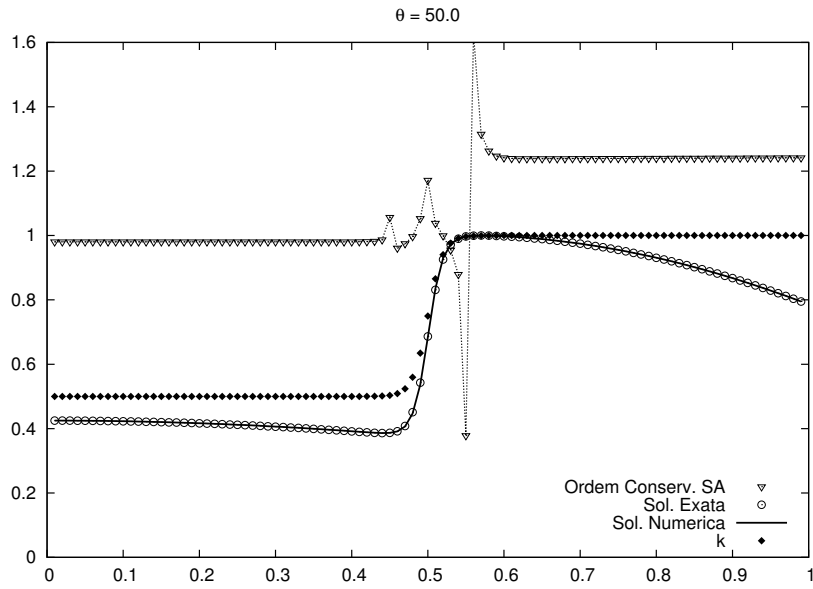


FIG. 7.69: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

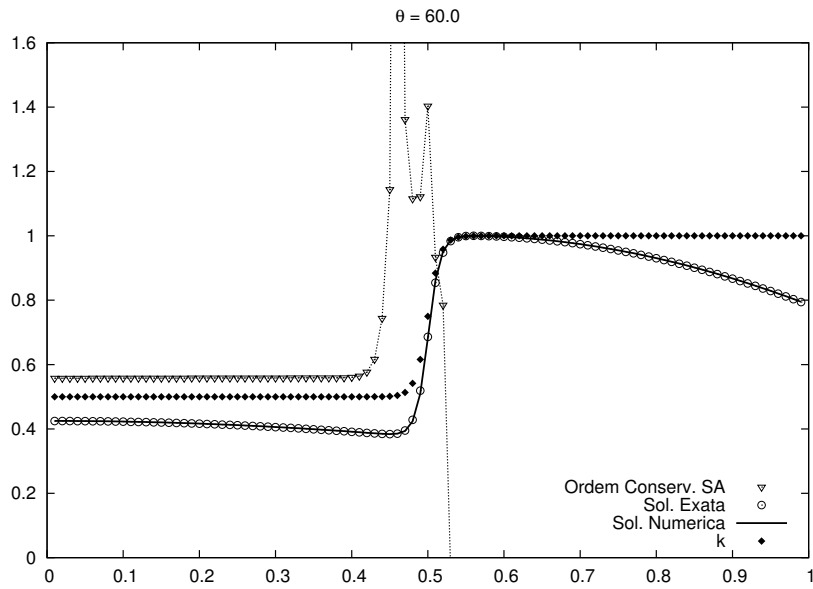


FIG. 7.70: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

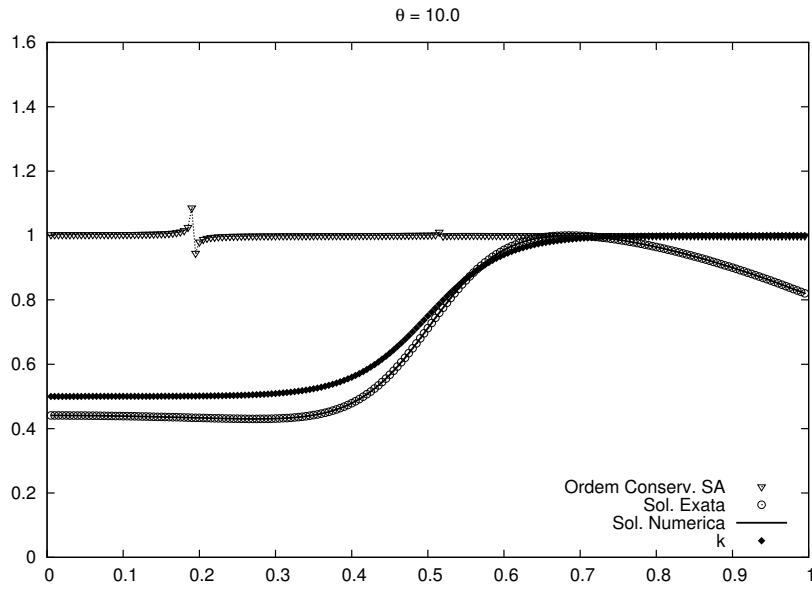


FIG. 7.71: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

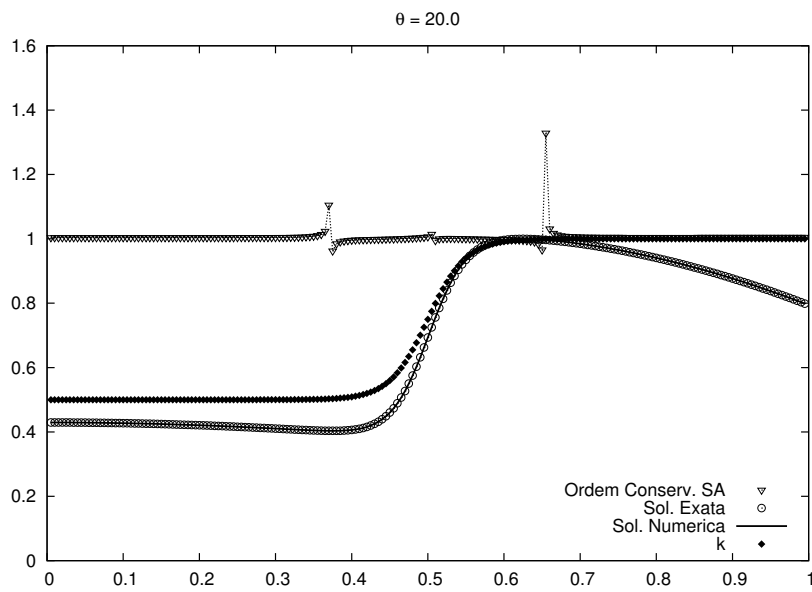


FIG. 7.72: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

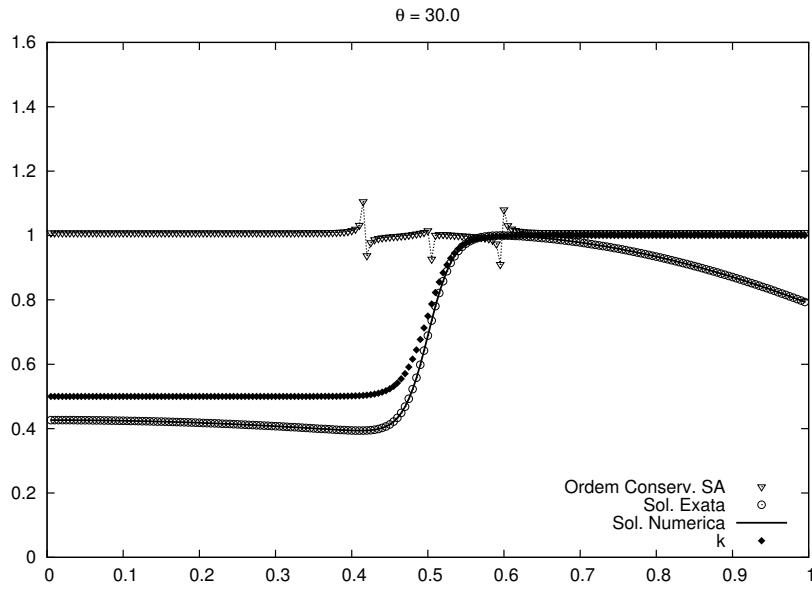


FIG. 7.73: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

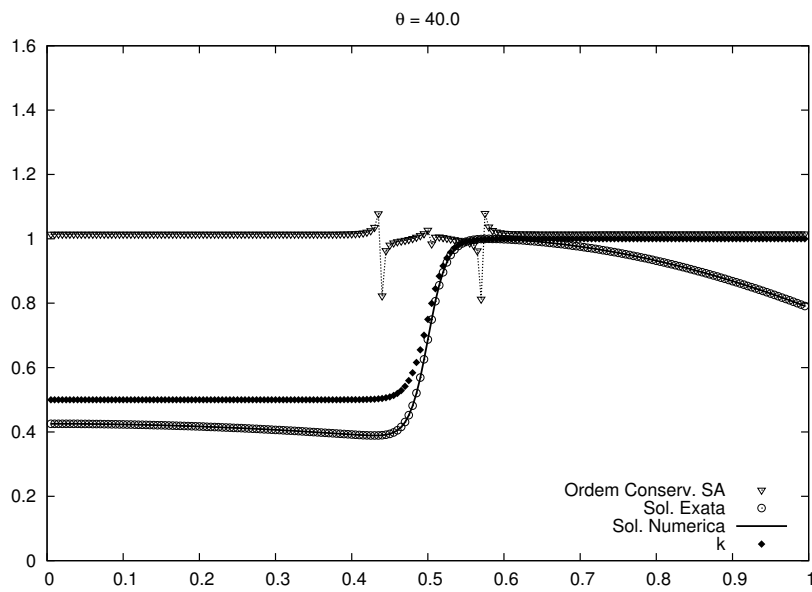


FIG. 7.74: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

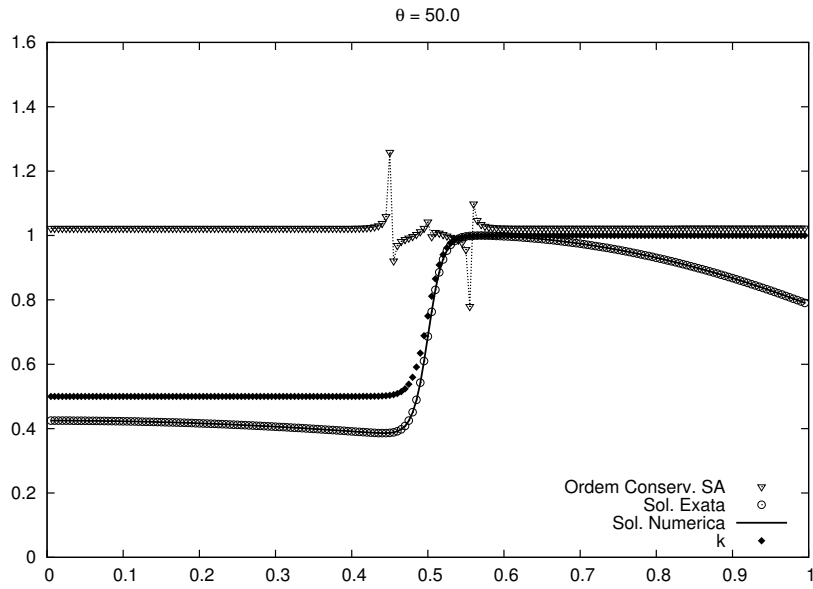


FIG. 7.75: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

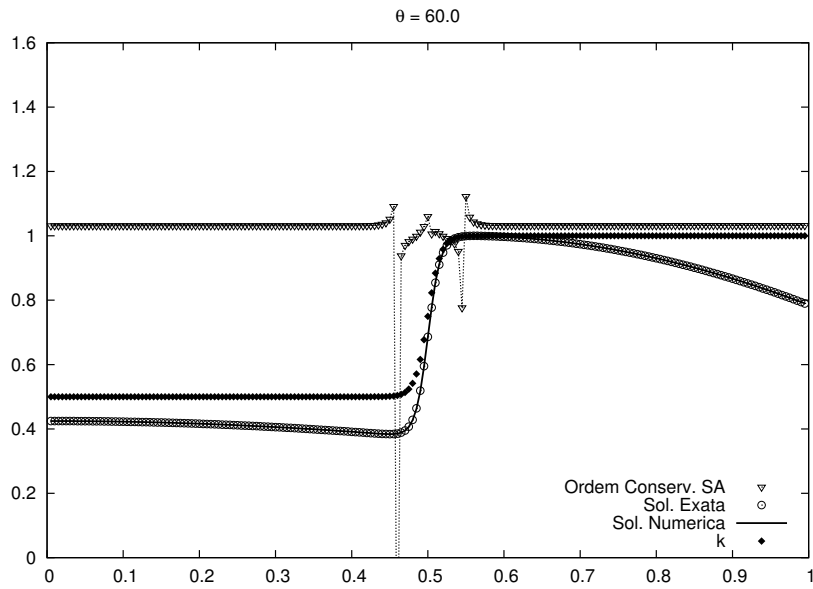


FIG. 7.76: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

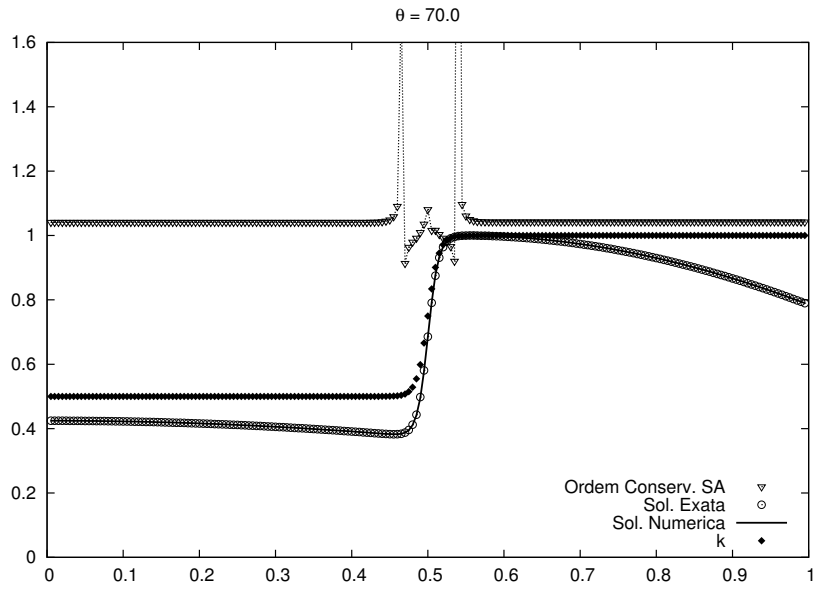


FIG. 7.77: Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

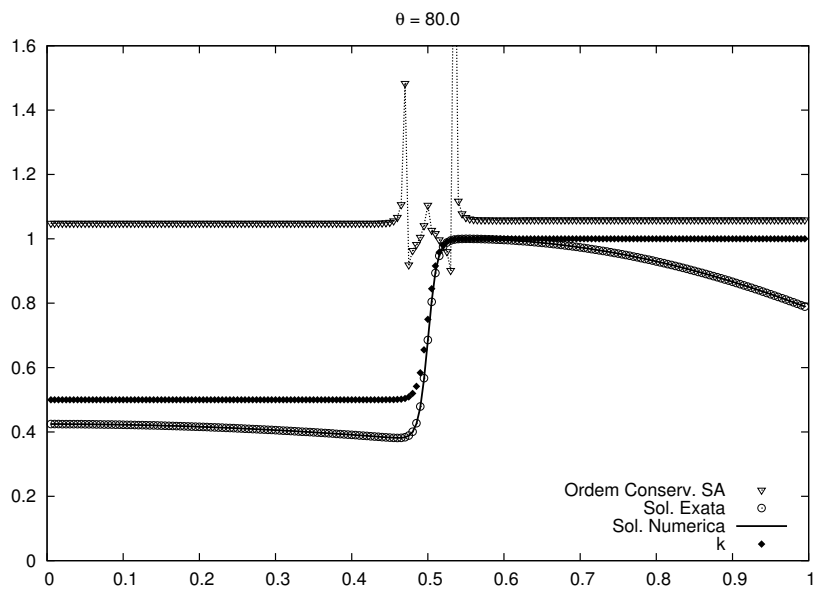


FIG. 7.78: Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

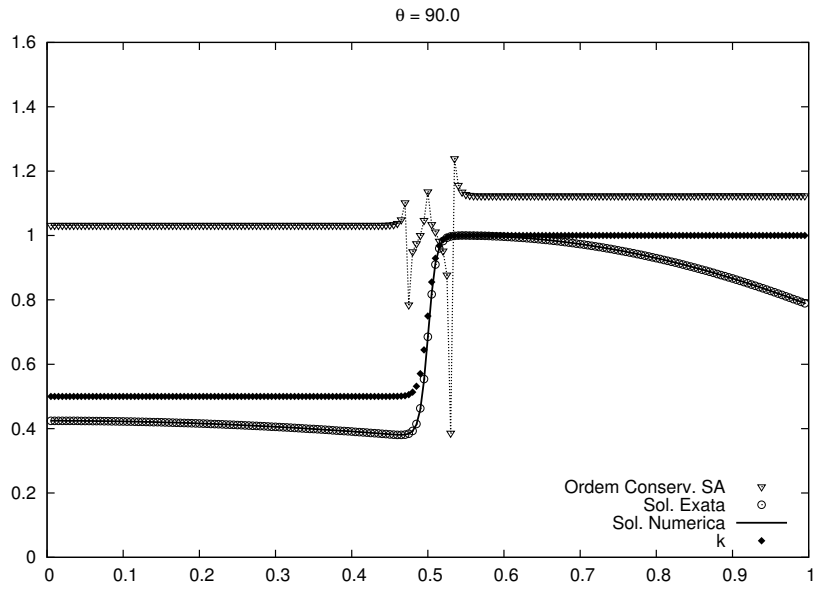


FIG. 7.79: Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

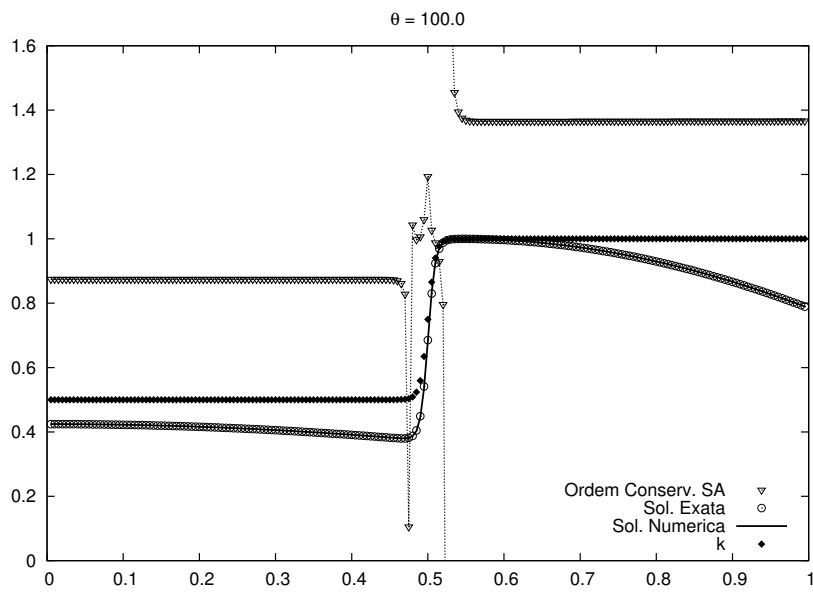


FIG. 7.80: Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

7.6 APÊNDICE 6: FORMULAÇÃO CONSERVATIVA DE VOLUMES FINITOS SA 2(2)

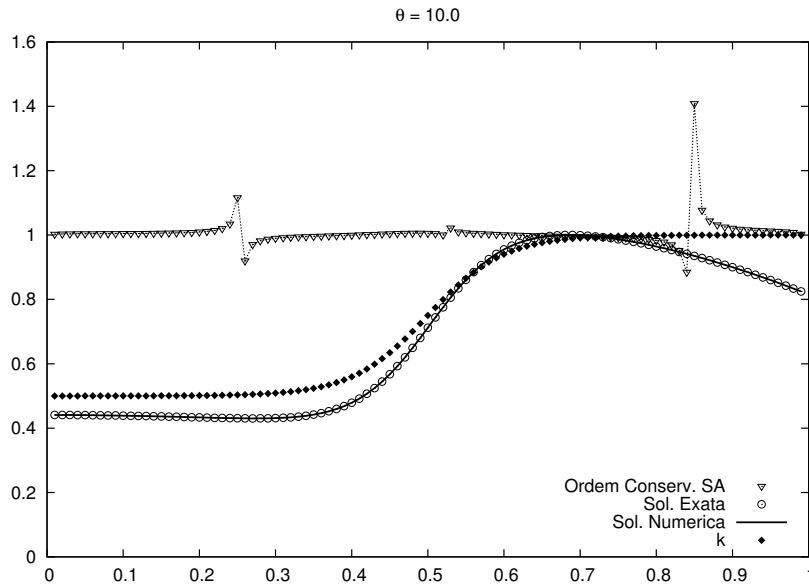


FIG. 7.81: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

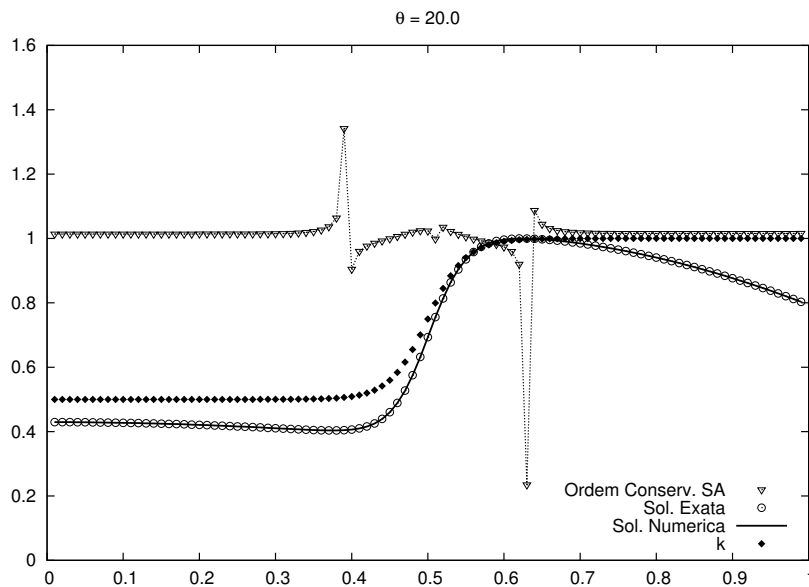


FIG. 7.82: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

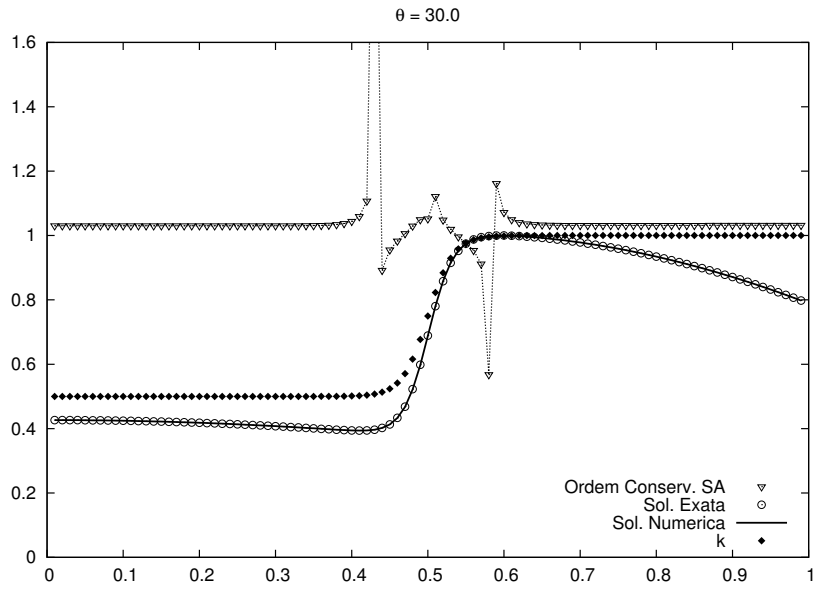


FIG. 7.83: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

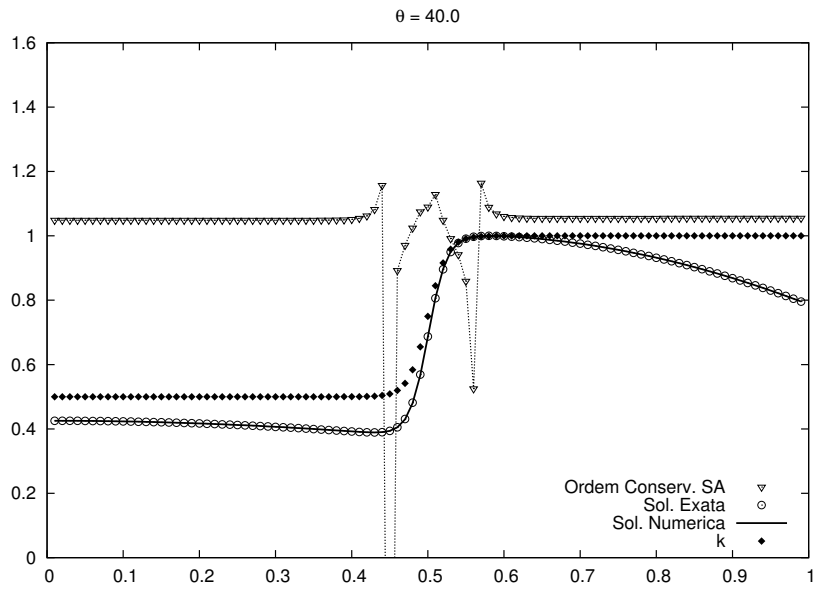


FIG. 7.84: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

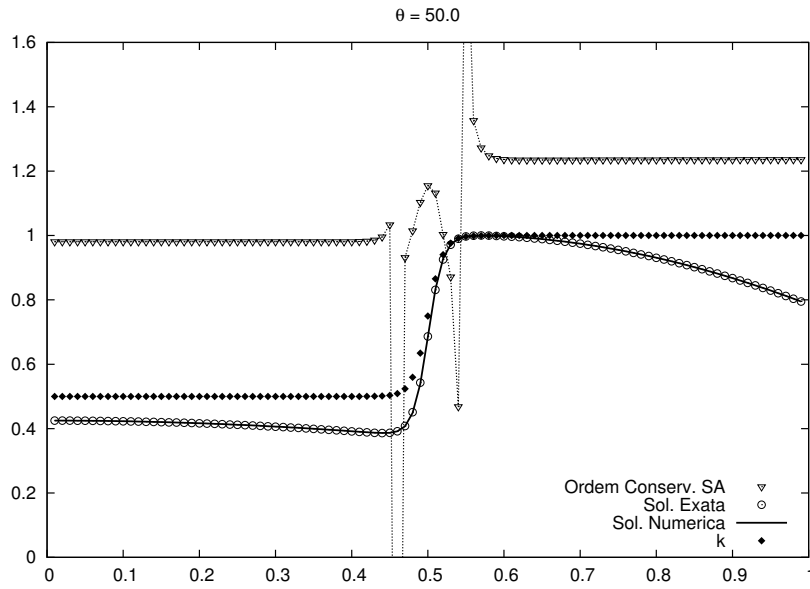


FIG. 7.85: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

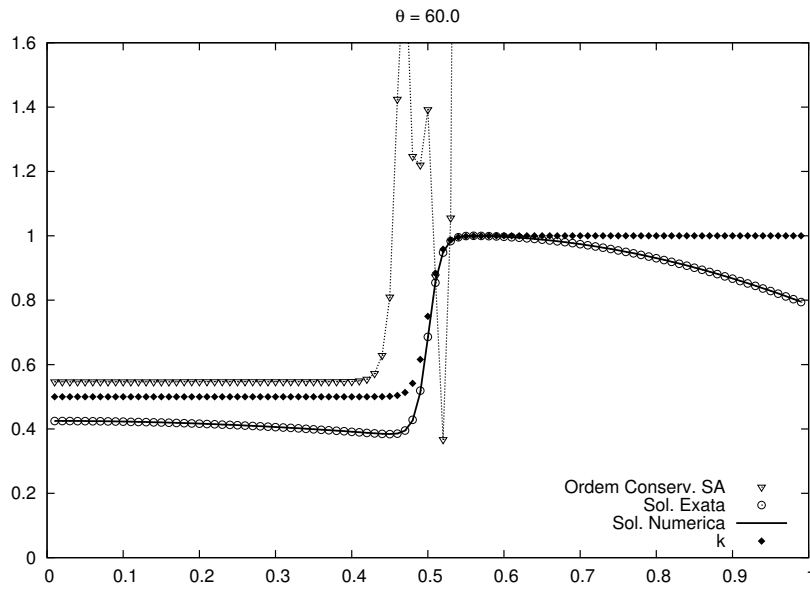


FIG. 7.86: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

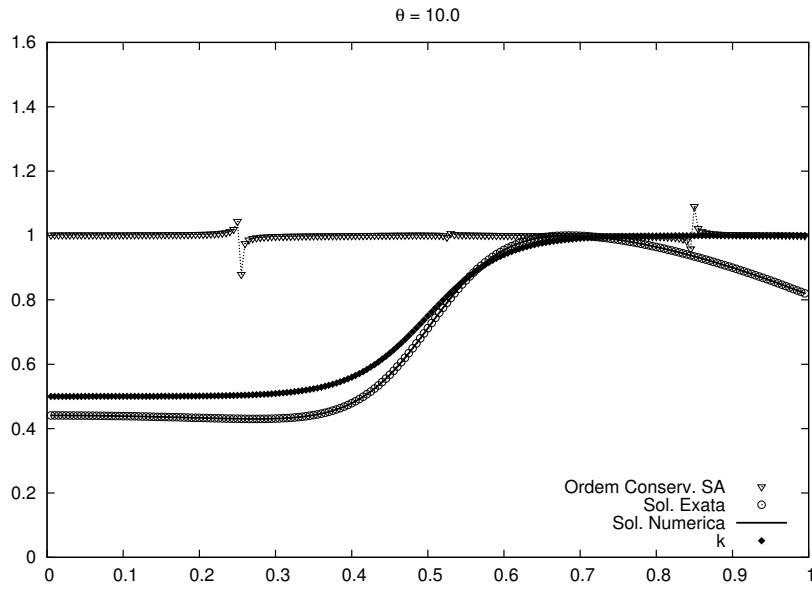


FIG. 7.87: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

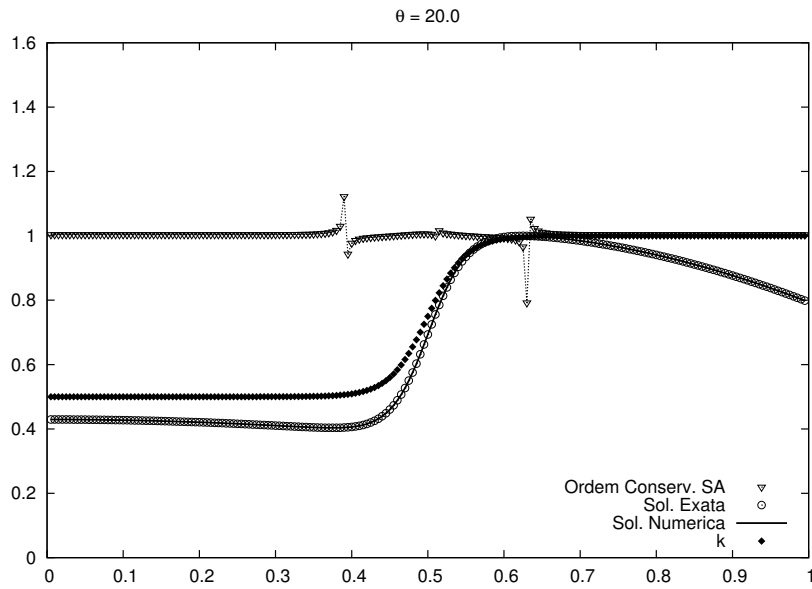


FIG. 7.88: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

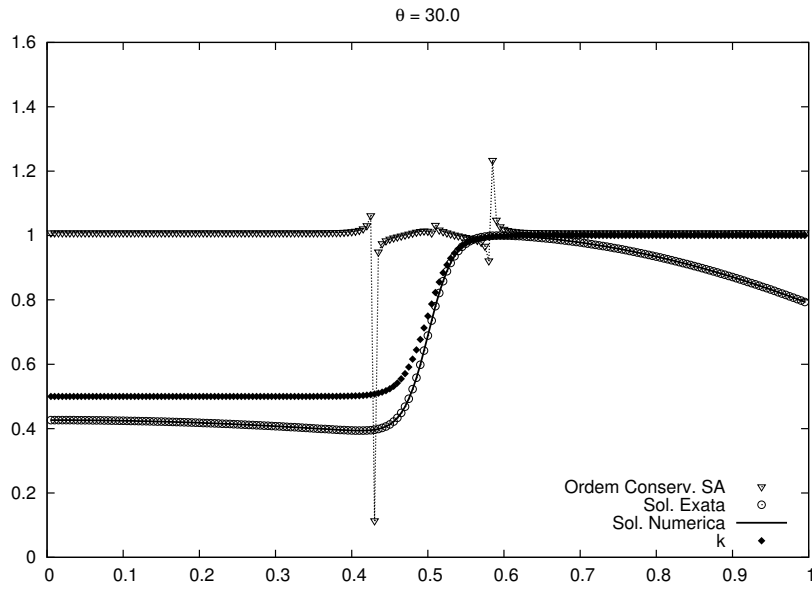


FIG. 7.89: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

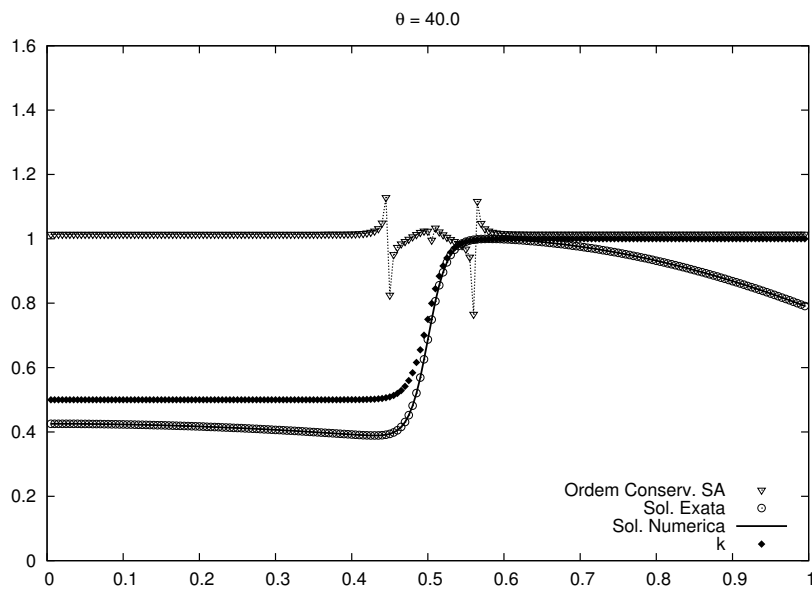


FIG. 7.90: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

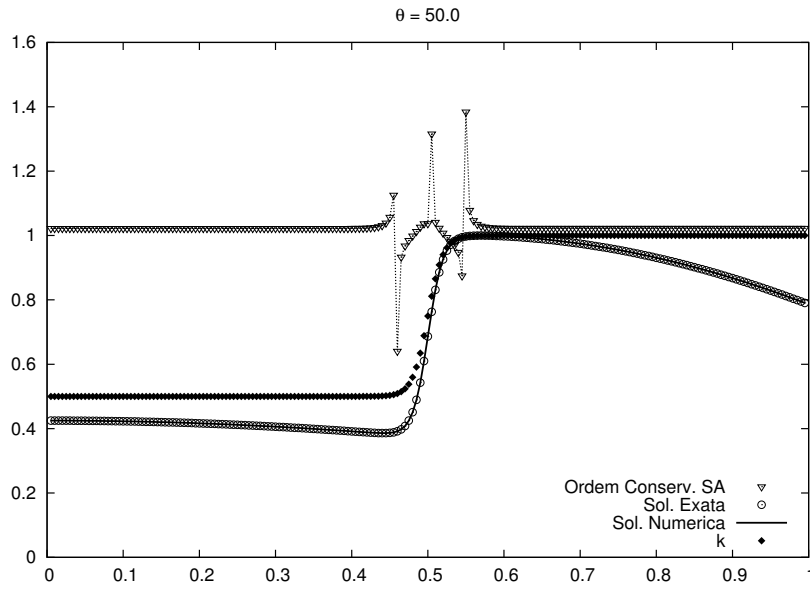


FIG. 7.91: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

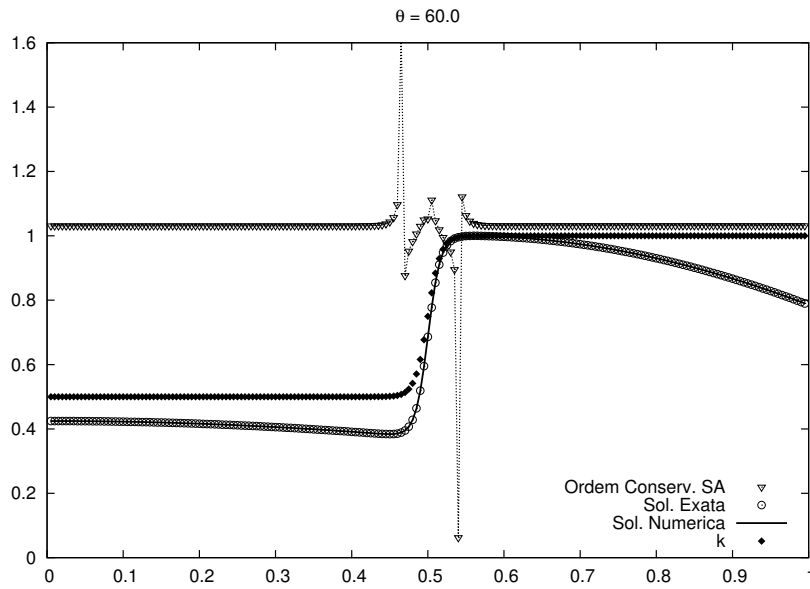


FIG. 7.92: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

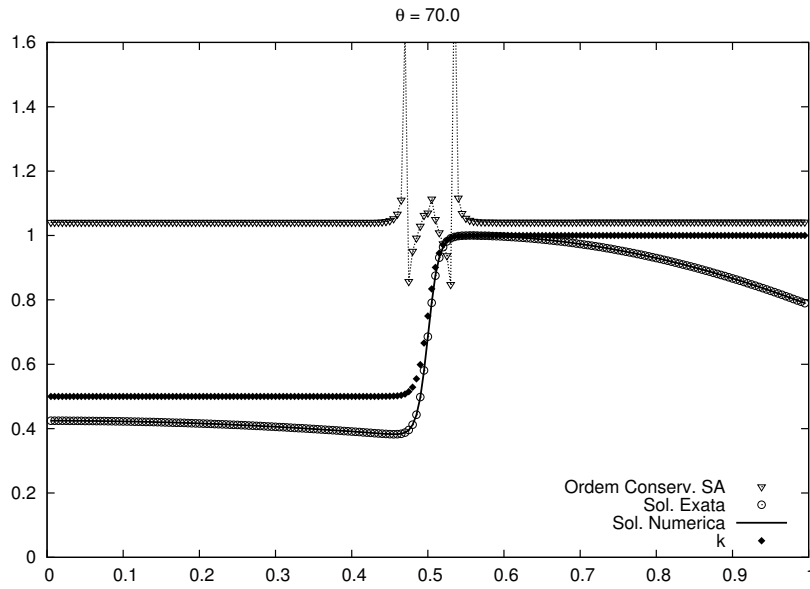


FIG. 7.93: Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

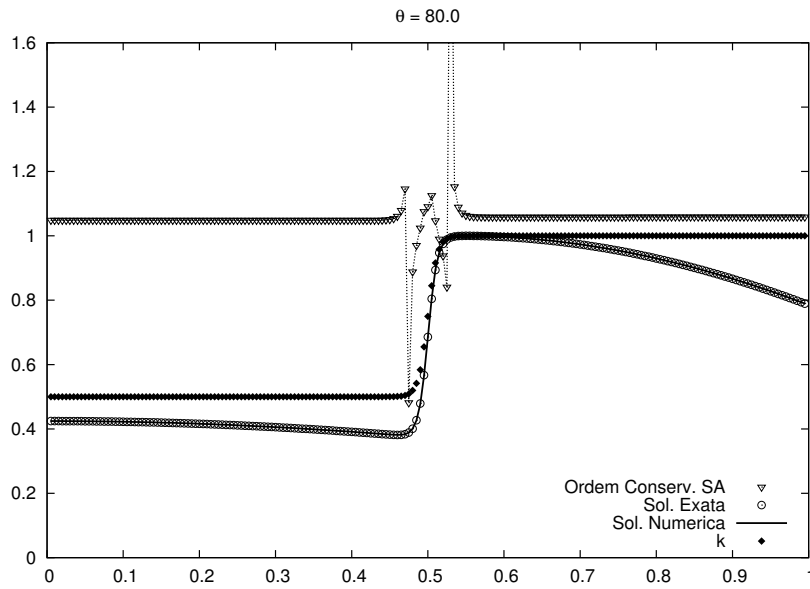


FIG. 7.94: Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

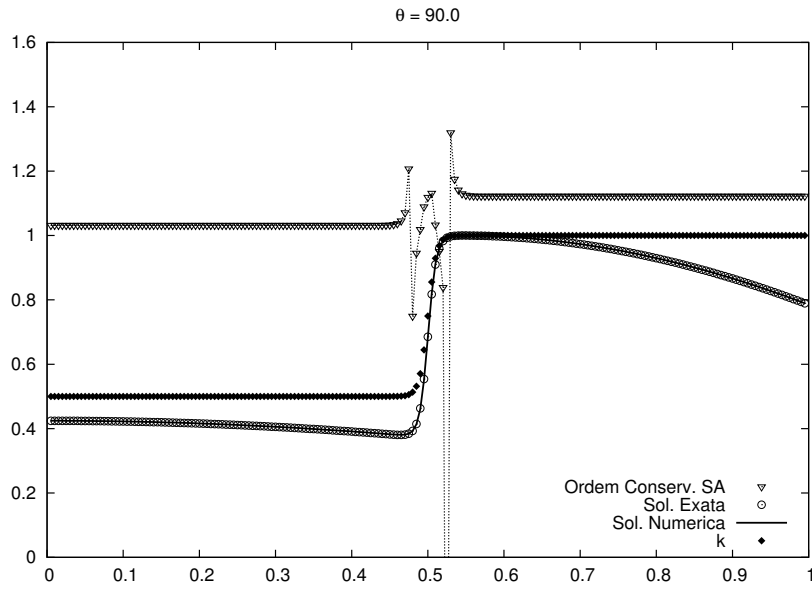


FIG. 7.95: Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

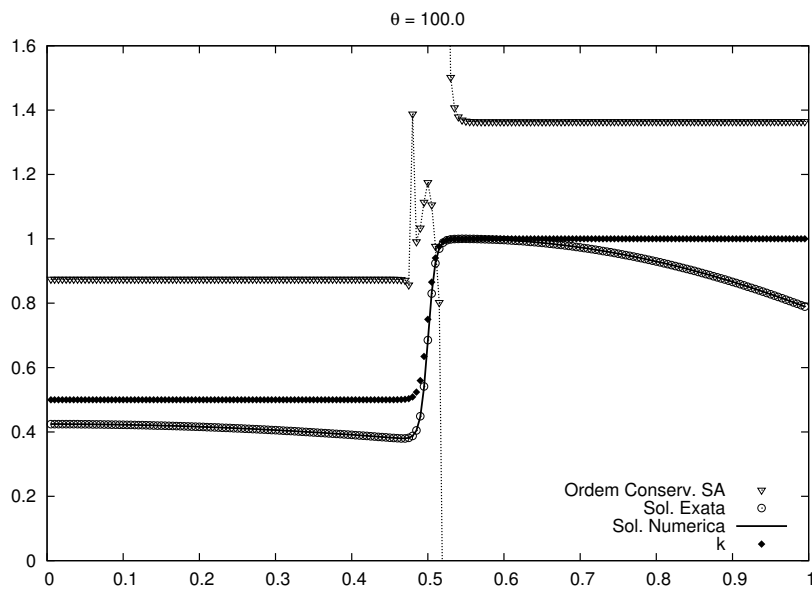


FIG. 7.96: Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Modificada 2 de Segunda Ordem.

7.7 APÊNDICE 7: FORMULAÇÃO NÃO-CONSERVATIVA DE DIFERENÇAS FINITAS -
4ª ORDEM

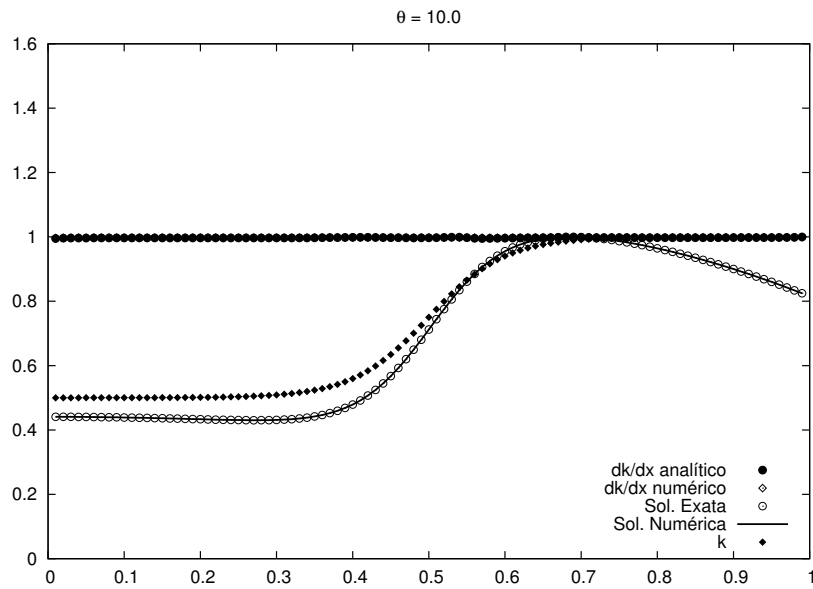


FIG. 7.97: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.

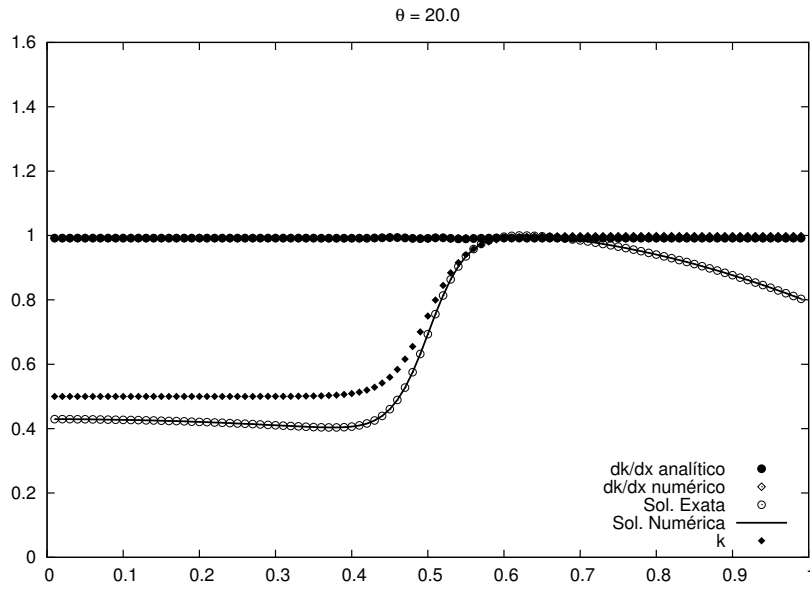


FIG. 7.98: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.

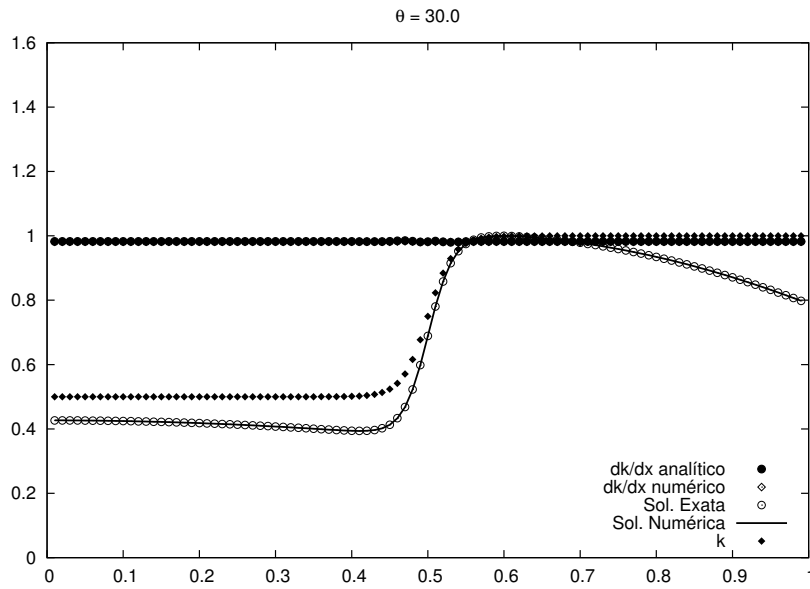


FIG. 7.99: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.

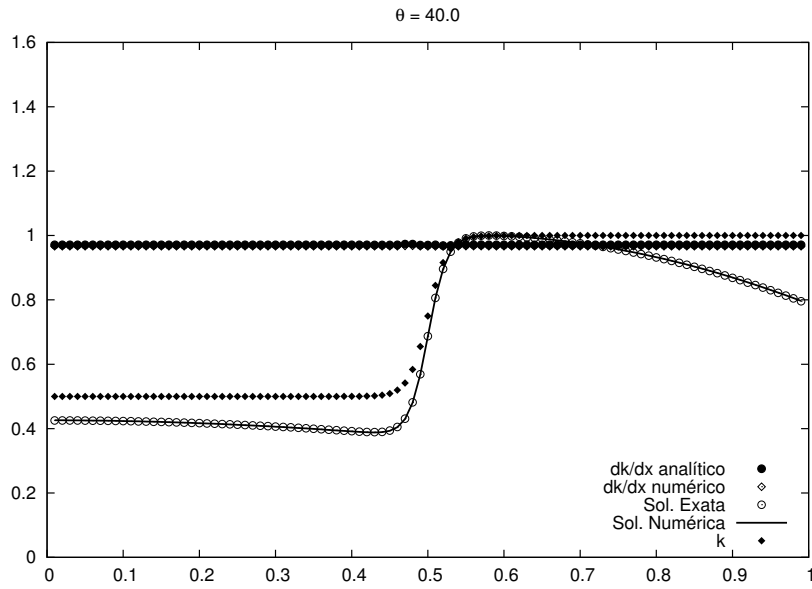


FIG. 7.100: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.

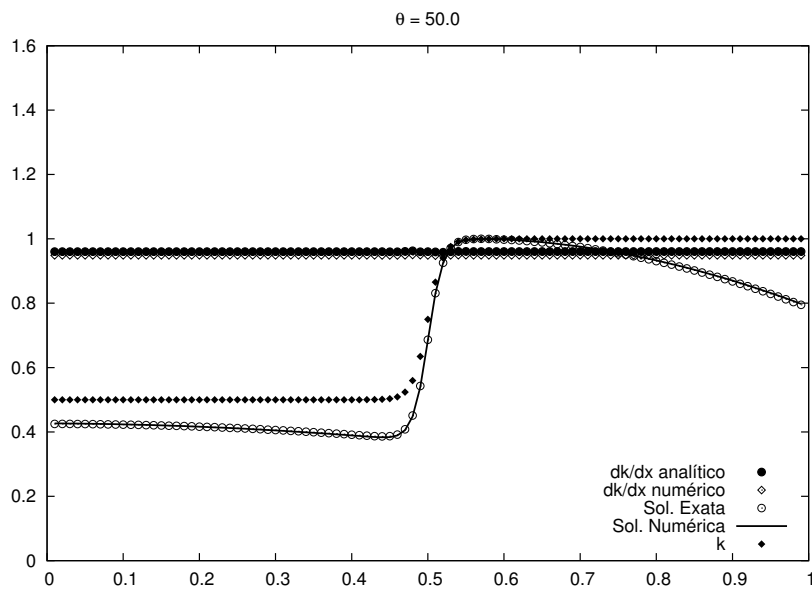


FIG. 7.101: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.

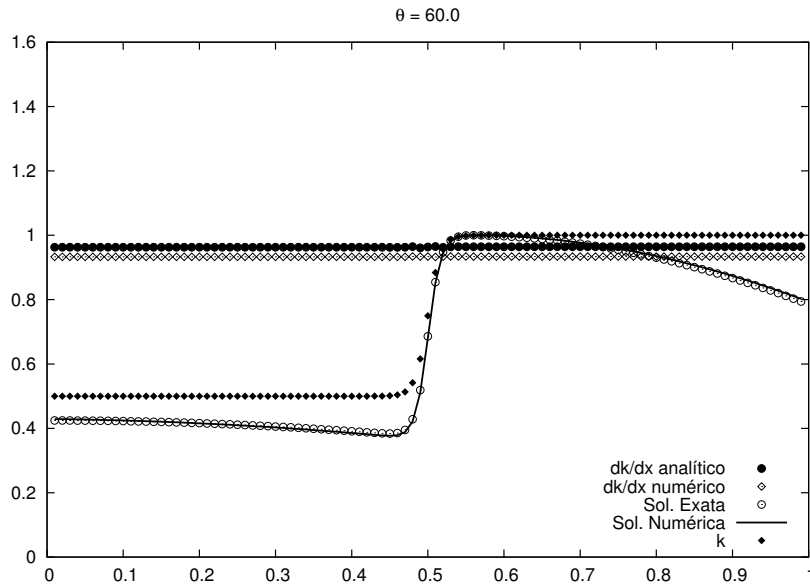


FIG. 7.102: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.

Agora, os resultados para a malha mais refinada.

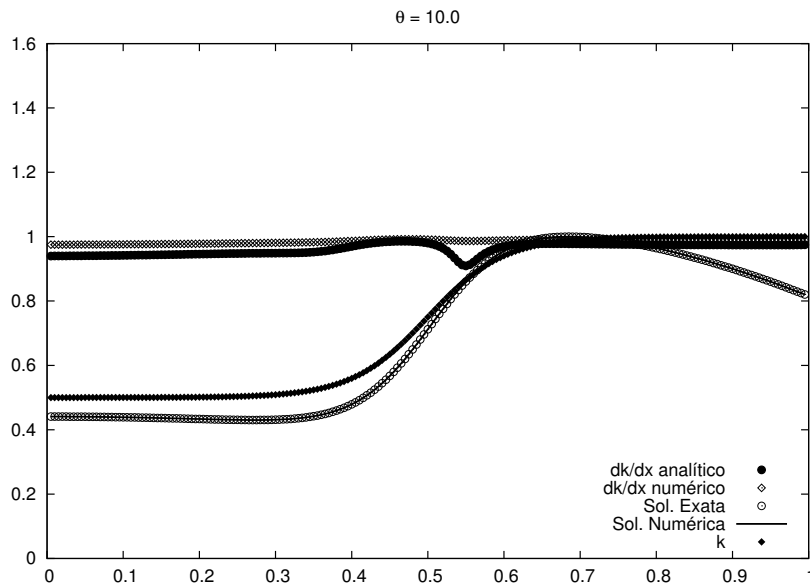


FIG. 7.103: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.

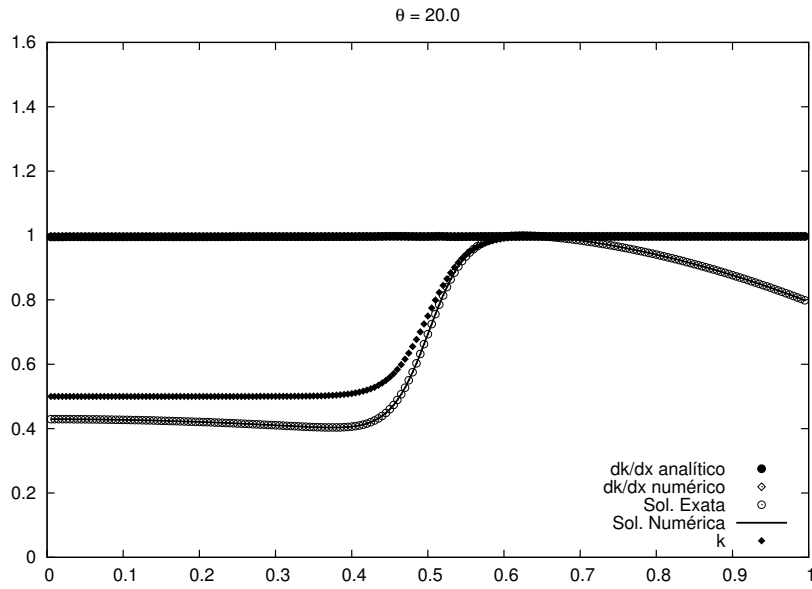


FIG. 7.104: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.

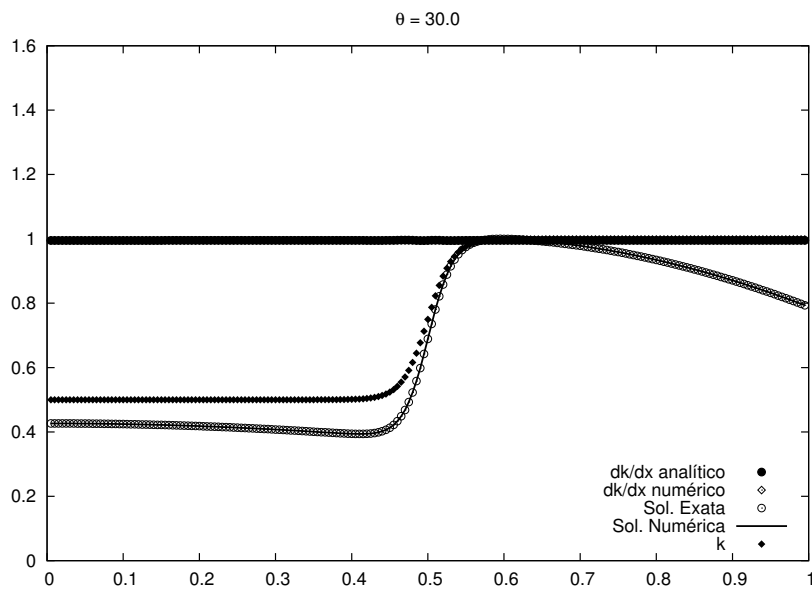


FIG. 7.105: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.

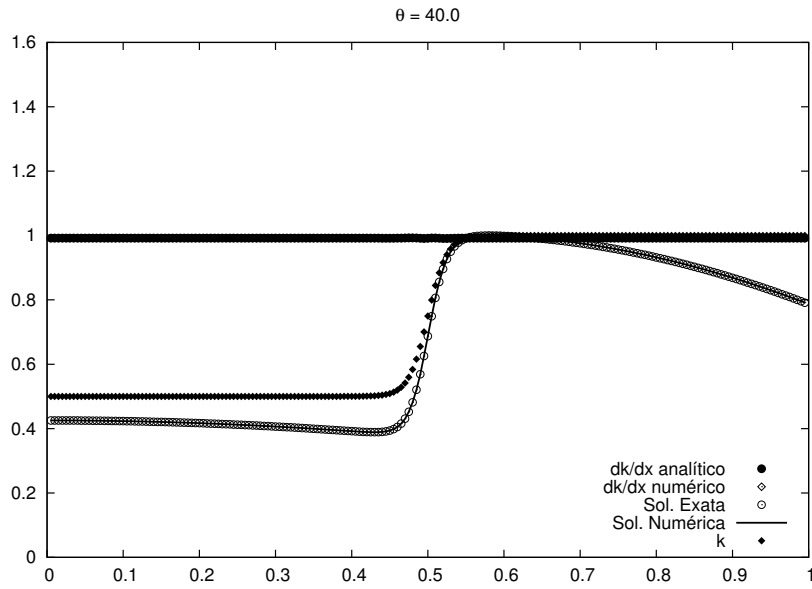


FIG. 7.106: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.

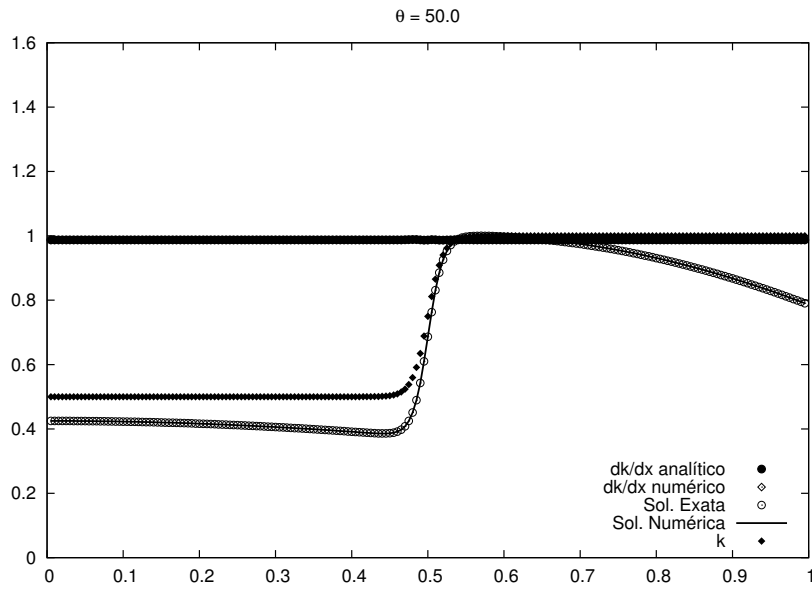


FIG. 7.107: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.

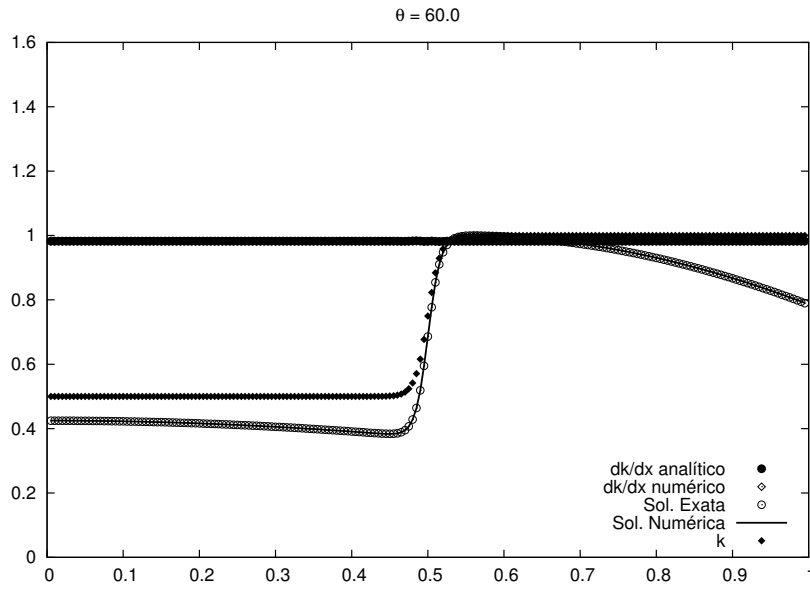


FIG. 7.108: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.

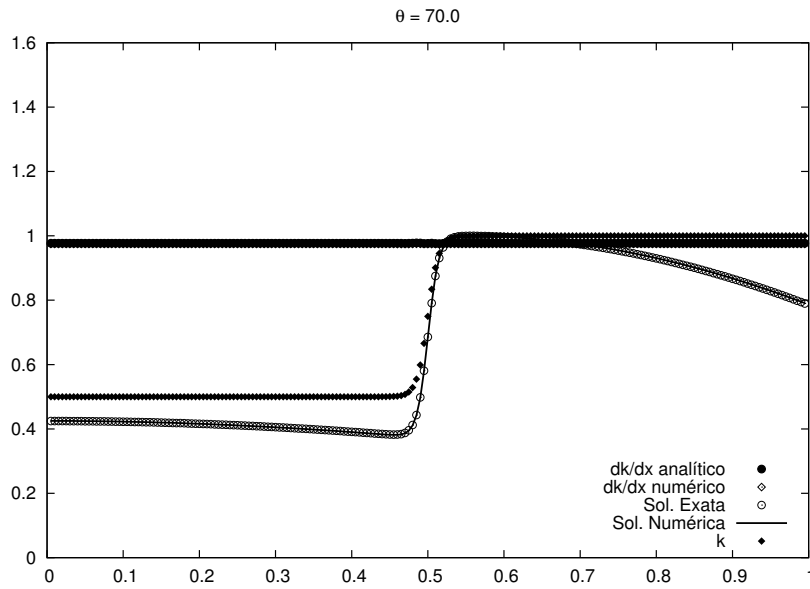


FIG. 7.109: Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.

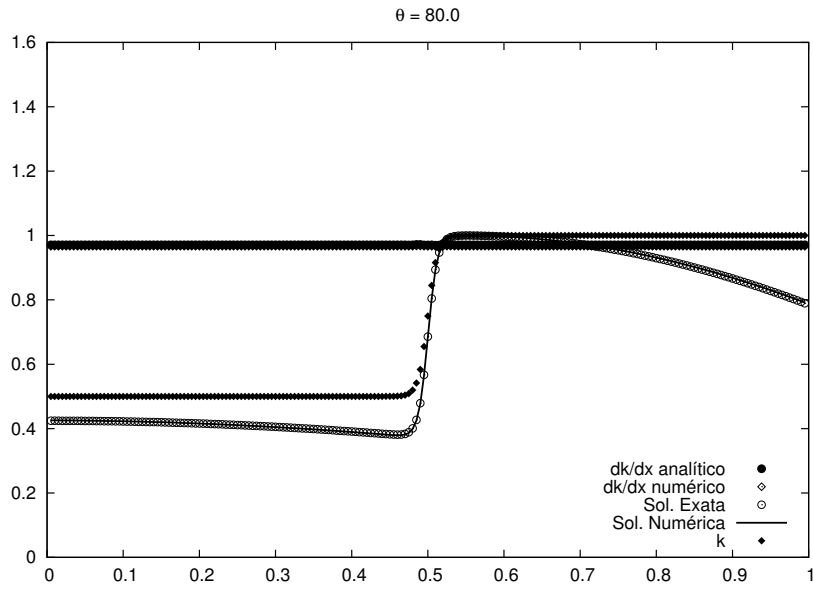


FIG. 7.110: Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.

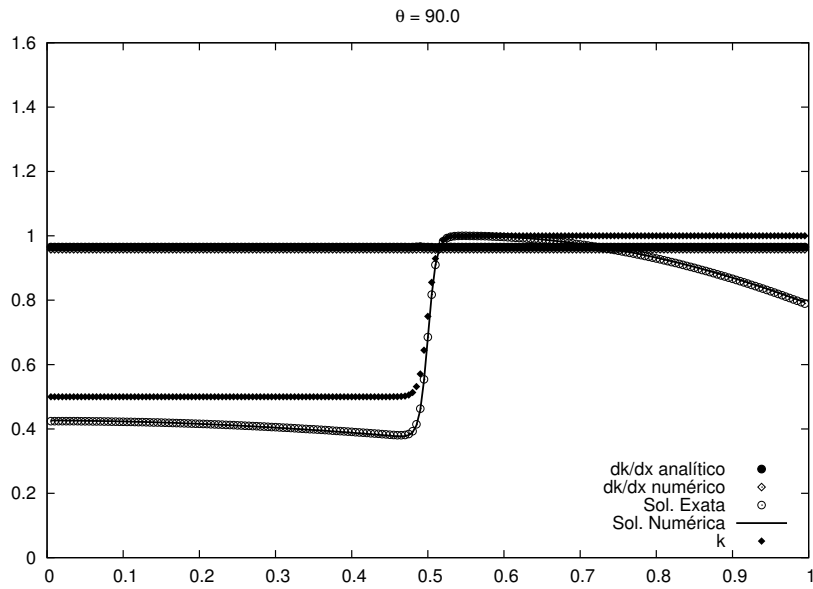


FIG. 7.111: Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.

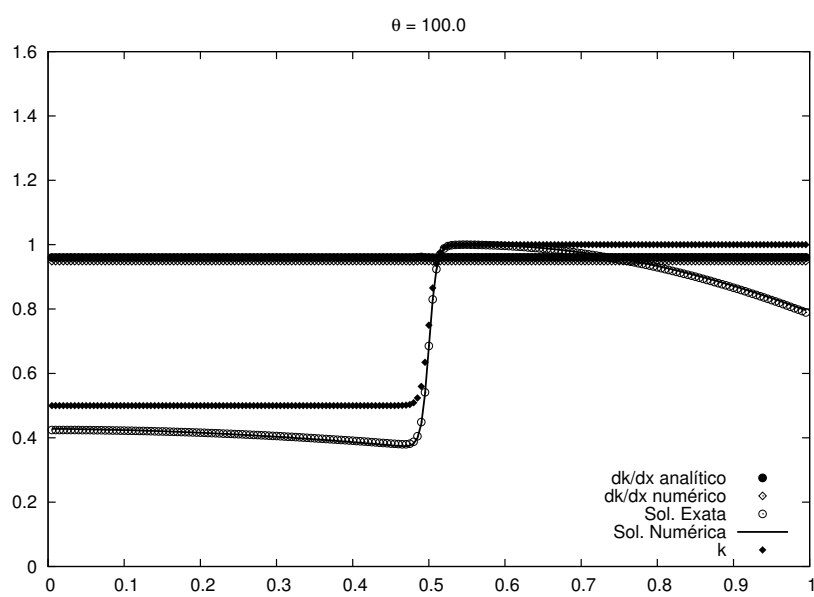


FIG. 7.112: Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Não-Conservativa. Quarta ordem.

7.8 APÊNDICE 8: FORMULAÇÃO CONSERVATIVA DE DIFERENÇAS FINITAS -
4ª ORDEM

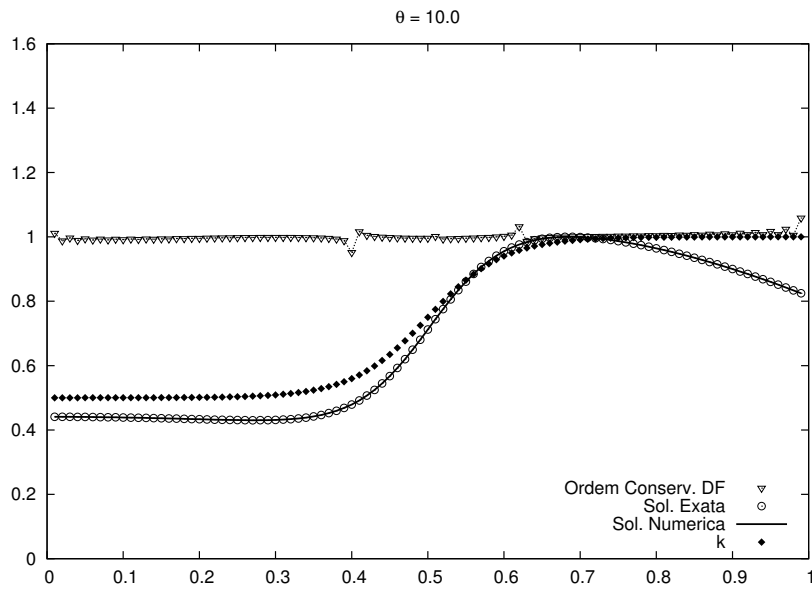


FIG. 7.113: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.

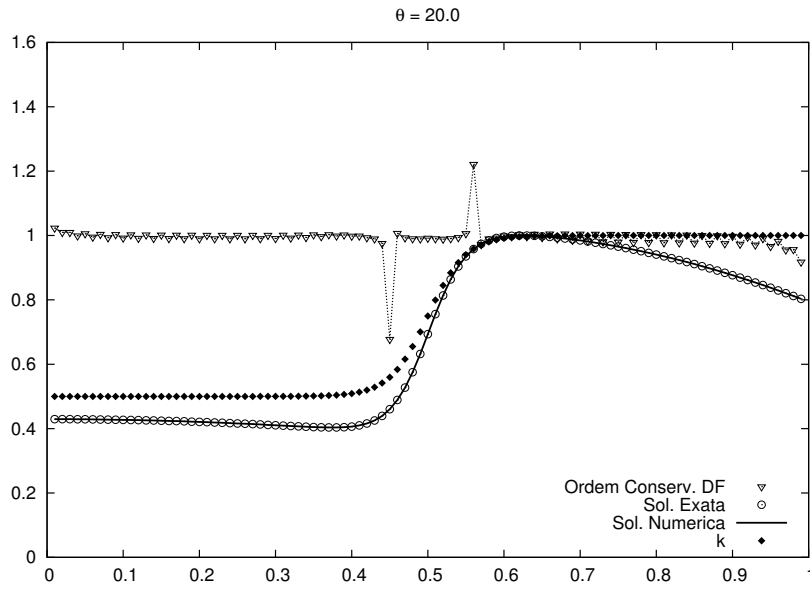


FIG. 7.114: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.

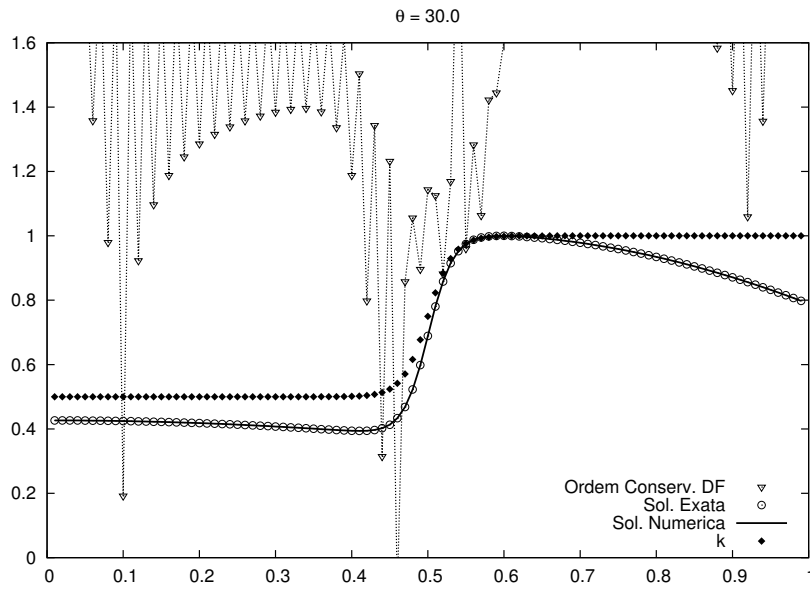


FIG. 7.115: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.

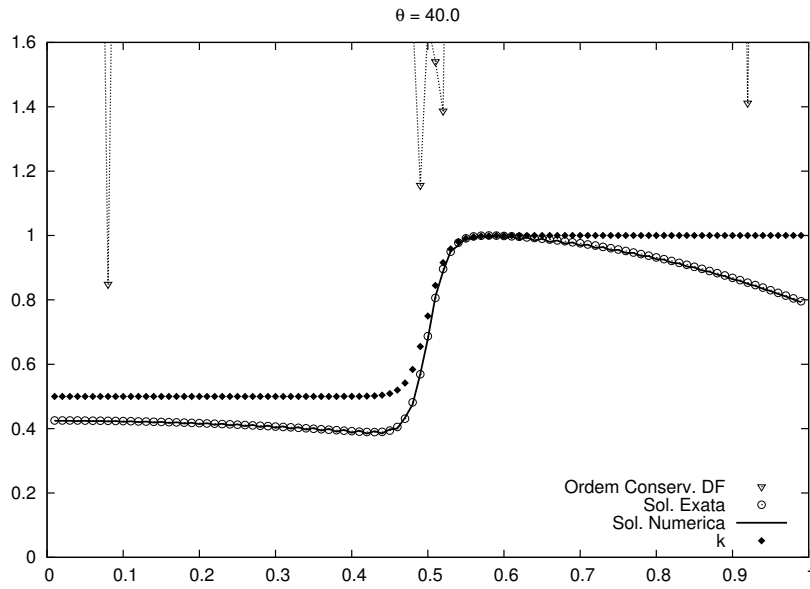


FIG. 7.116: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.

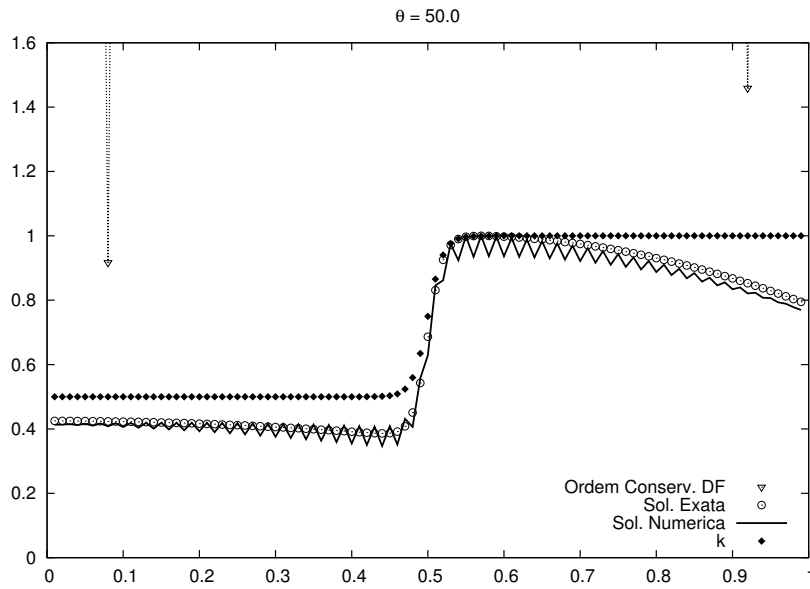


FIG. 7.117: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.

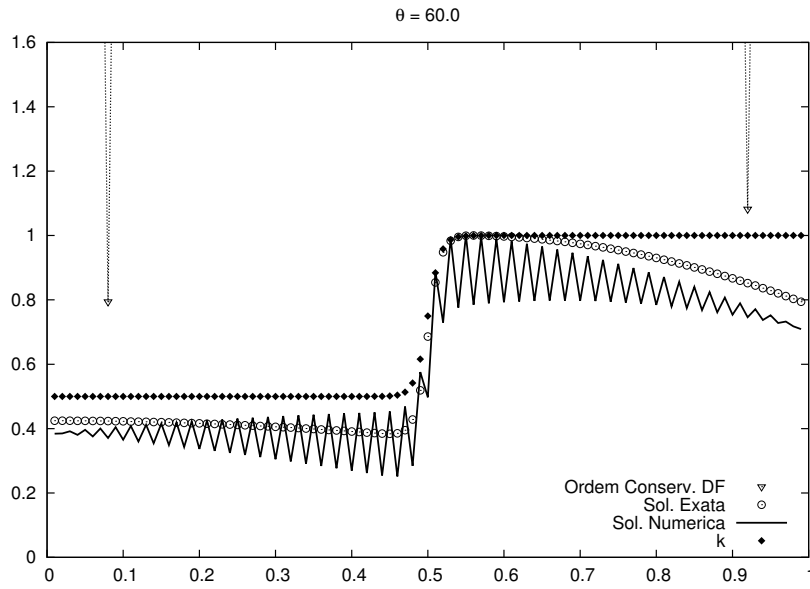


FIG. 7.118: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.

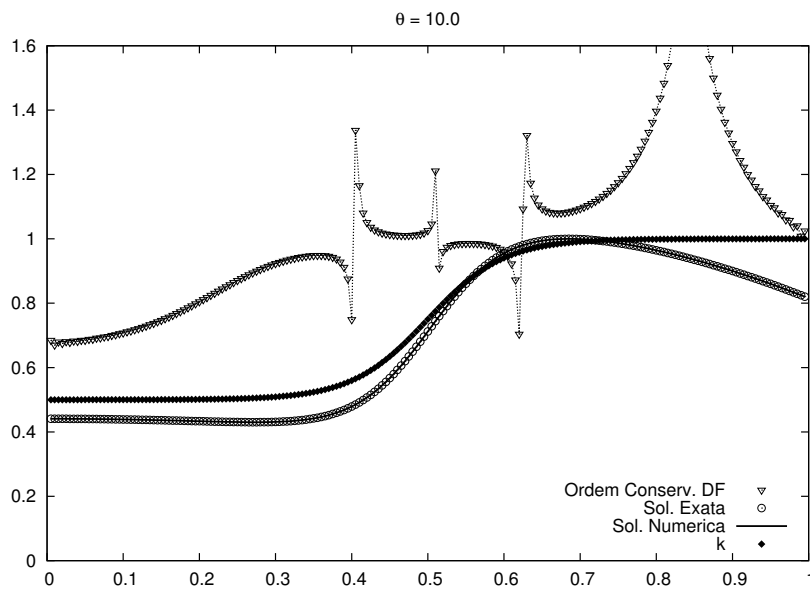


FIG. 7.119: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.

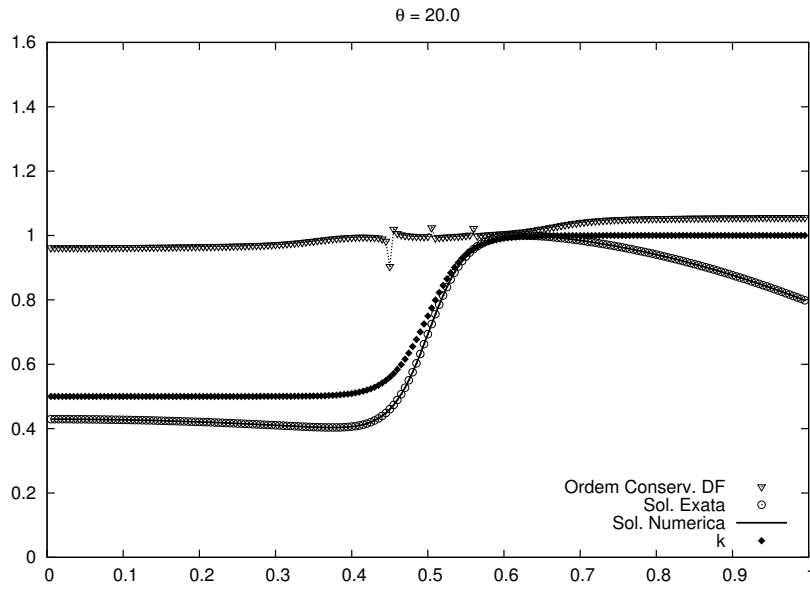


FIG. 7.120: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.

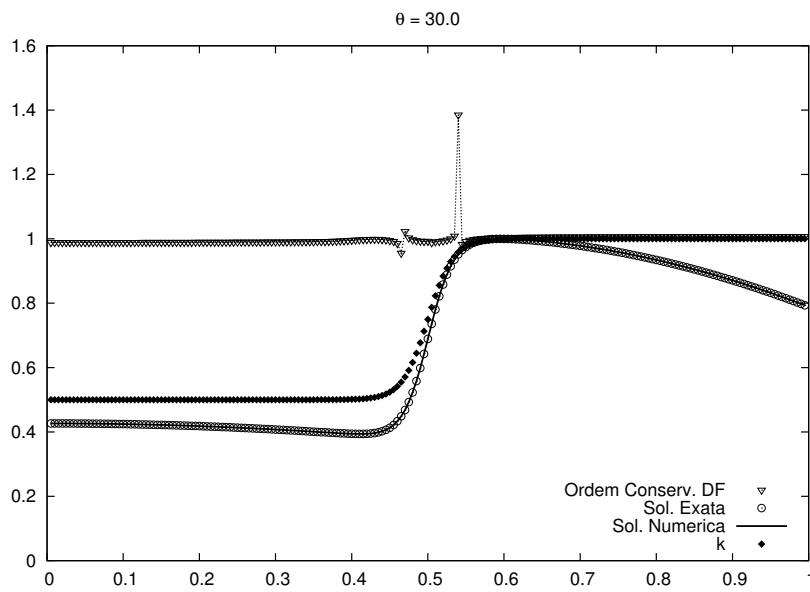


FIG. 7.121: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.

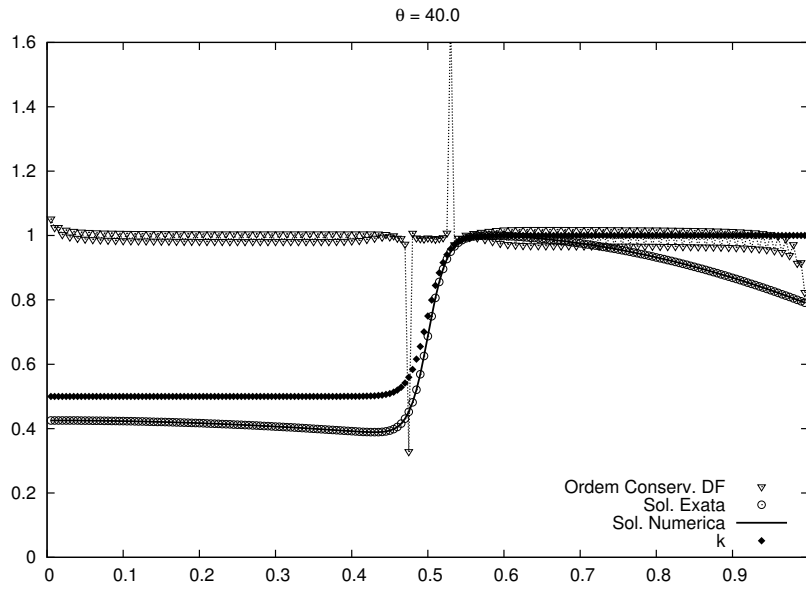


FIG. 7.122: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.

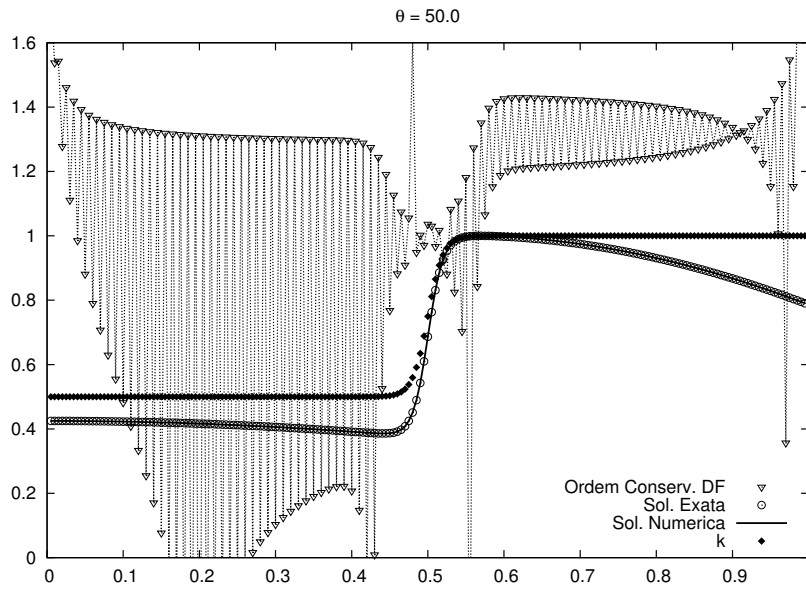


FIG. 7.123: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.

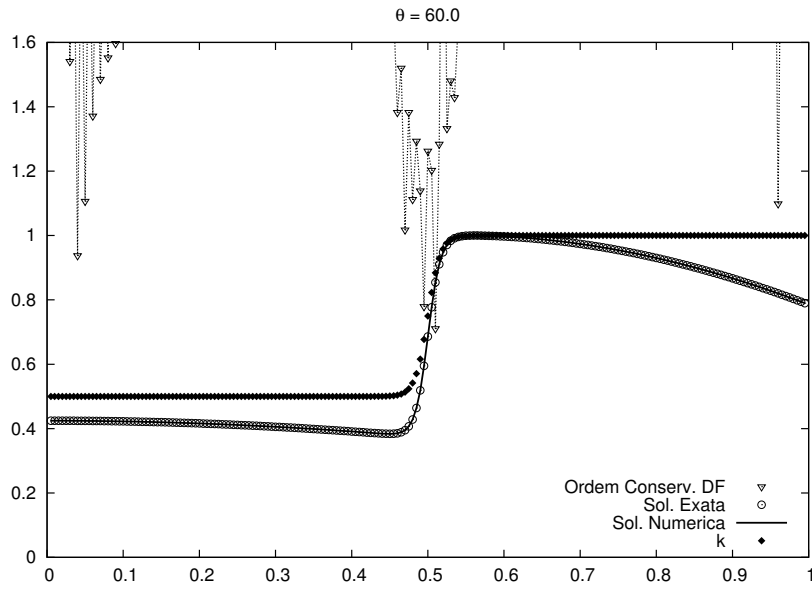


FIG. 7.124: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.

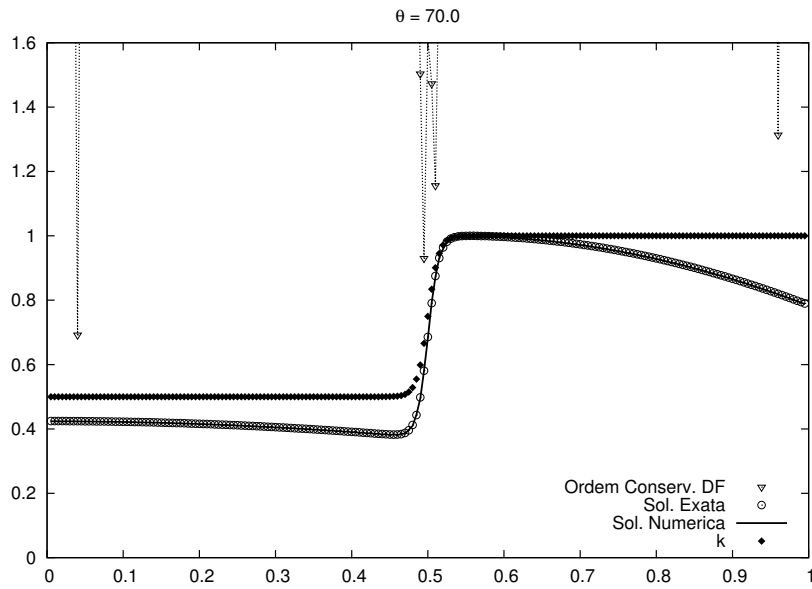


FIG. 7.125: Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.

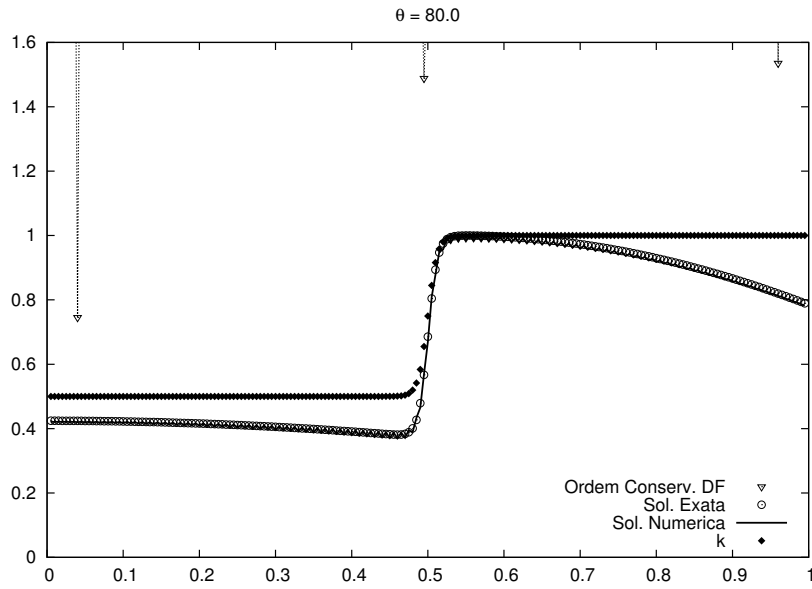


FIG. 7.126: Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.

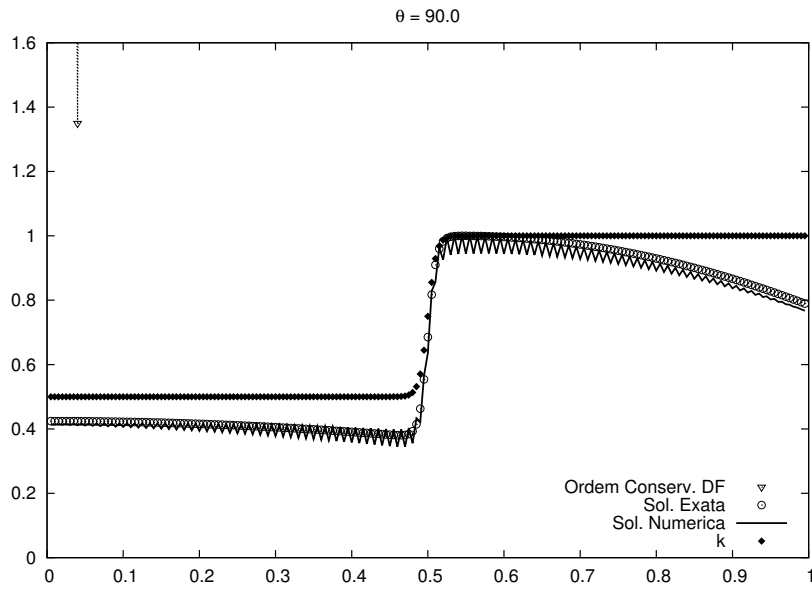


FIG. 7.127: Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.

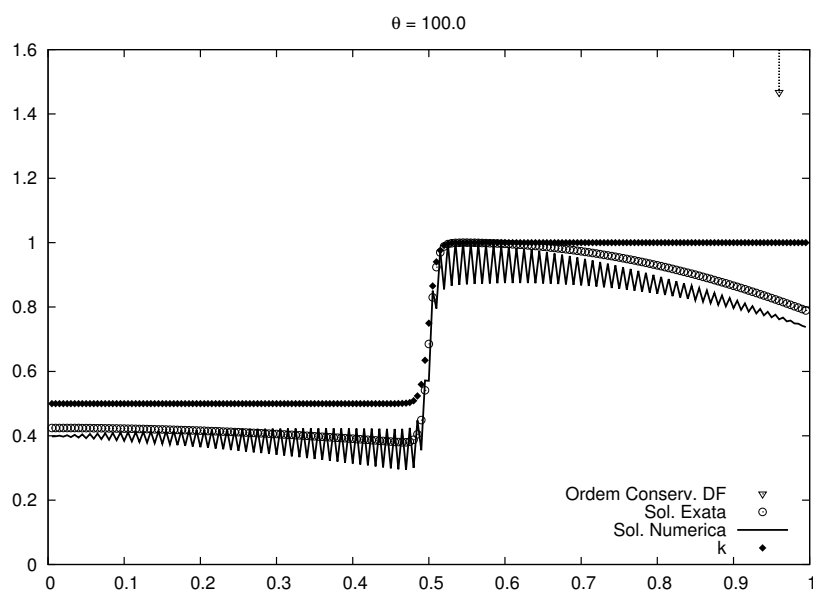


FIG. 7.128: Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação Conservativa de Diferenças Finitas. Quarta ordem.

7.9 APÊNDICE 9: FORMULAÇÃO DE VOLUMES FINITOS DE ZINGG & PULLIAN

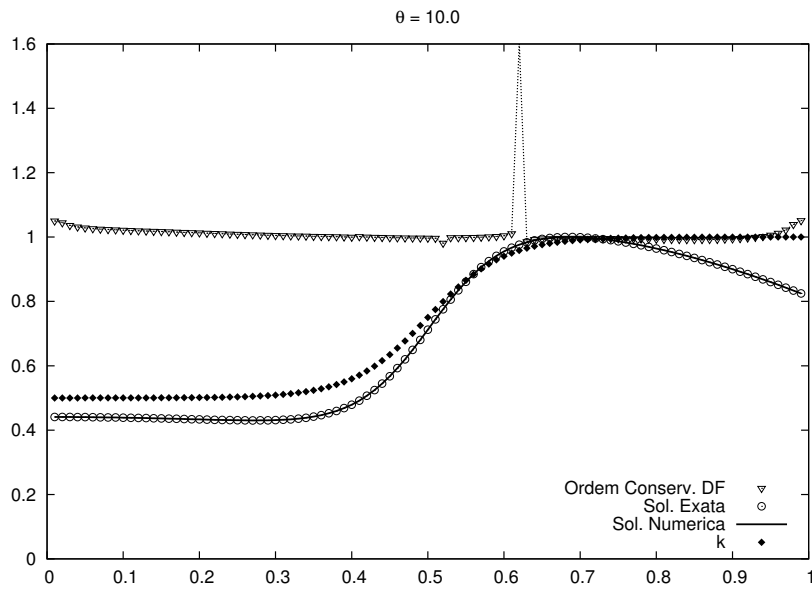


FIG. 7.129: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação de Zingg & Pullian.

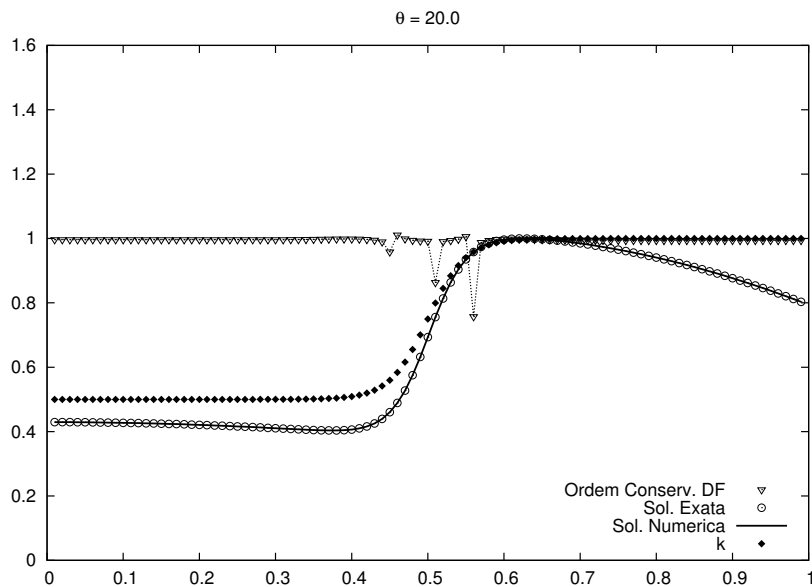


FIG. 7.130: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação de Zingg & Pullian.

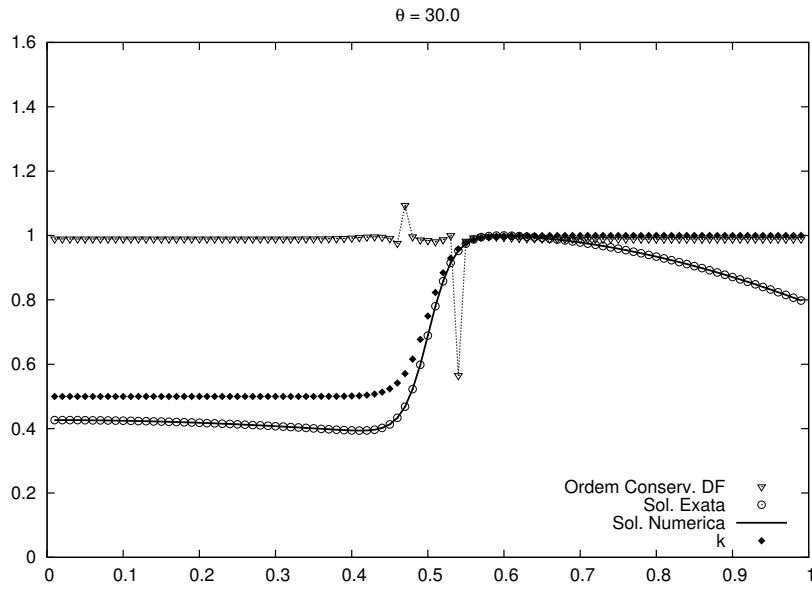


FIG. 7.131: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação de Zingg & Pullian.

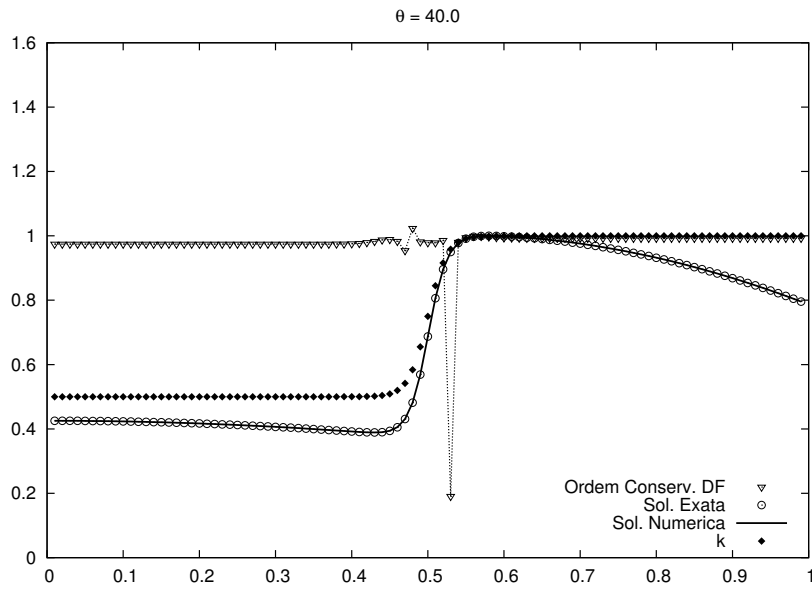


FIG. 7.132: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação de Zingg & Pullian.

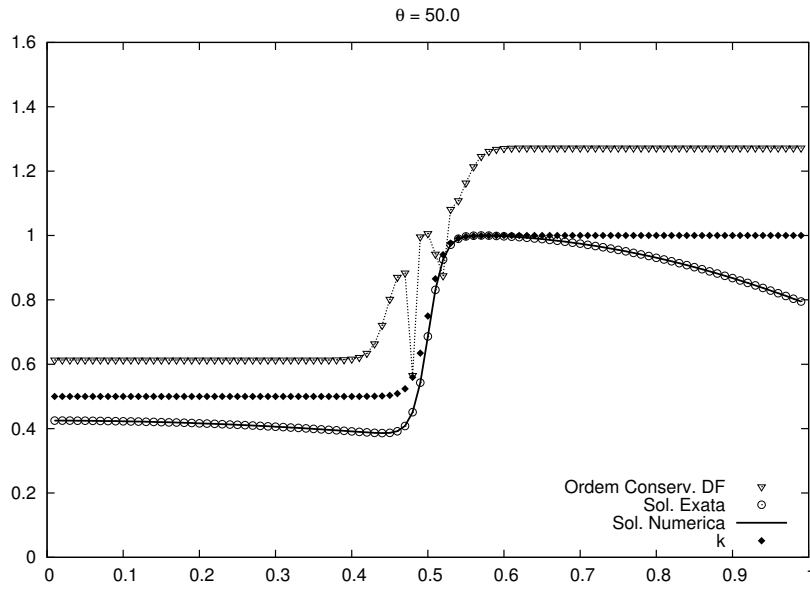


FIG. 7.133: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação de Zingg & Pullian.

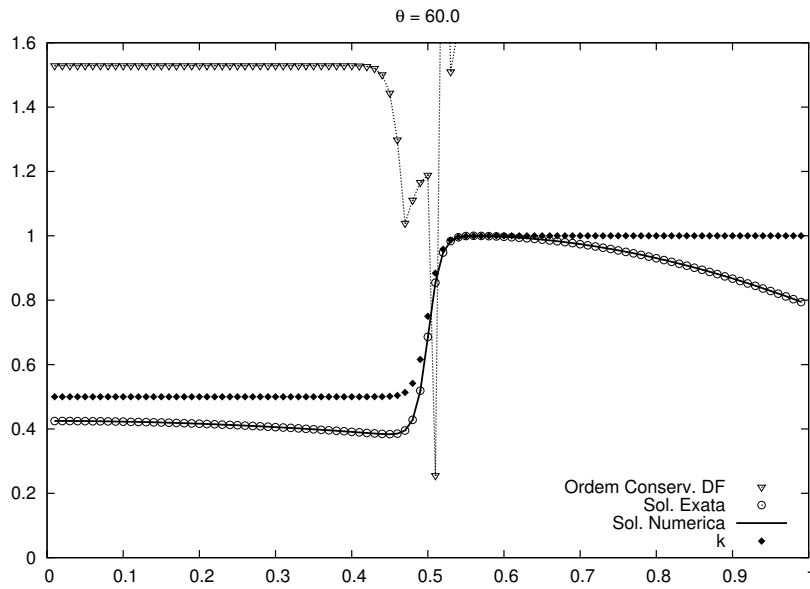


FIG. 7.134: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação de Zingg & Pullian.

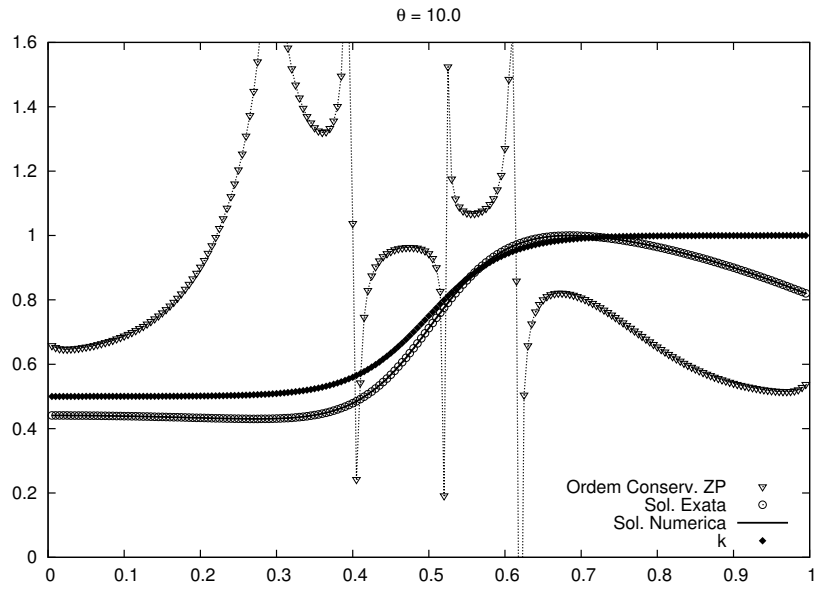


FIG. 7.135: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação de Zingg & Pullian.

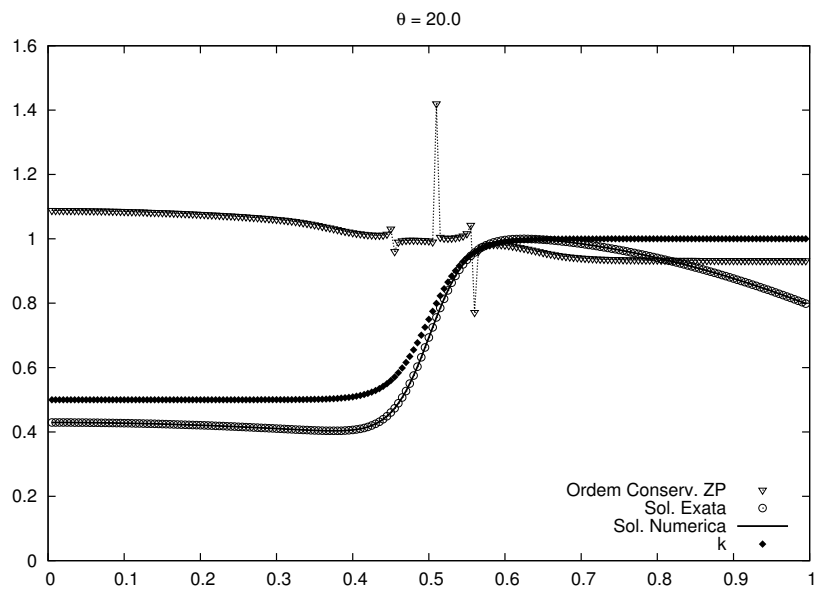


FIG. 7.136: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação de Zingg & Pullian.

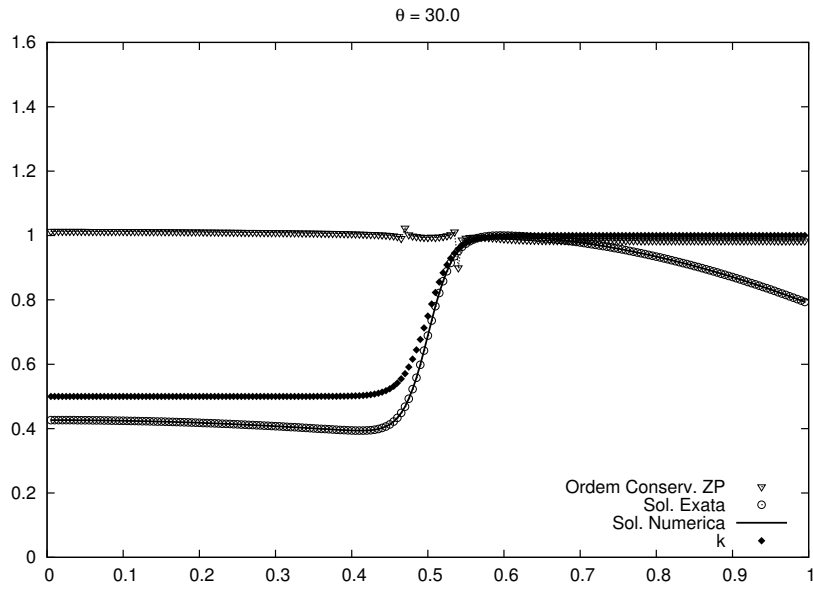


FIG. 7.137: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação de Zingg & Pullian.

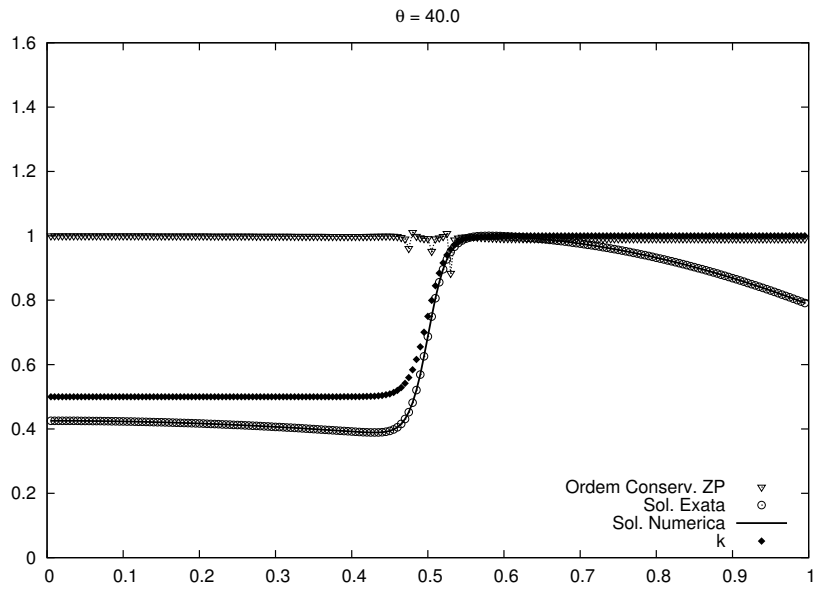


FIG. 7.138: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação de Zingg & Pullian.

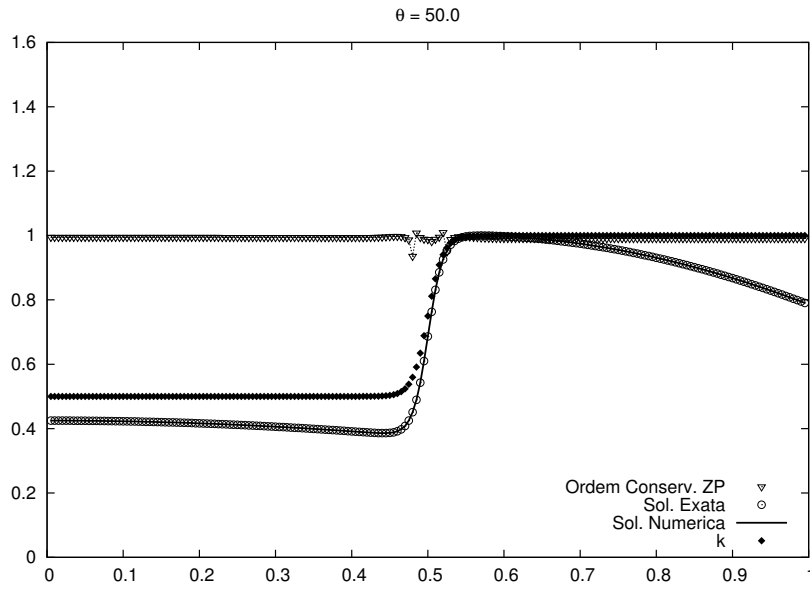


FIG. 7.139: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação de Zingg & Pullian.

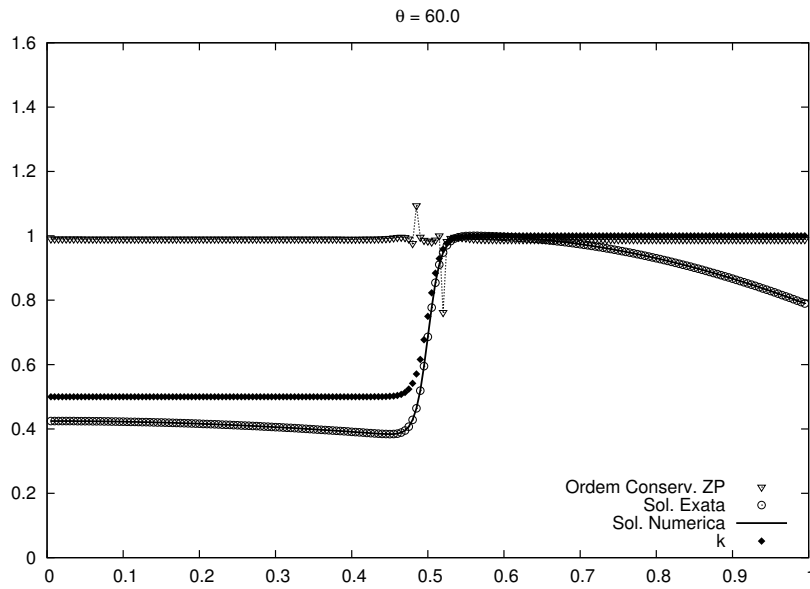


FIG. 7.140: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação de Zingg & Pullian.

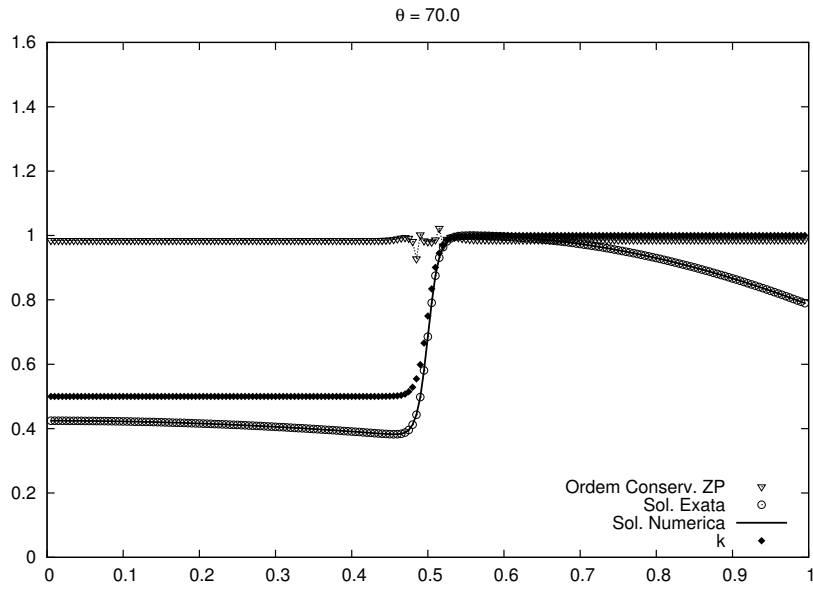


FIG. 7.141: Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação de Zingg & Pullian.

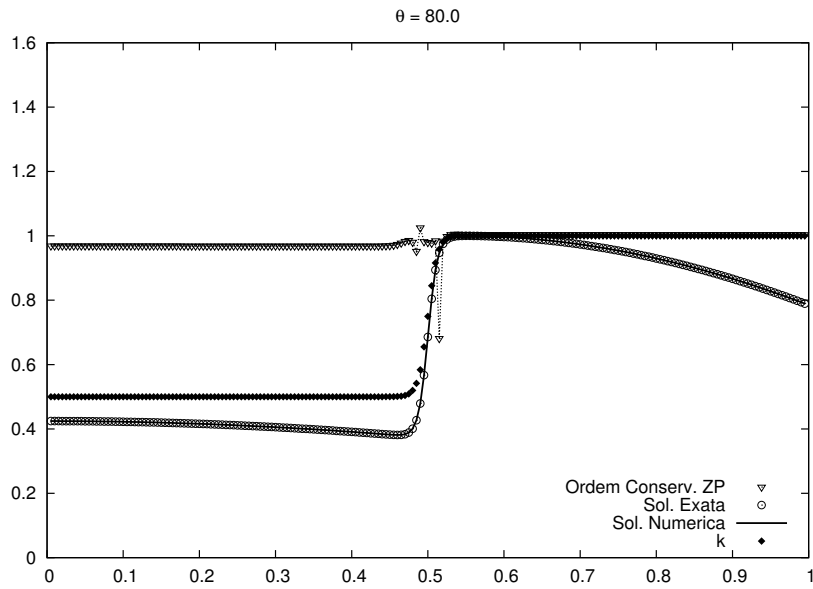


FIG. 7.142: Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação de Zingg & Pullian.

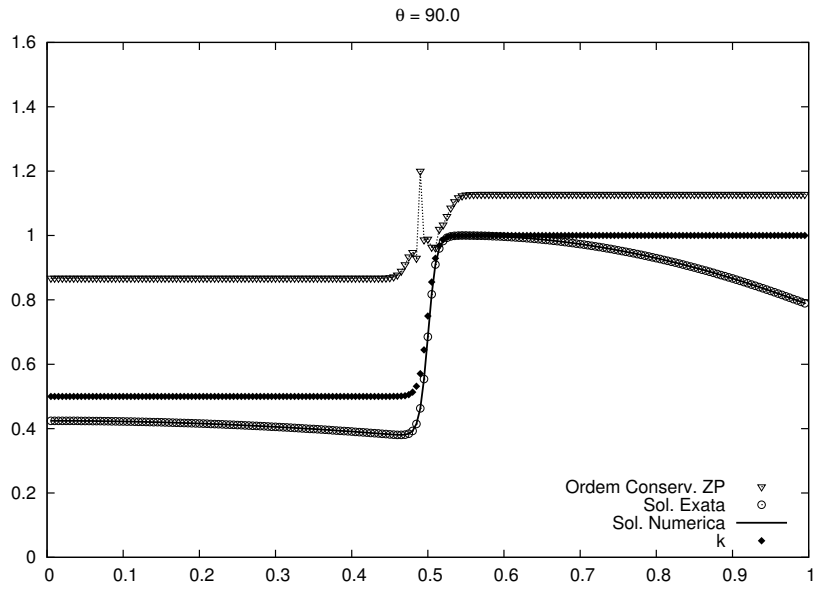


FIG. 7.143: Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação de Zingg & Pullian.

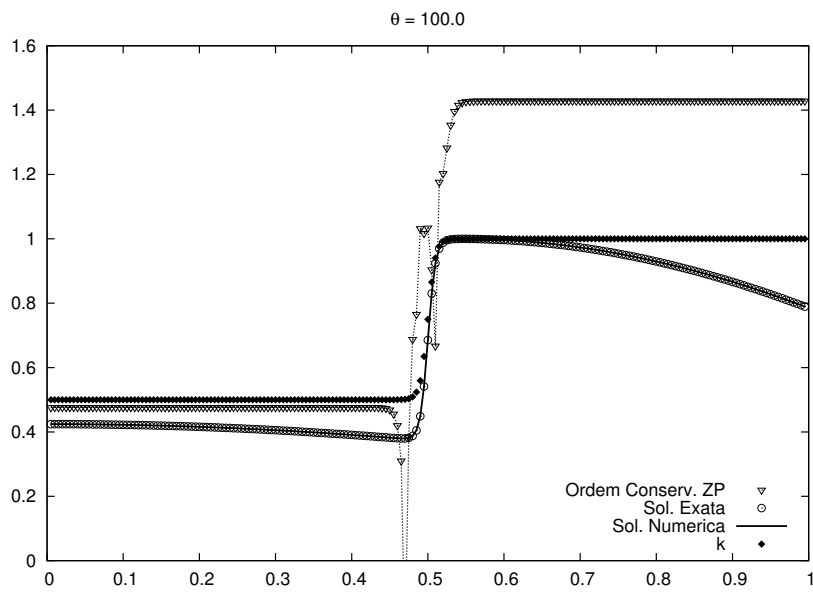


FIG. 7.144: Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação de Zingg & Pullian.

7.10 APÊNDICE 10: FORMULAÇÃO CONSERVATIVA DE VOLUMES FINITOS SA 4(2)

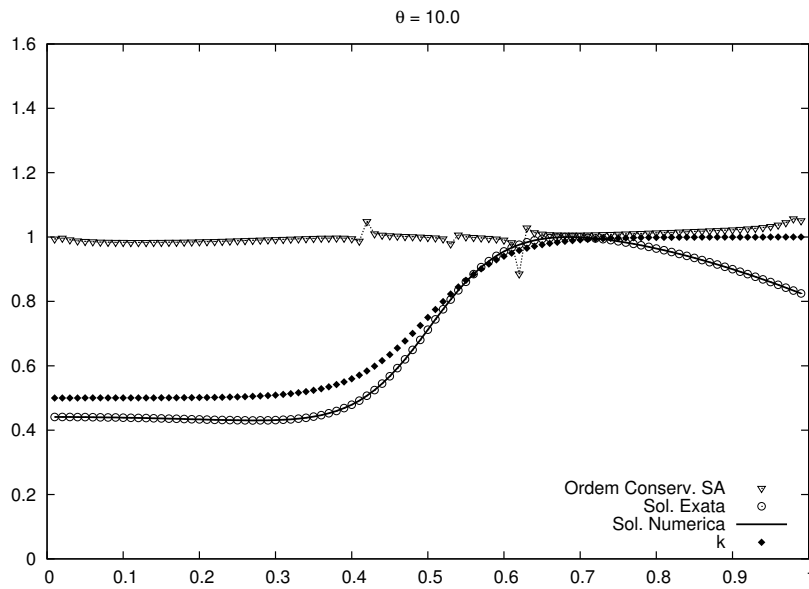


FIG. 7.145: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação modificada 1. Quarta Ordem.

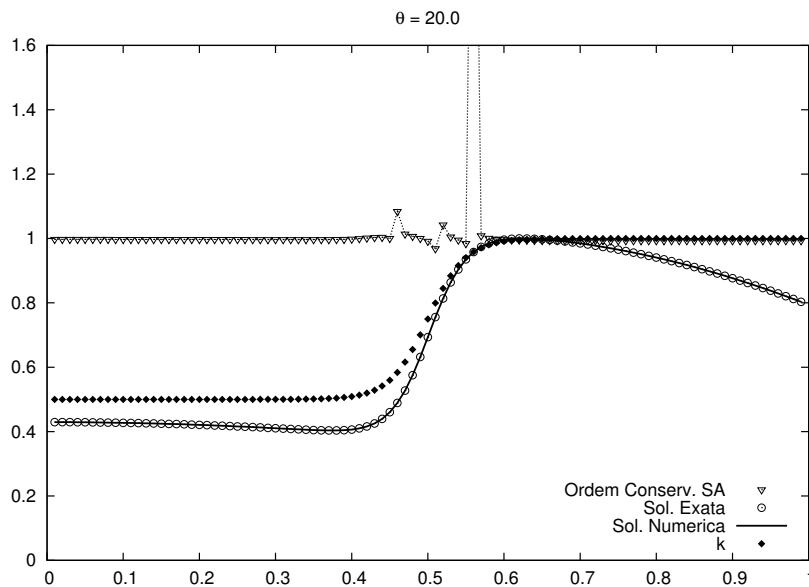


FIG. 7.146: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação modificada 1. Quarta Ordem.

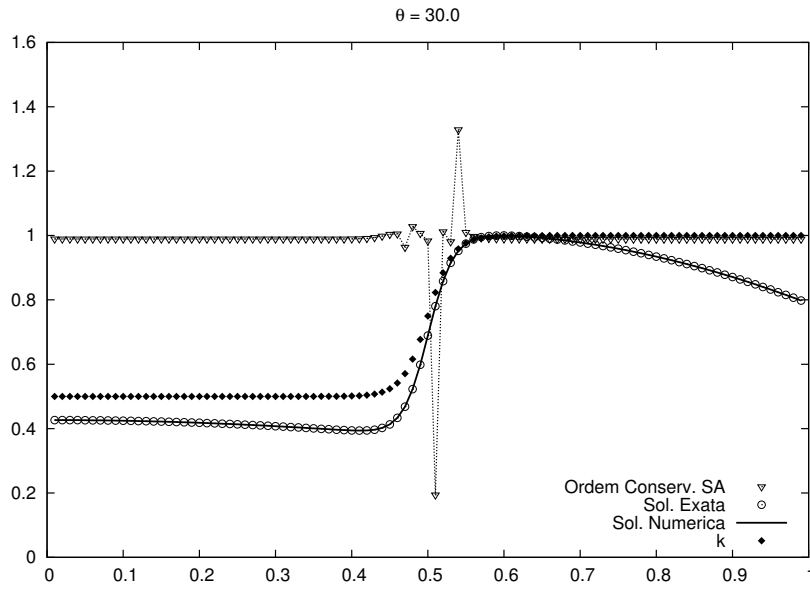


FIG. 7.147: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação modificada 1. Quarta Ordem.

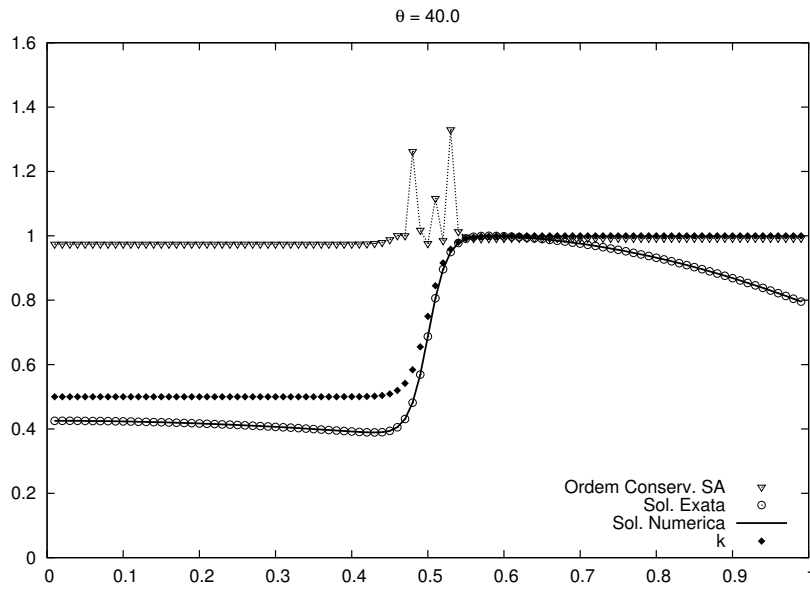


FIG. 7.148: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação modificada 1. Quarta Ordem.

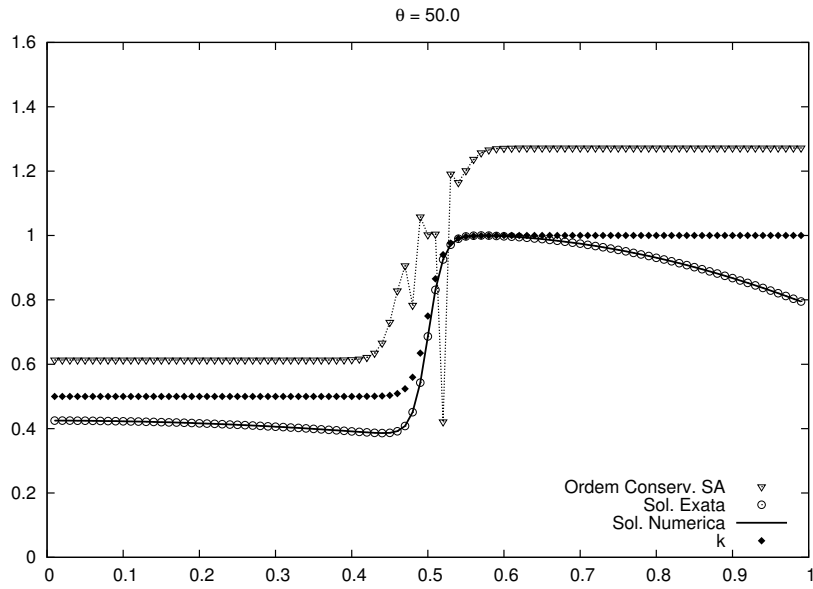


FIG. 7.149: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação modificada 1. Quarta Ordem.

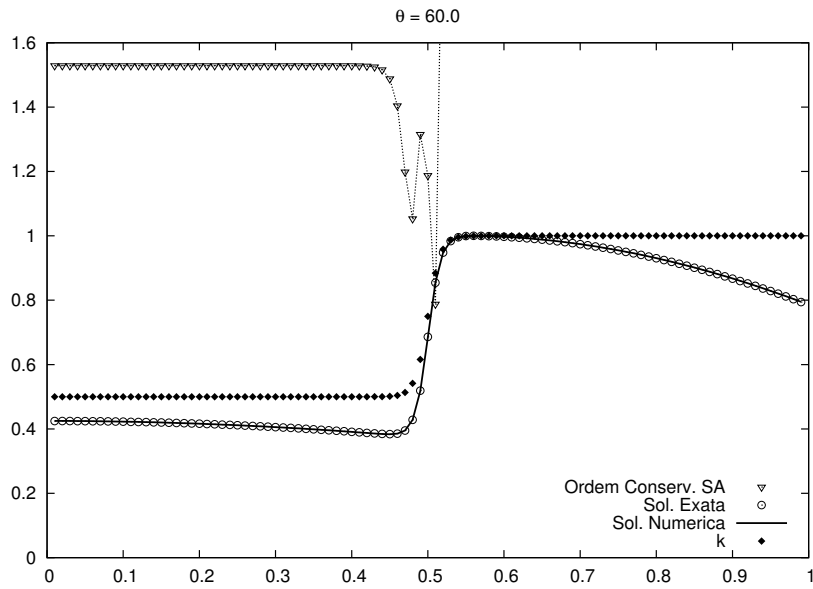


FIG. 7.150: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação modificada 1. Quarta Ordem.

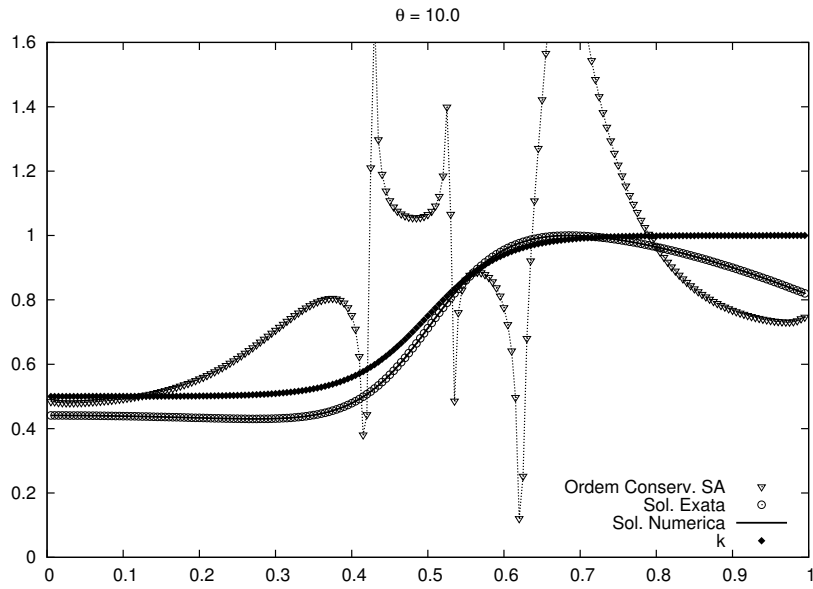


FIG. 7.151: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 1. Quarta Ordem.

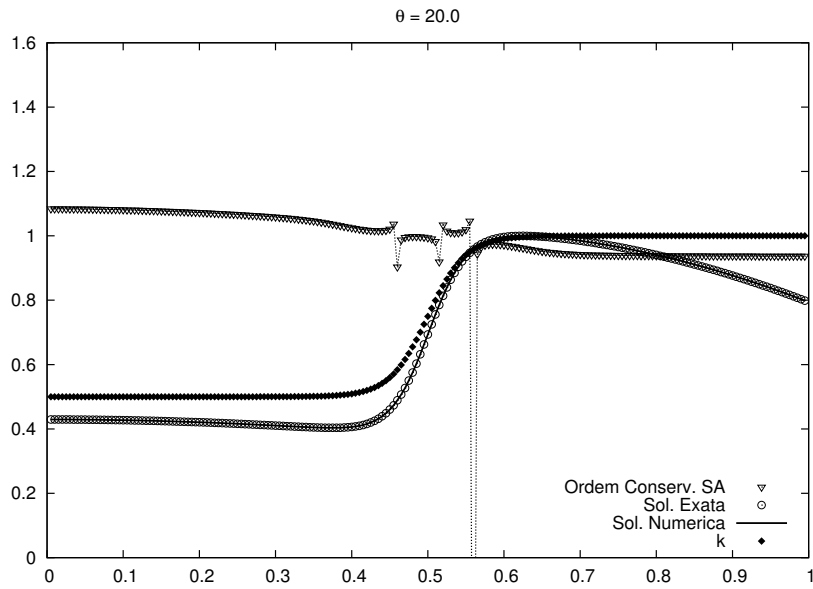


FIG. 7.152: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 1. Quarta Ordem.

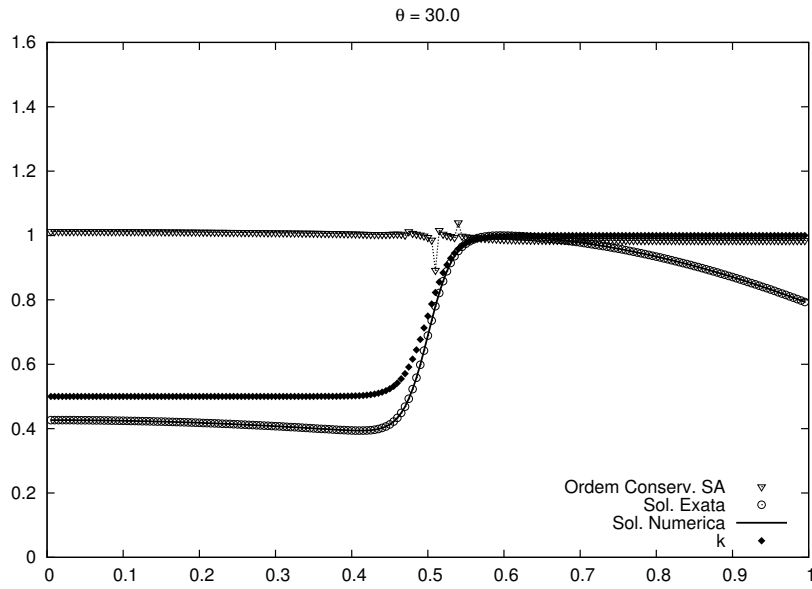


FIG. 7.153: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 1. Quarta Ordem.

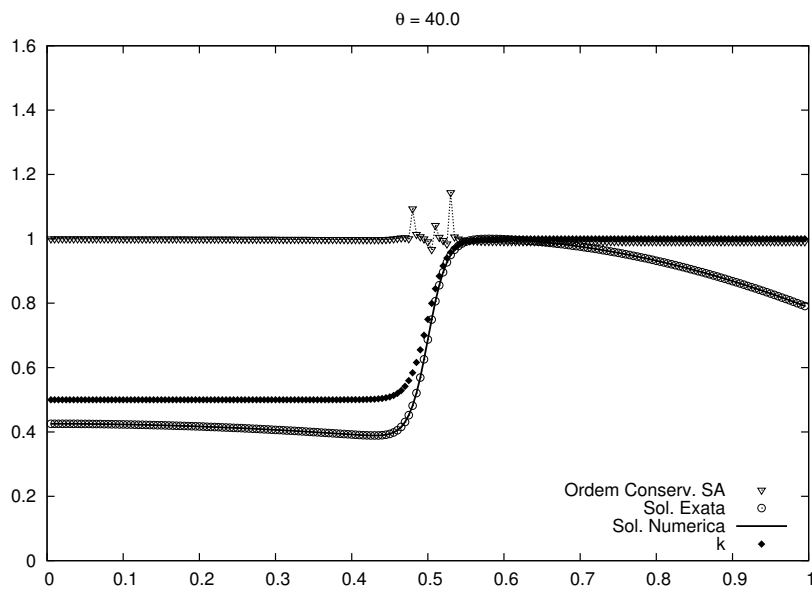


FIG. 7.154: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 1. Quarta Ordem.

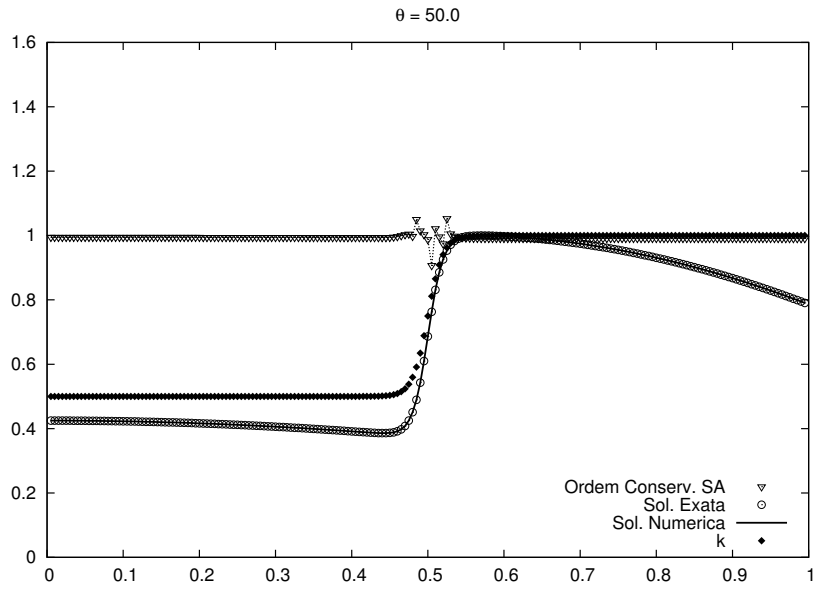


FIG. 7.155: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 1. Quarta Ordem.

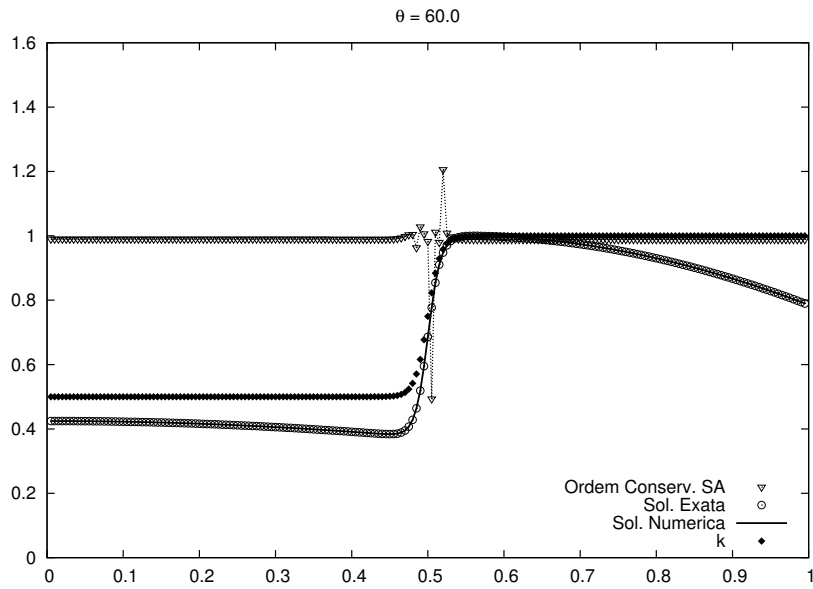


FIG. 7.156: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 1. Quarta Ordem.

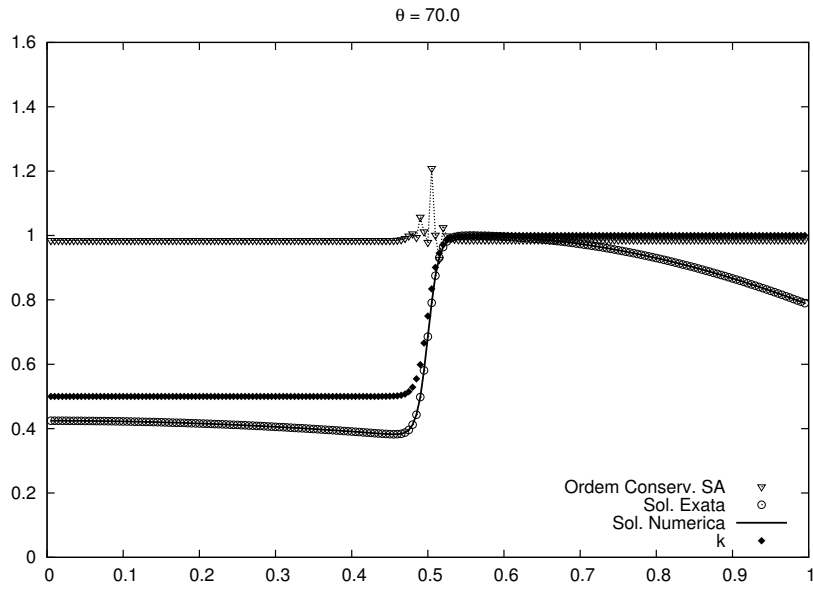


FIG. 7.157: Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 1. Quarta Ordem.

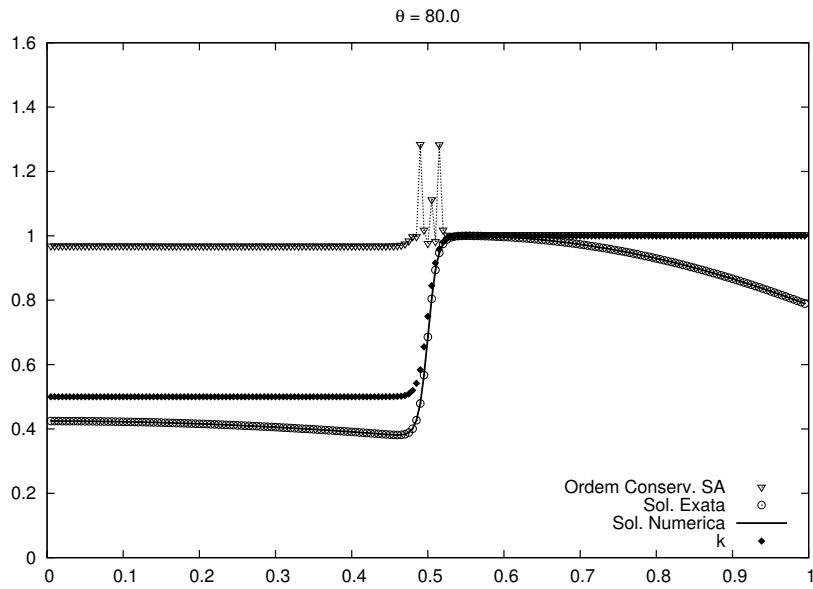


FIG. 7.158: Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 1. Quarta Ordem.

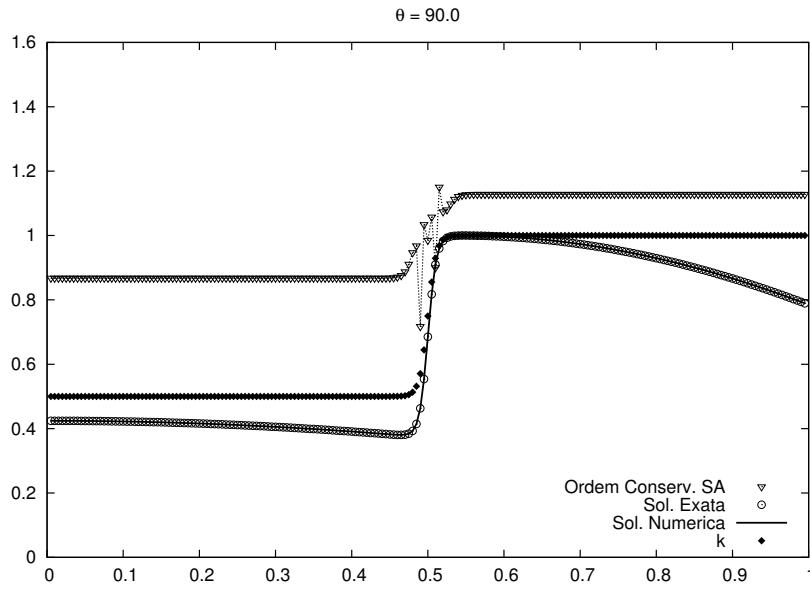


FIG. 7.159: Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 1. Quarta Ordem.

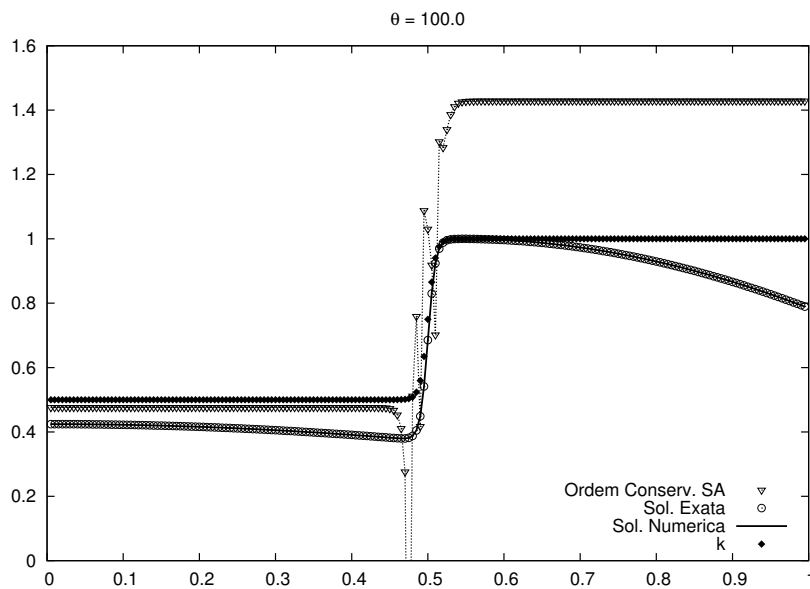


FIG. 7.160: Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 1. Quarta Ordem.

7.11 APÊNDICE 11: FORMULAÇÃO CONSERVATIVA DE VOLUMES FINITOS SA 4(3)

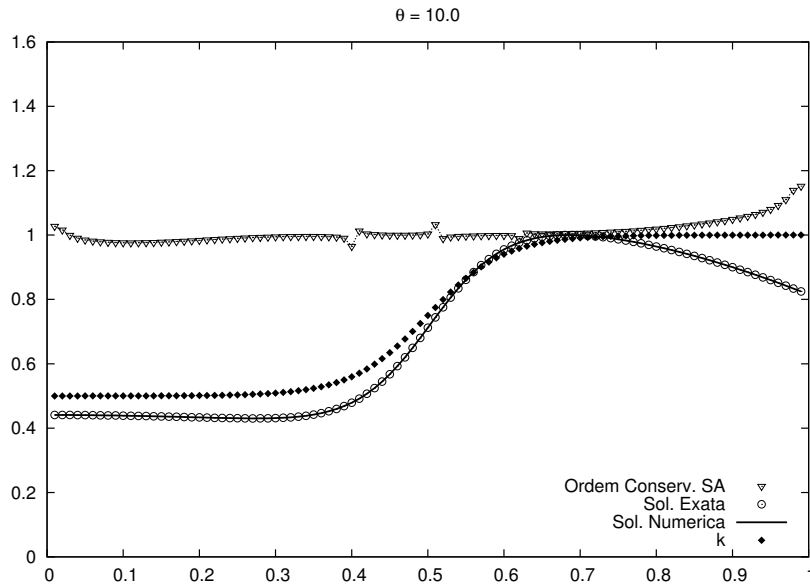


FIG. 7.161: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação modificada 2. Quarta Ordem.

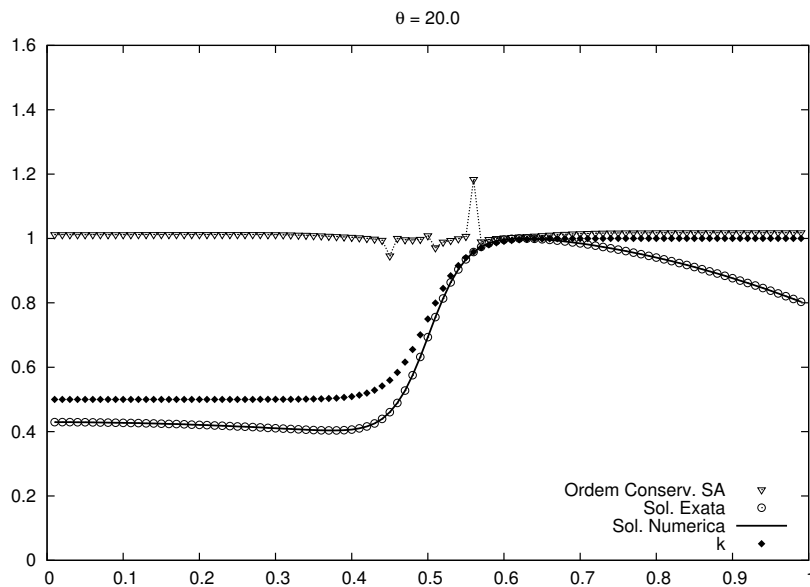


FIG. 7.162: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação modificada 2. Quarta Ordem.

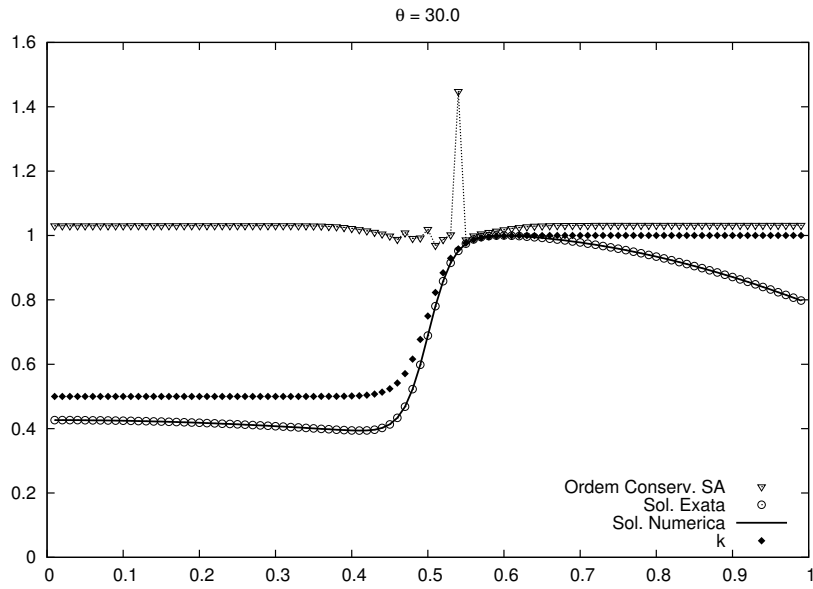


FIG. 7.163: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação modificada 2. Quarta Ordem.

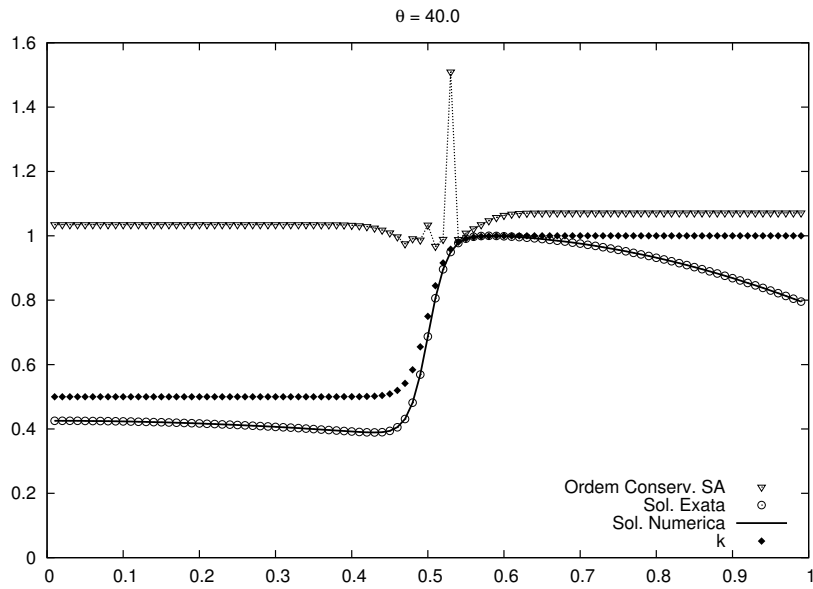


FIG. 7.164: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação modificada 2. Quarta Ordem.

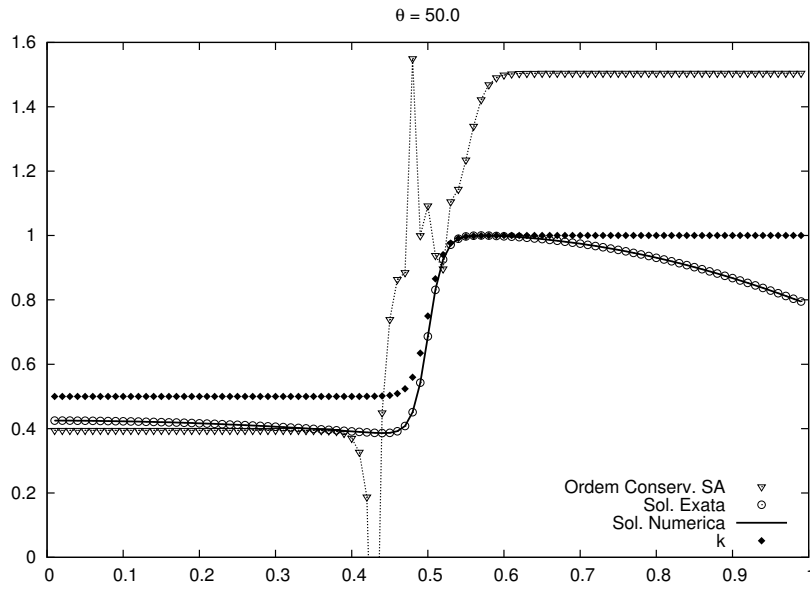


FIG. 7.165: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação modificada 2. Quarta Ordem.

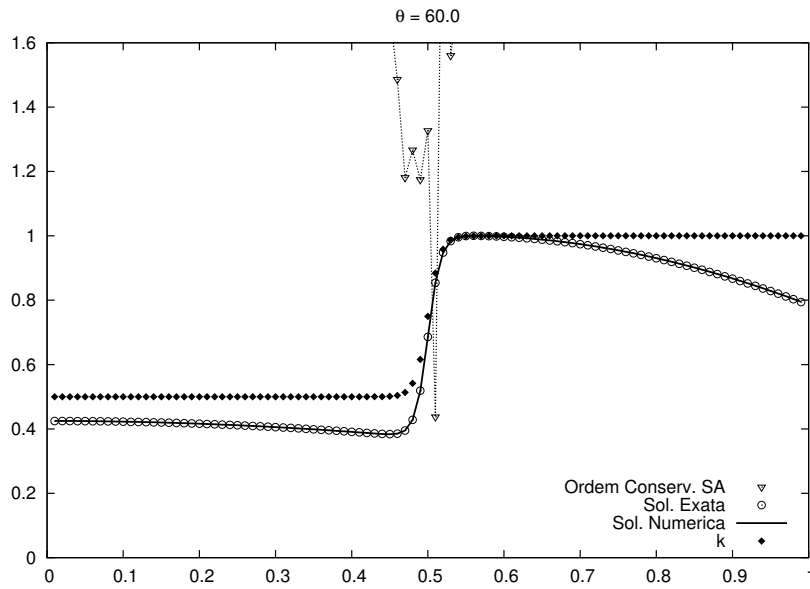


FIG. 7.166: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação modificada 2. Quarta Ordem.

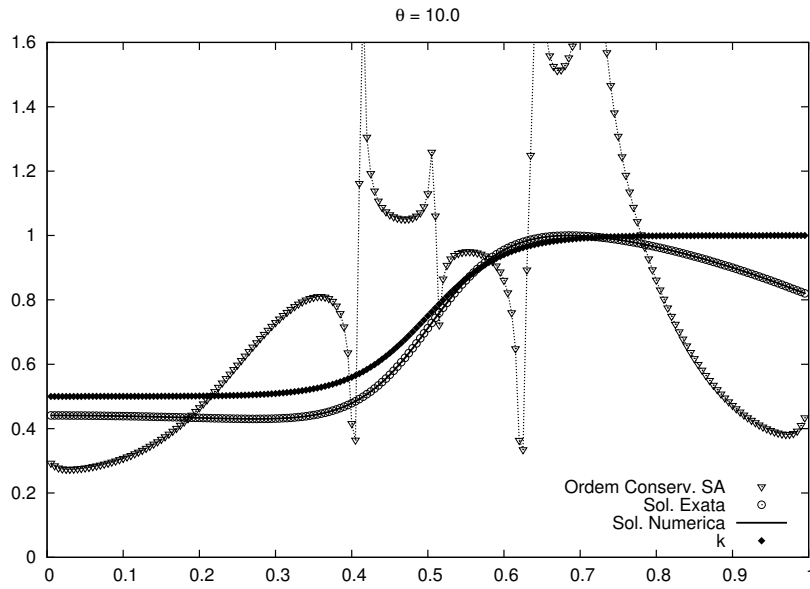


FIG. 7.167: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 2. Quarta Ordem.

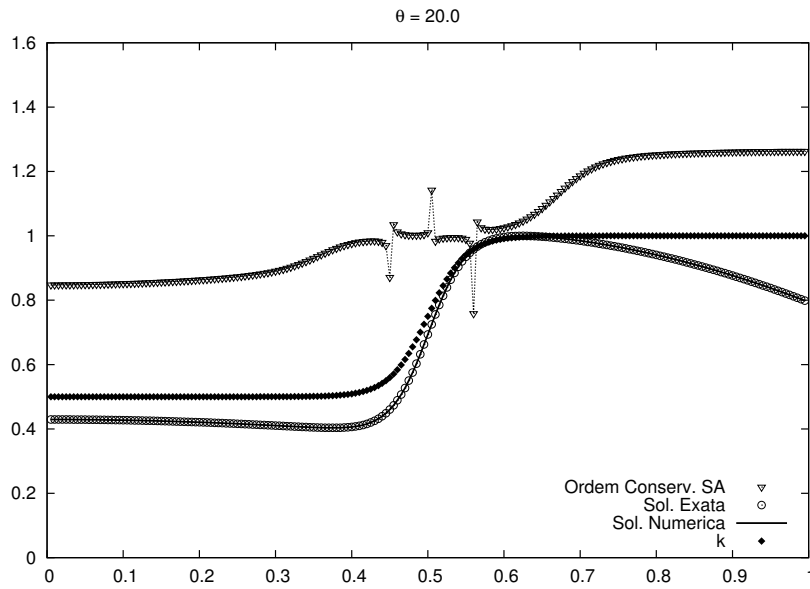


FIG. 7.168: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 2. Quarta Ordem.

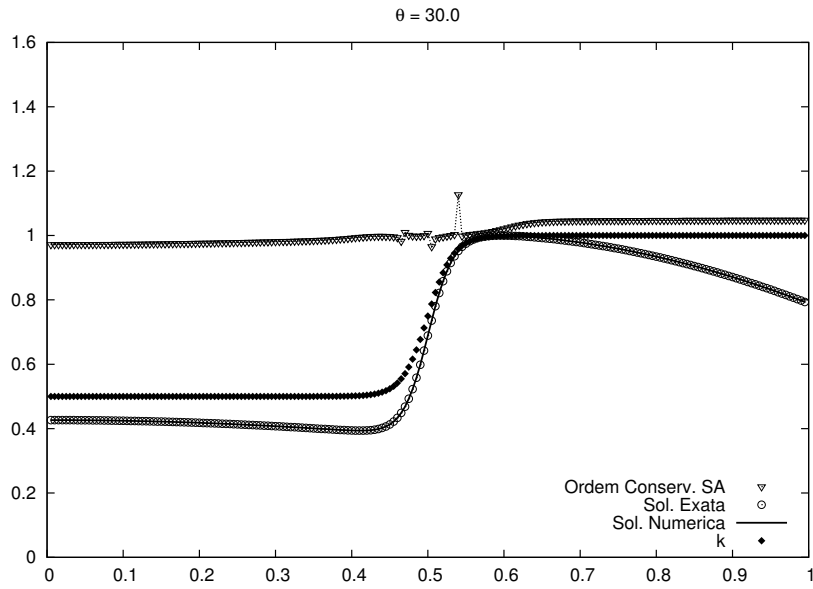


FIG. 7.169: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 2. Quarta Ordem.

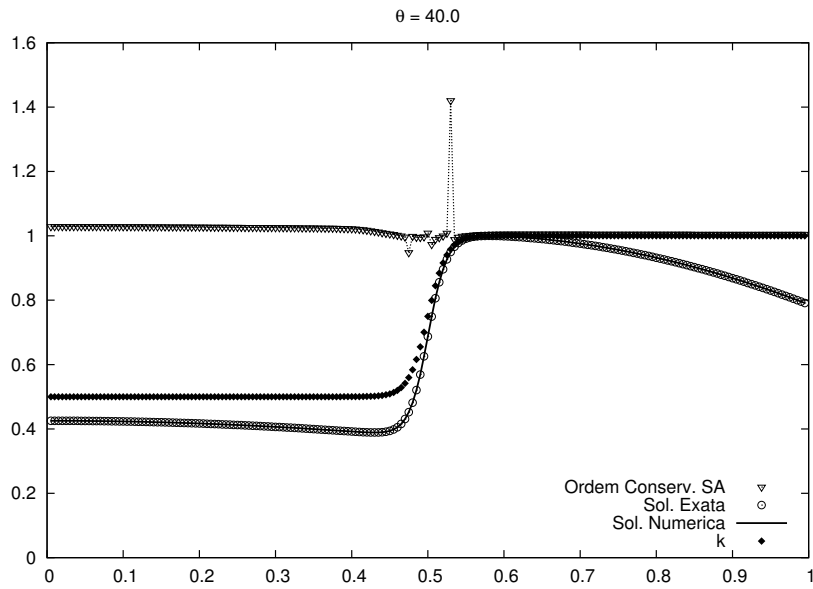


FIG. 7.170: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 2. Quarta Ordem.

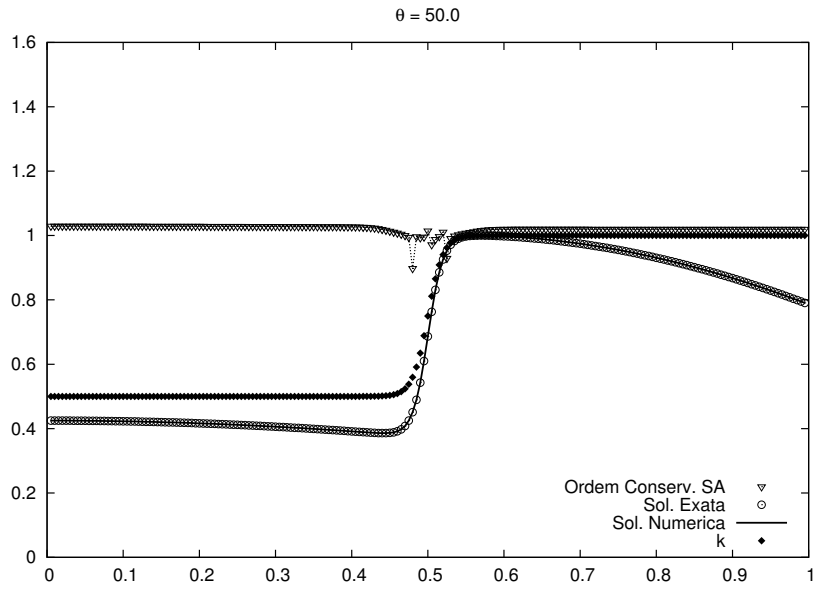


FIG. 7.171: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 2. Quarta Ordem.

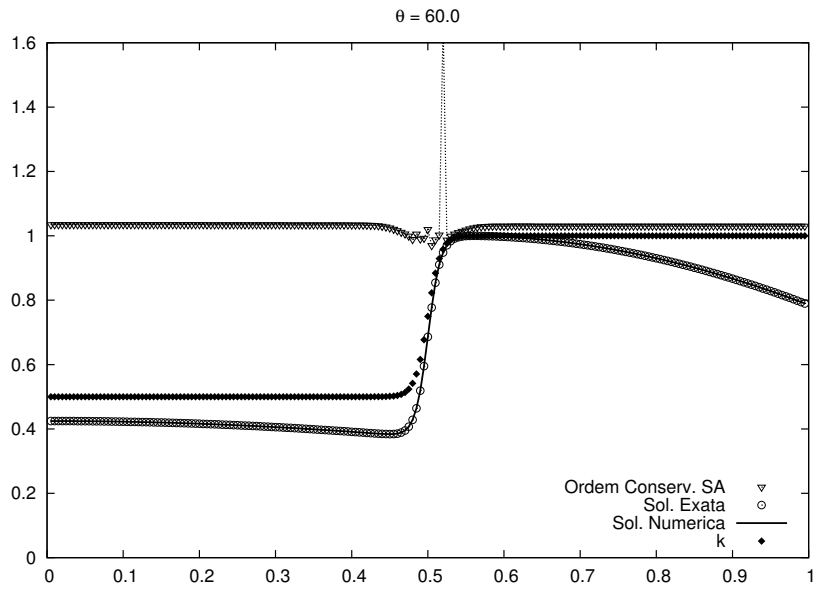


FIG. 7.172: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 2. Quarta Ordem.

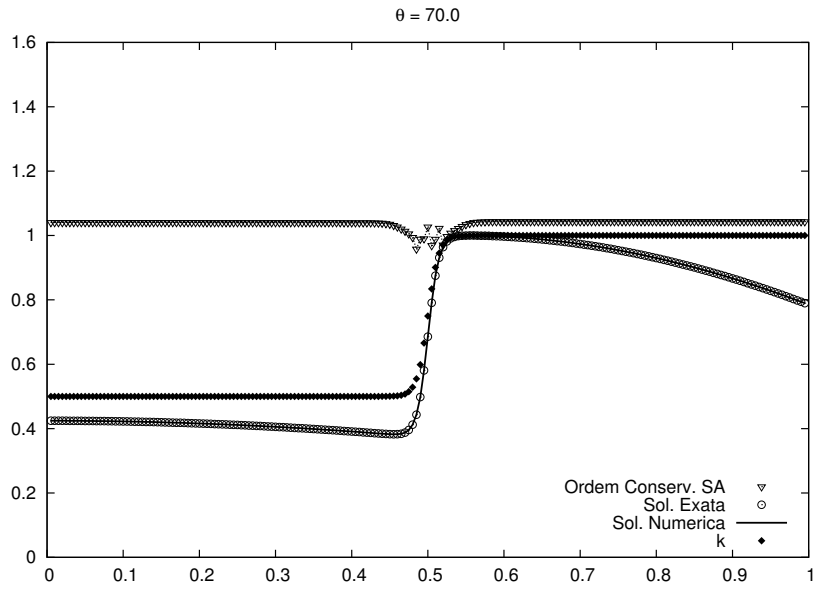


FIG. 7.173: Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 2. Quarta Ordem.

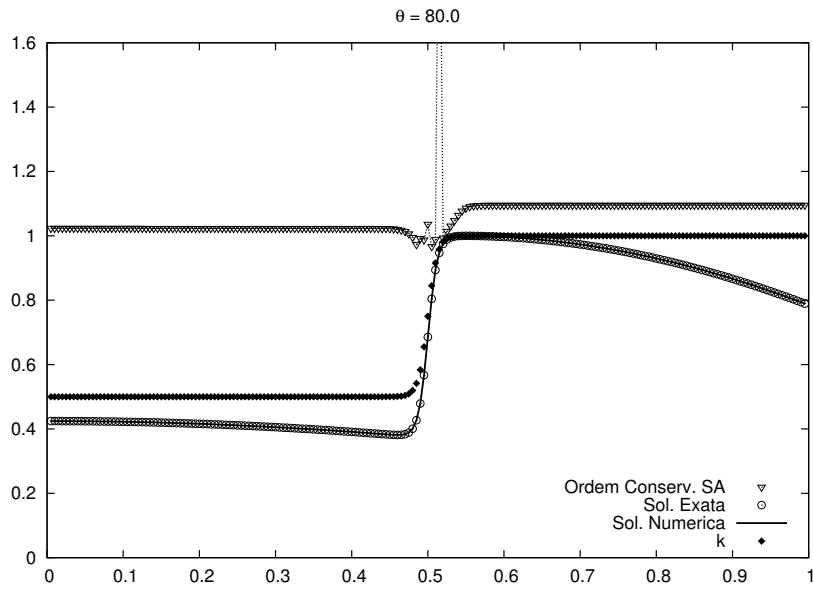


FIG. 7.174: Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 2. Quarta Ordem.

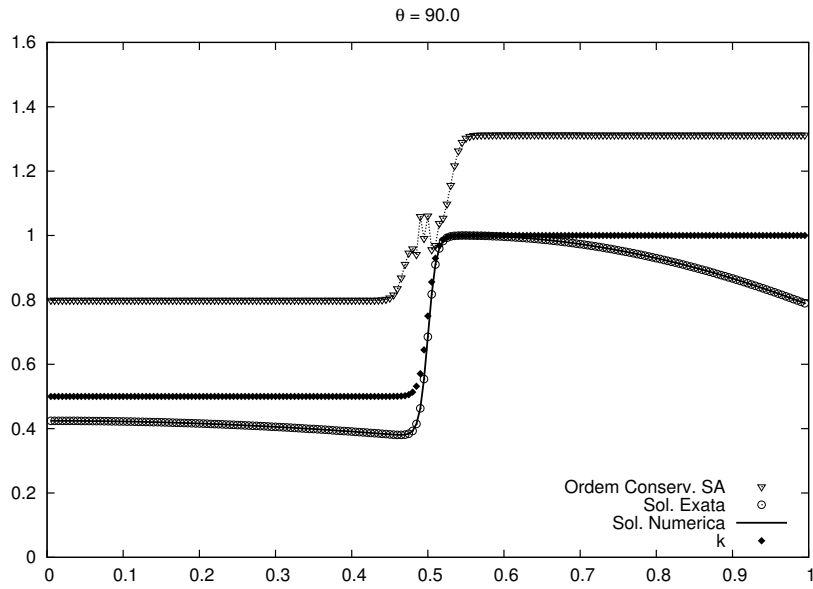


FIG. 7.175: Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 2. Quarta Ordem.

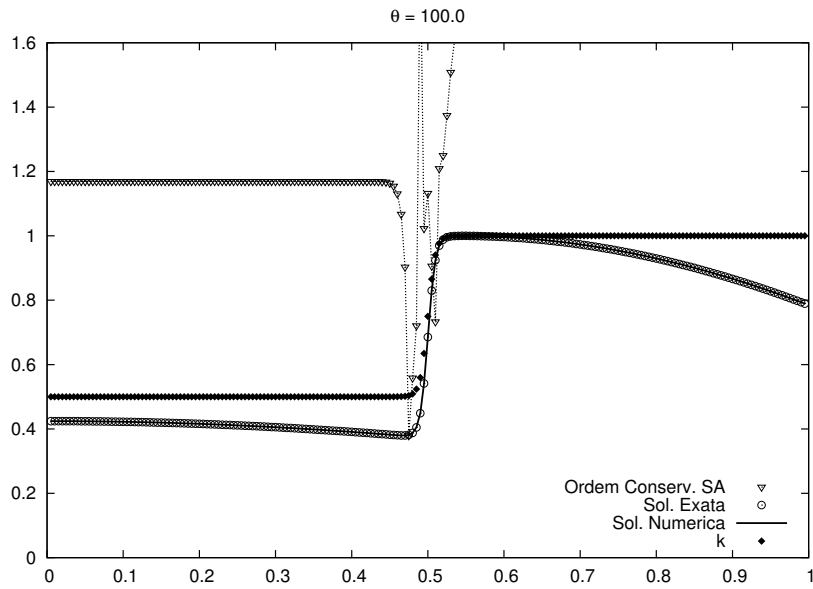


FIG. 7.176: Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 2. Quarta Ordem.

7.12 APÊNDICE 12: FORMULAÇÃO CONSERVATIVA DE VOLUMES FINITOS SA 4(4)

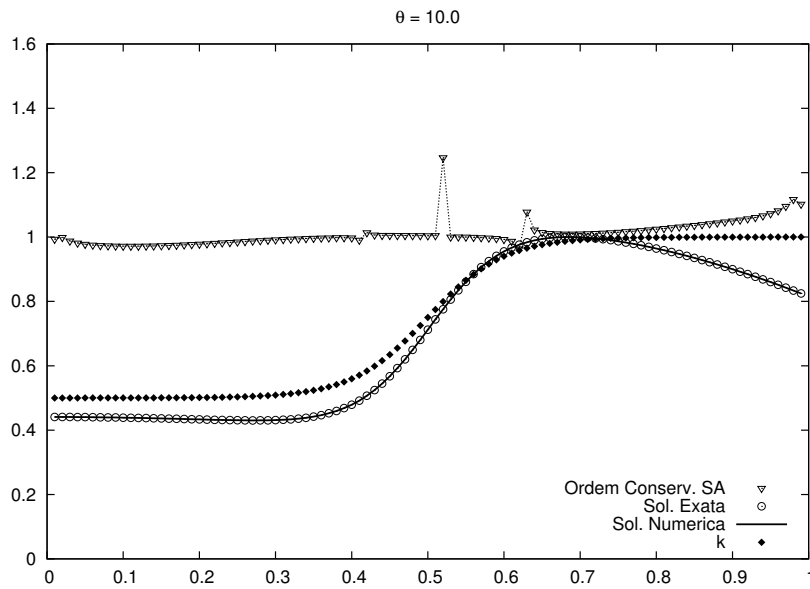


FIG. 7.177: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação modificada 3. Quarta Ordem.

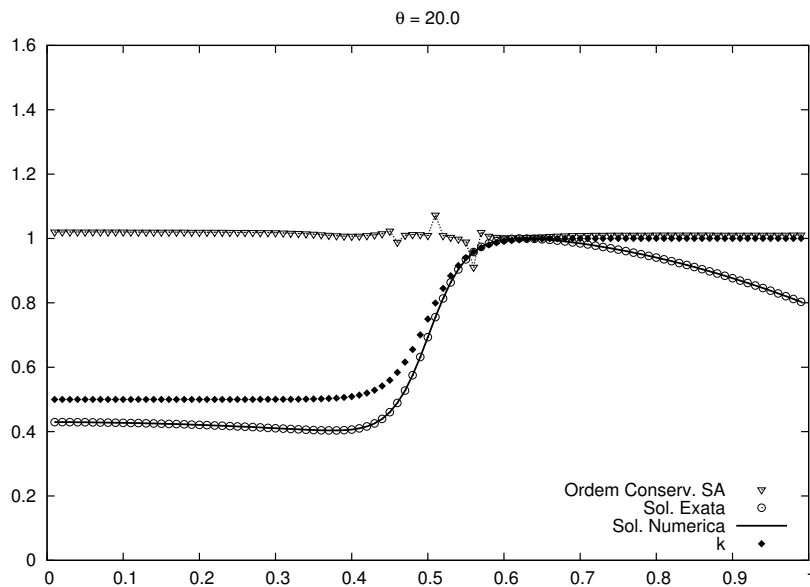


FIG. 7.178: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação modificada 3. Quarta Ordem.

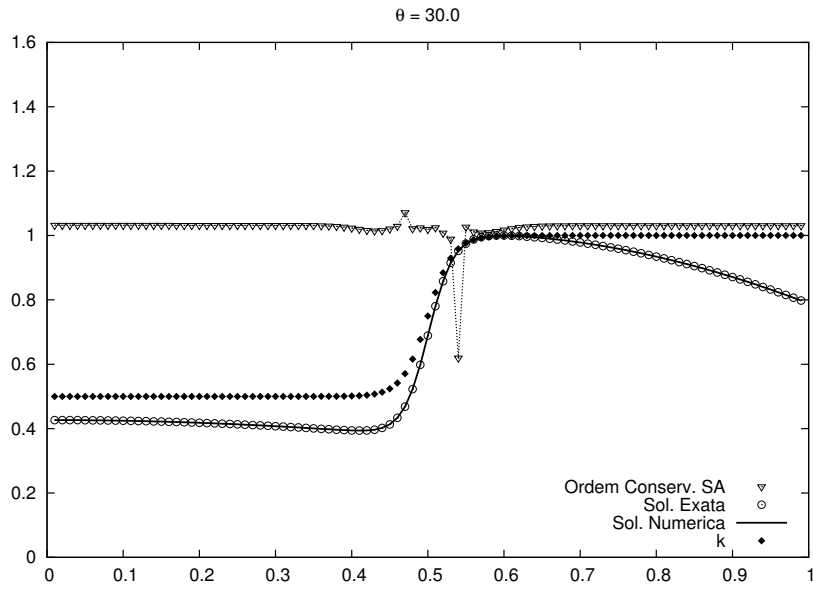


FIG. 7.179: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação modificada 3. Quarta Ordem.

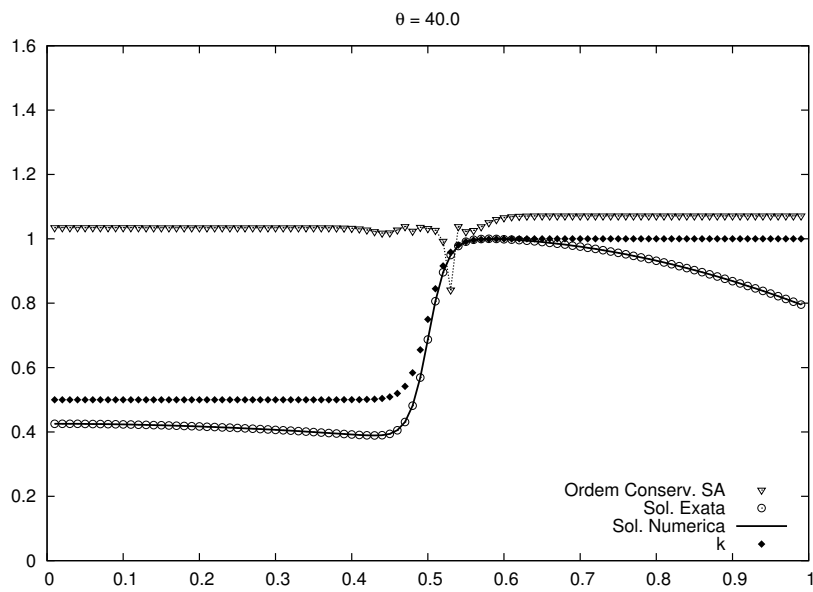


FIG. 7.180: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação modificada 3. Quarta Ordem.

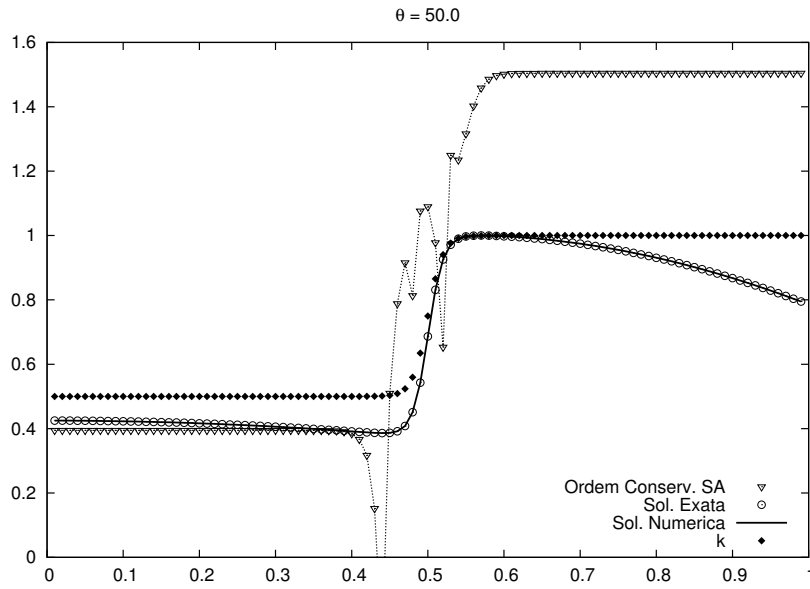


FIG. 7.181: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação modificada 3. Quarta Ordem.

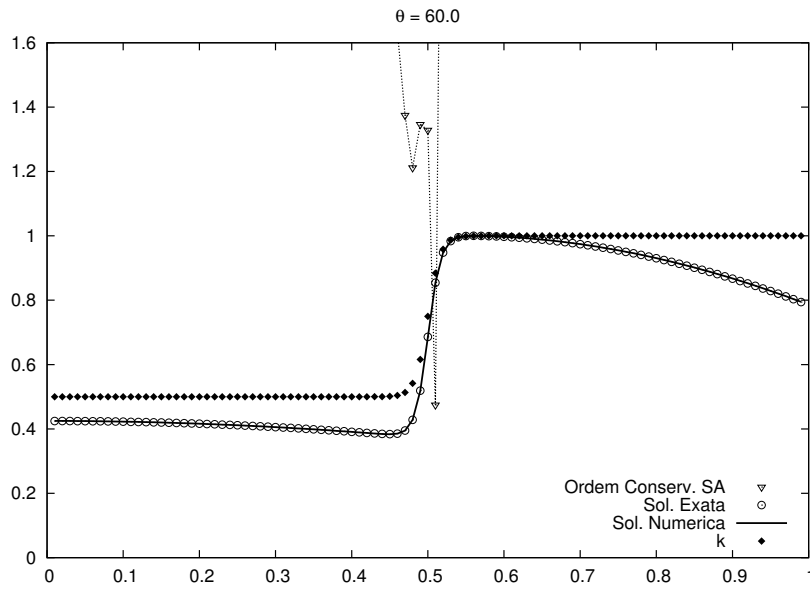


FIG. 7.182: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos. Formulação modificada 3. Quarta Ordem.

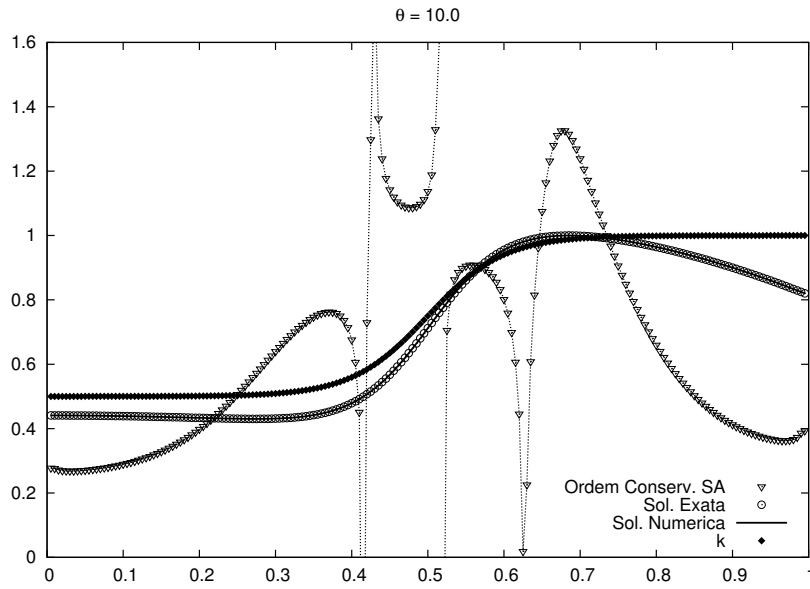


FIG. 7.183: Ordem numérica para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 3. Quarta Ordem.

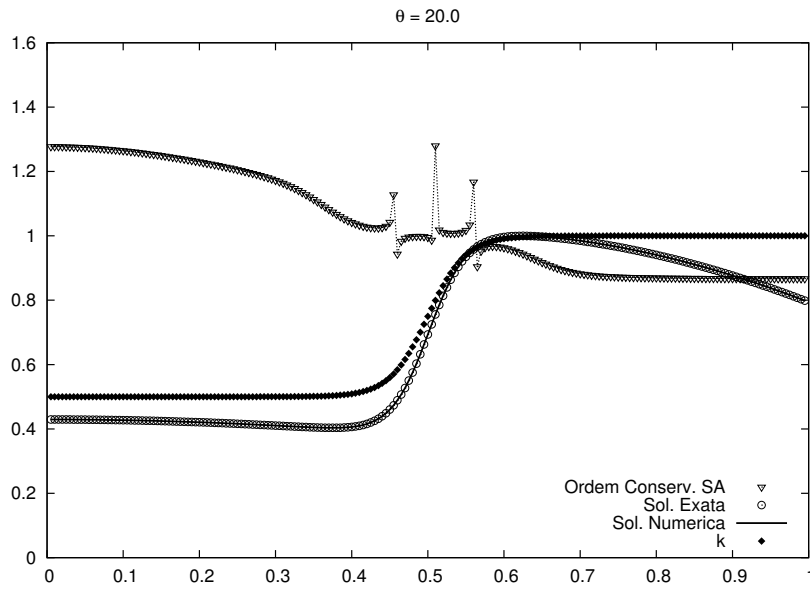


FIG. 7.184: Ordem numérica para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 3. Quarta Ordem.

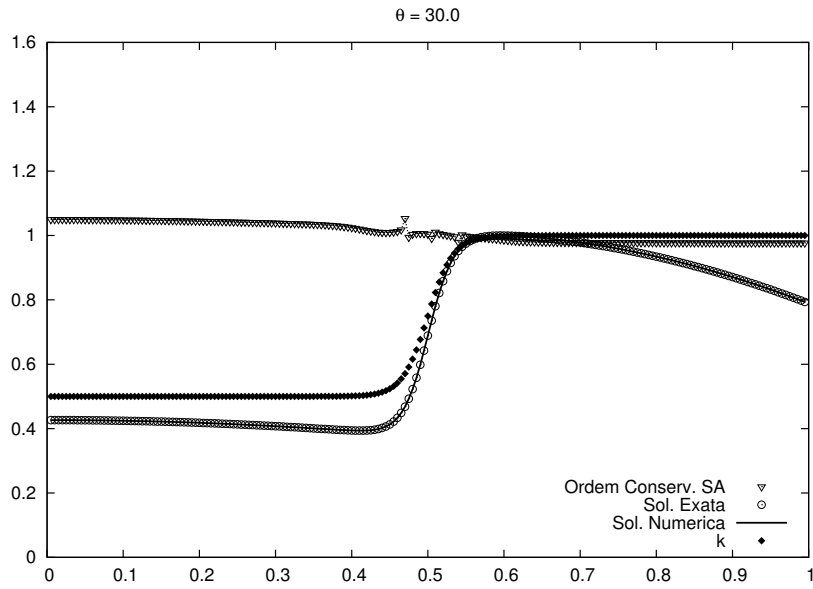


FIG. 7.185: Ordem numérica para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 3. Quarta Ordem.

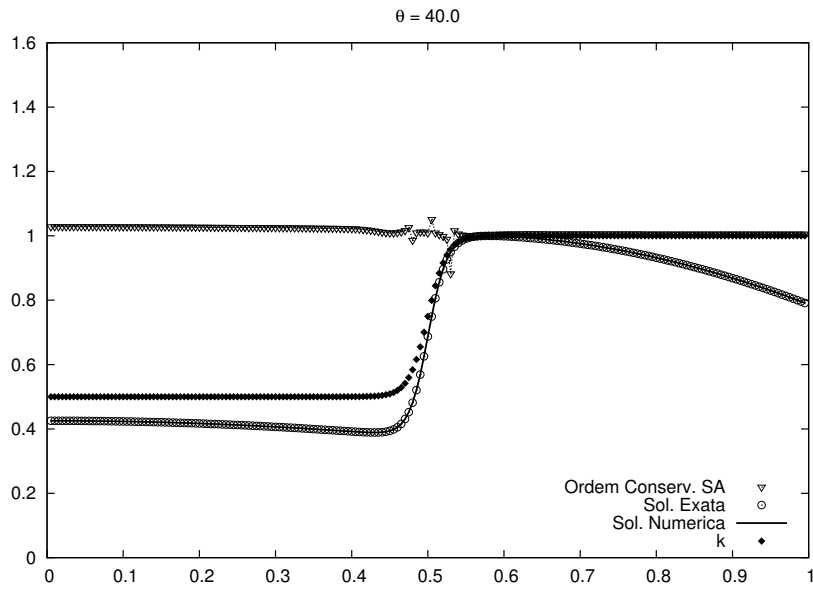


FIG. 7.186: Ordem numérica para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 3. Quarta Ordem.

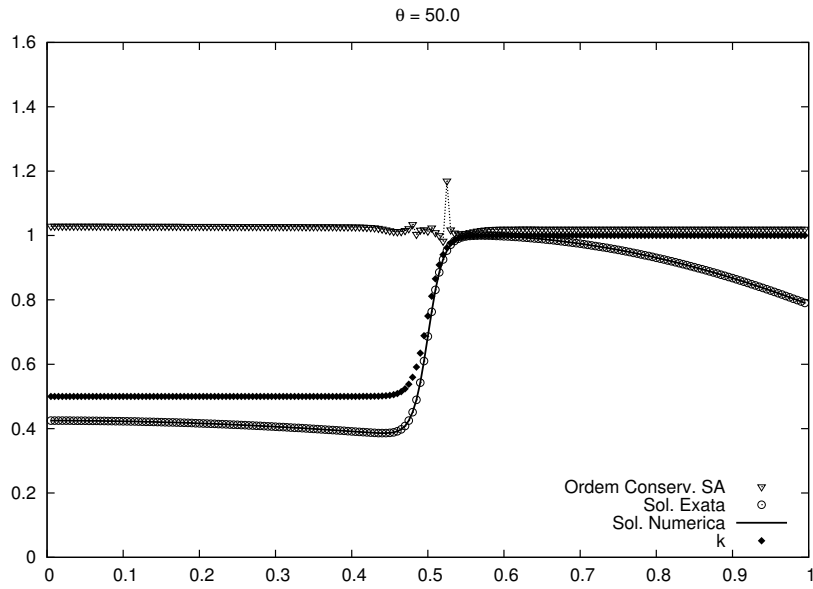


FIG. 7.187: Ordem numérica para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 3. Quarta Ordem.

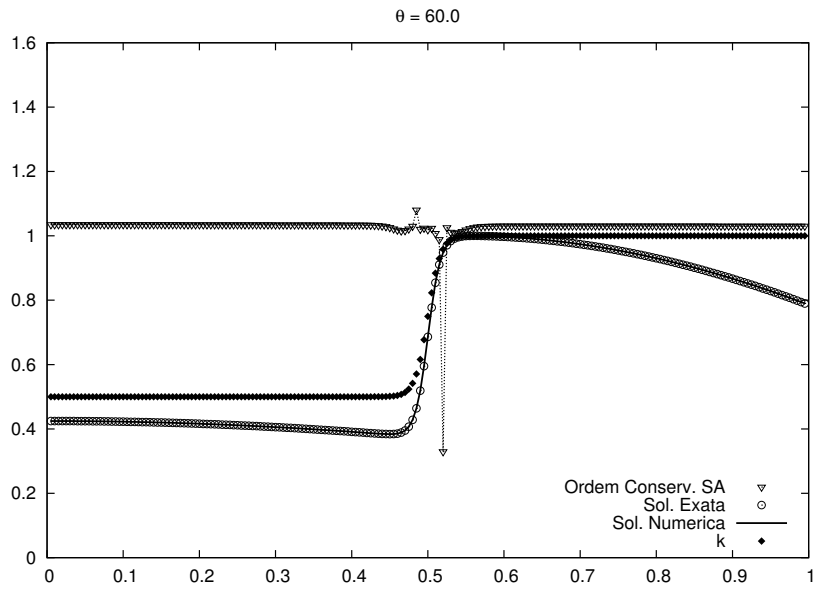


FIG. 7.188: Ordem numérica para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 3. Quarta Ordem.

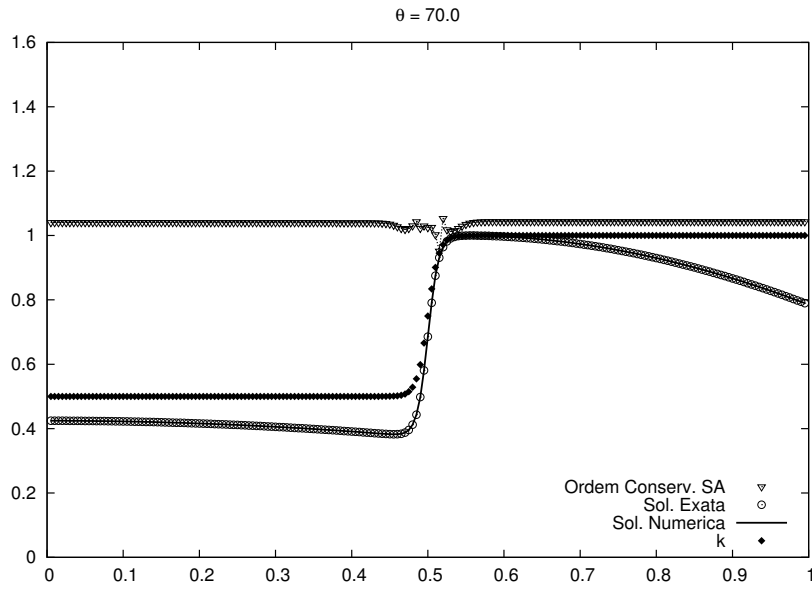


FIG. 7.189: Ordem numérica para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 3. Quarta Ordem.

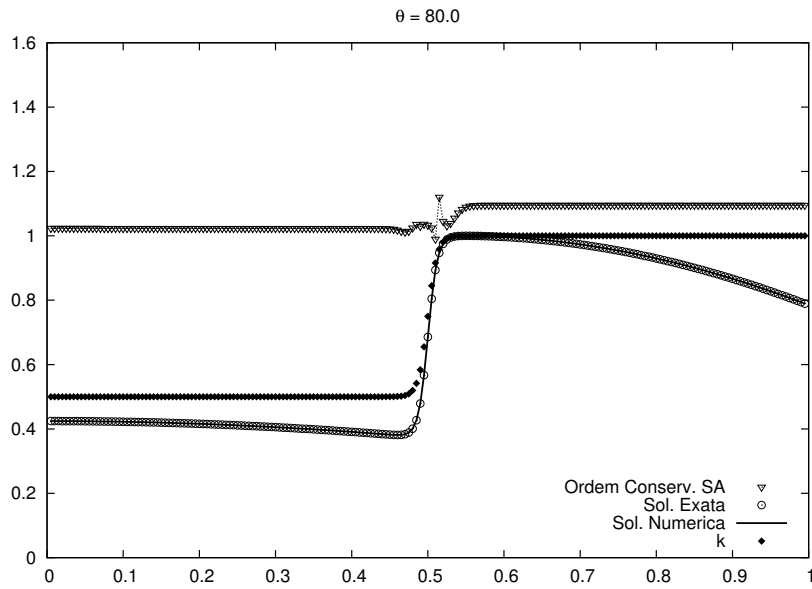


FIG. 7.190: Ordem numérica para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 3. Quarta Ordem.

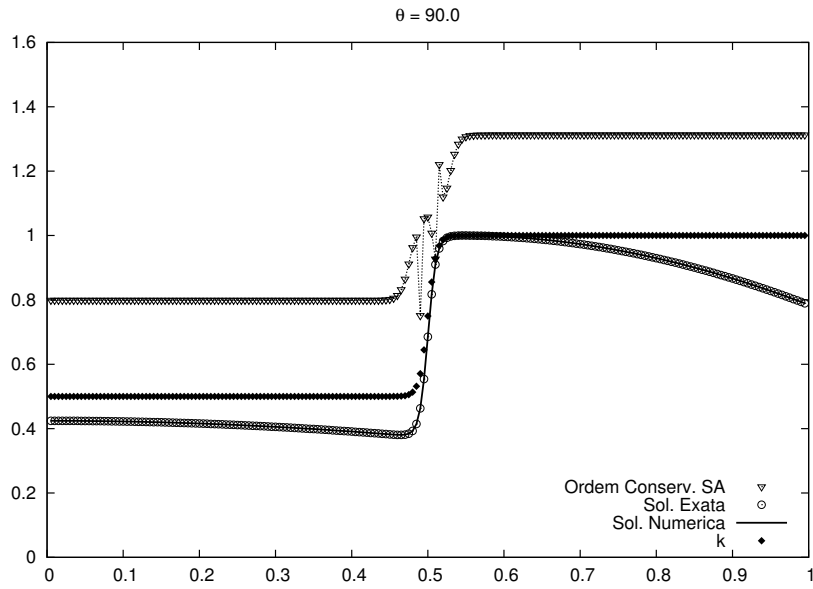


FIG. 7.191: Ordem numérica para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 3. Quarta Ordem.

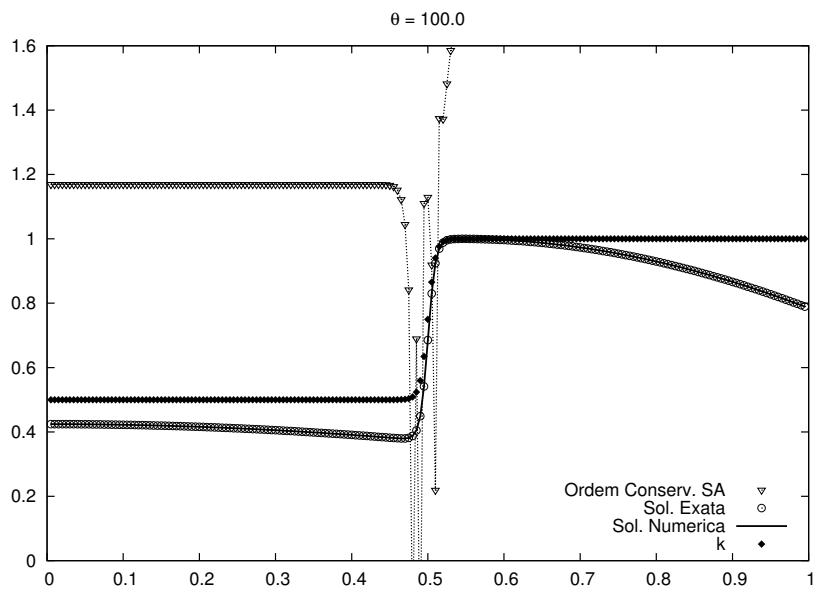


FIG. 7.192: Ordem numérica para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos. Formulação modificada 3. Quarta Ordem.

7.13 APÊNDICE 13: ERRO NUMÉRICO

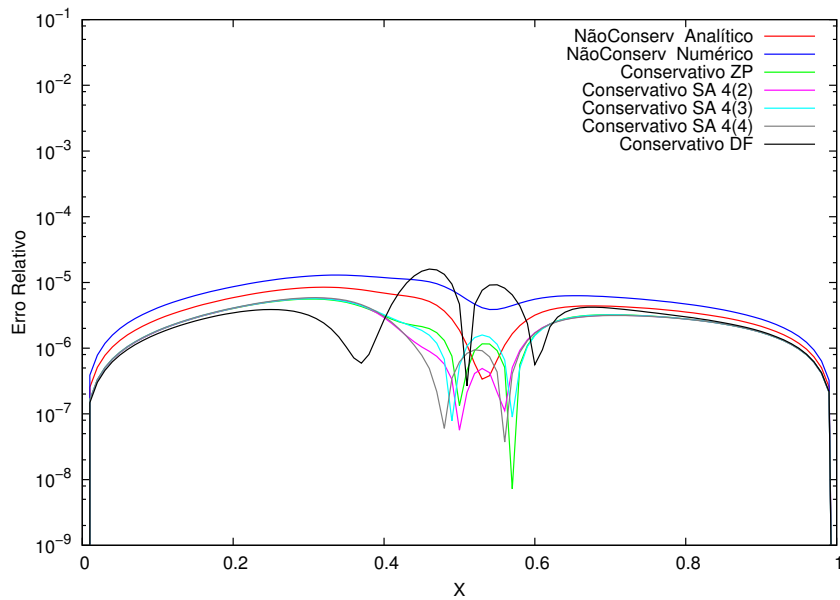


FIG. 7.193: Erro Relativo para $\theta = 10$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.

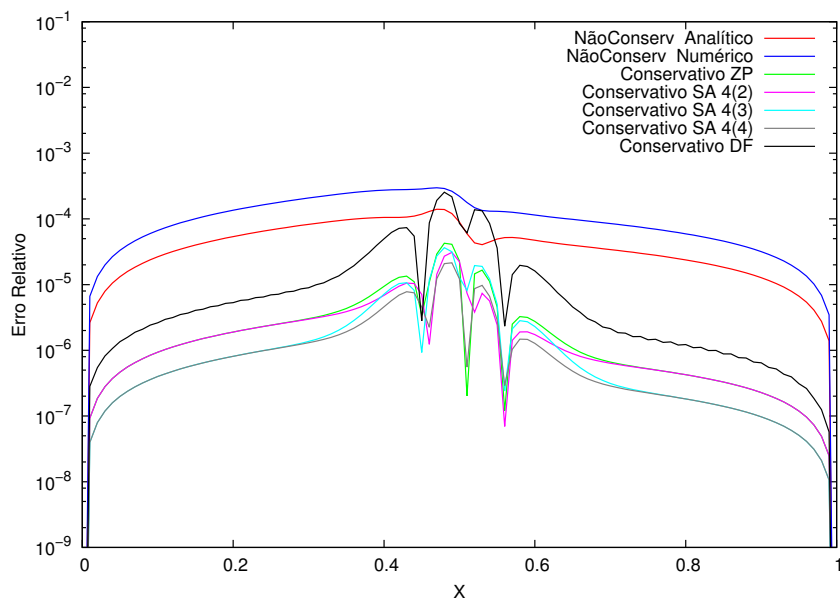


FIG. 7.194: Erro Relativo para $\theta = 20$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.

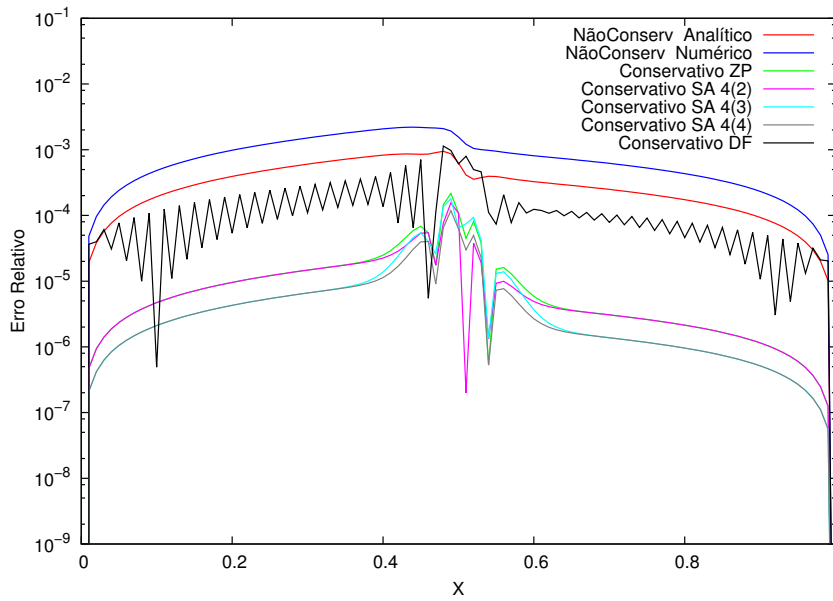


FIG. 7.195: Erro Relativo para $\theta = 30$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.

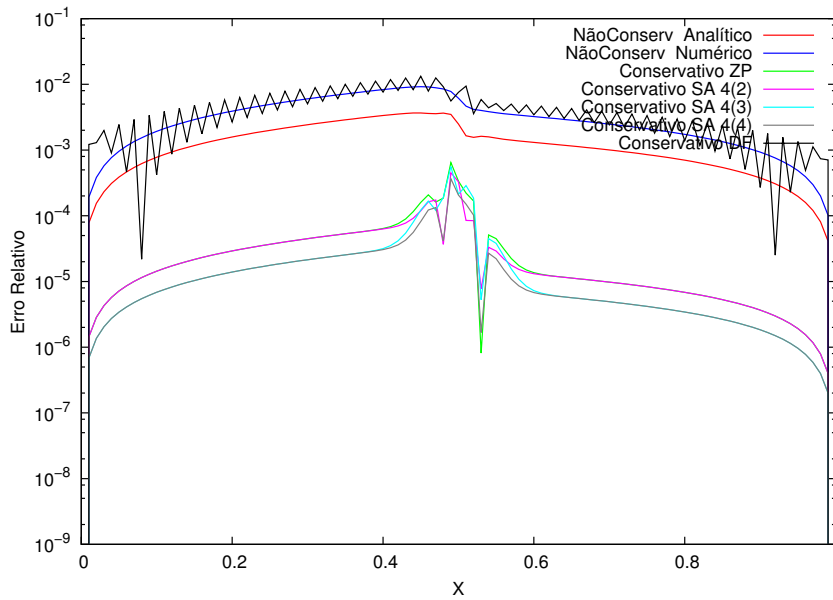


FIG. 7.196: Erro Relativo para $\theta = 40$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.

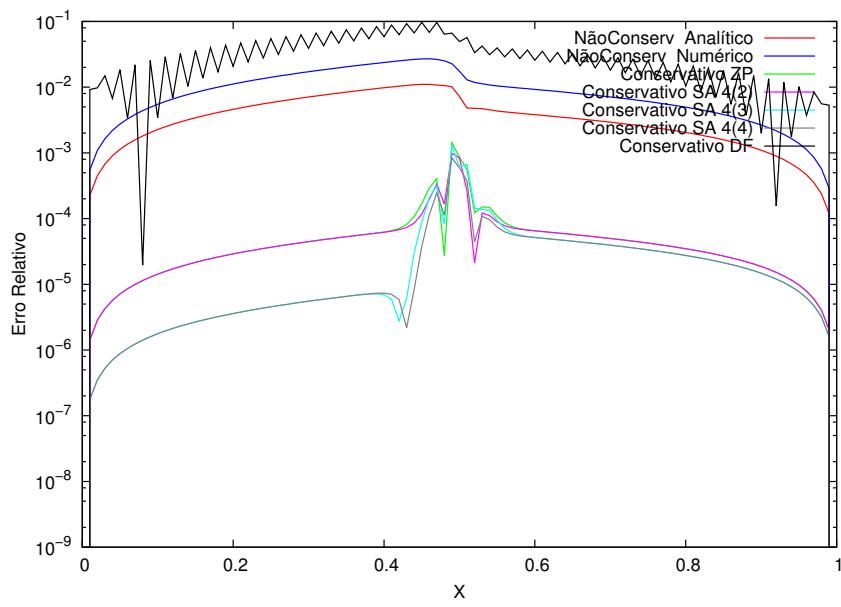


FIG. 7.197: Erro Relativo para $\theta = 50$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.

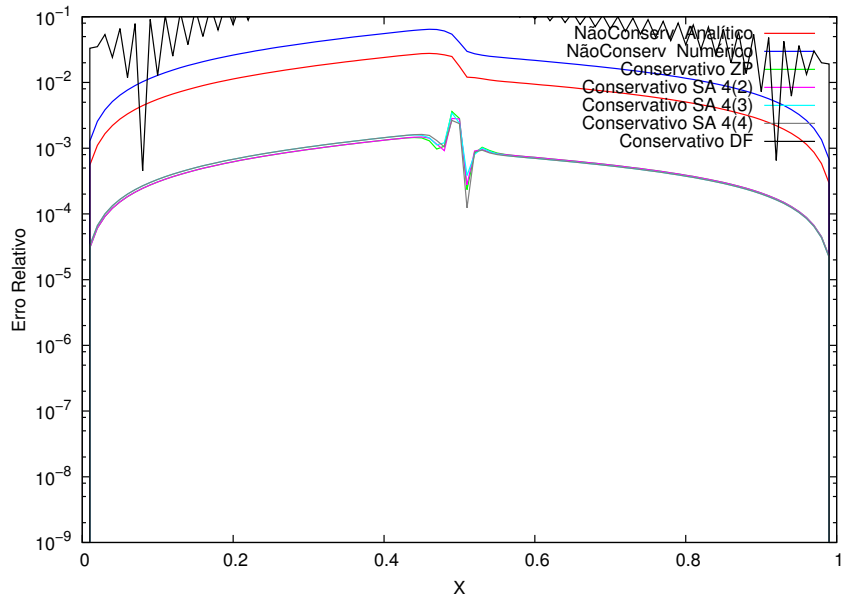


FIG. 7.198: Erro Relativo para $\theta = 60$ com malha de 101, 201 e 401 pontos.

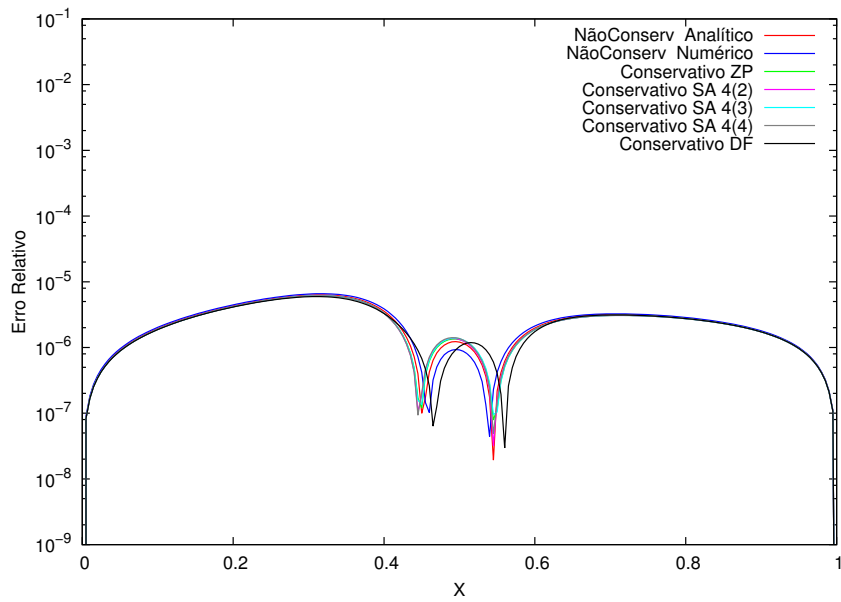


FIG. 7.199: Erro Relativo para $\theta = 10$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.

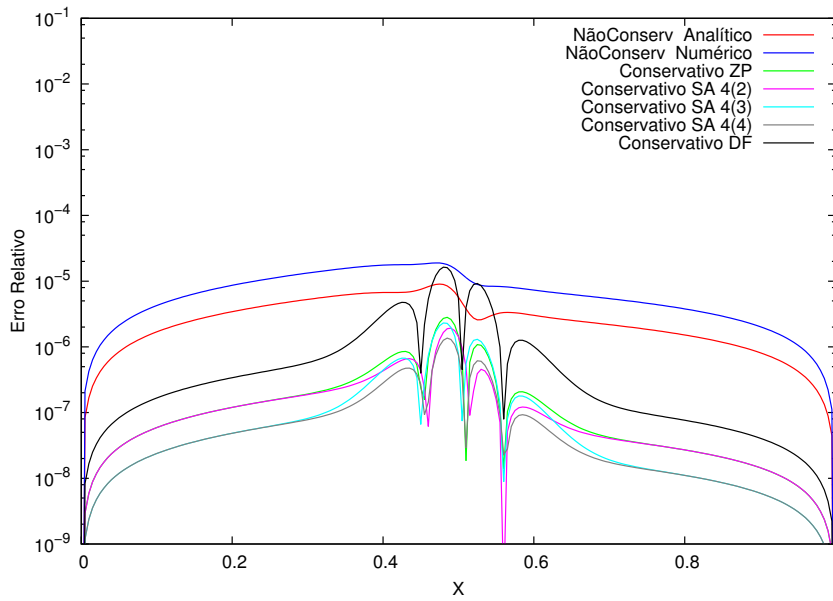


FIG. 7.200: Erro Relativo para $\theta = 20$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.

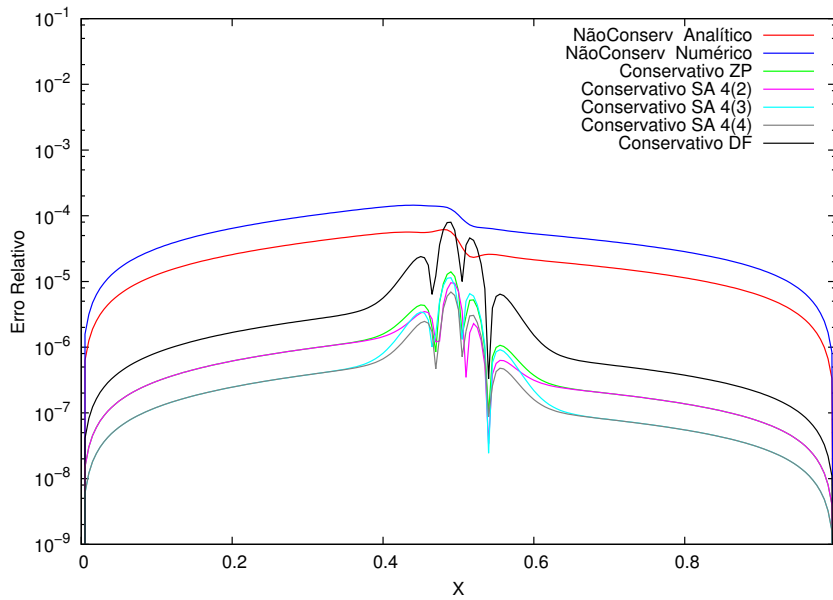


FIG. 7.201: Erro Relativo para $\theta = 30$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.

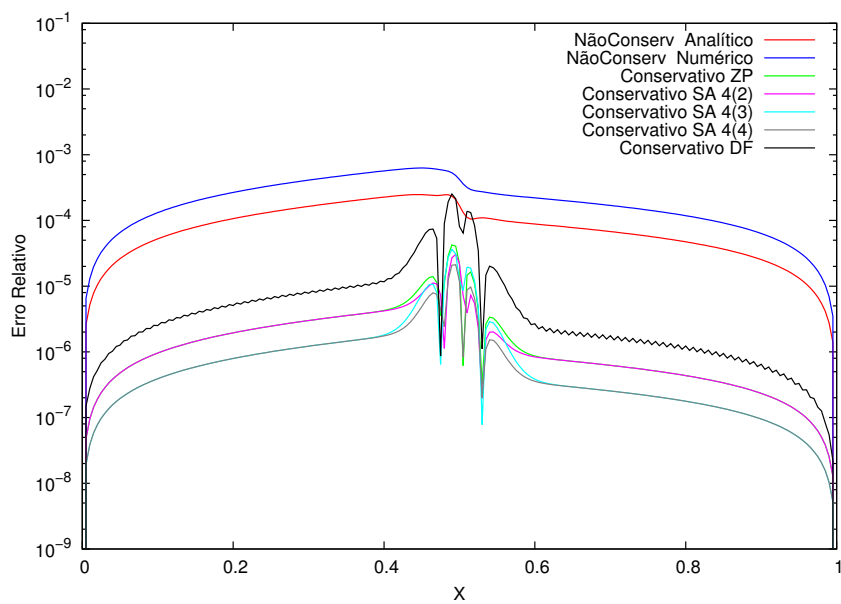


FIG. 7.202: Erro Relativo para $\theta = 40$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.

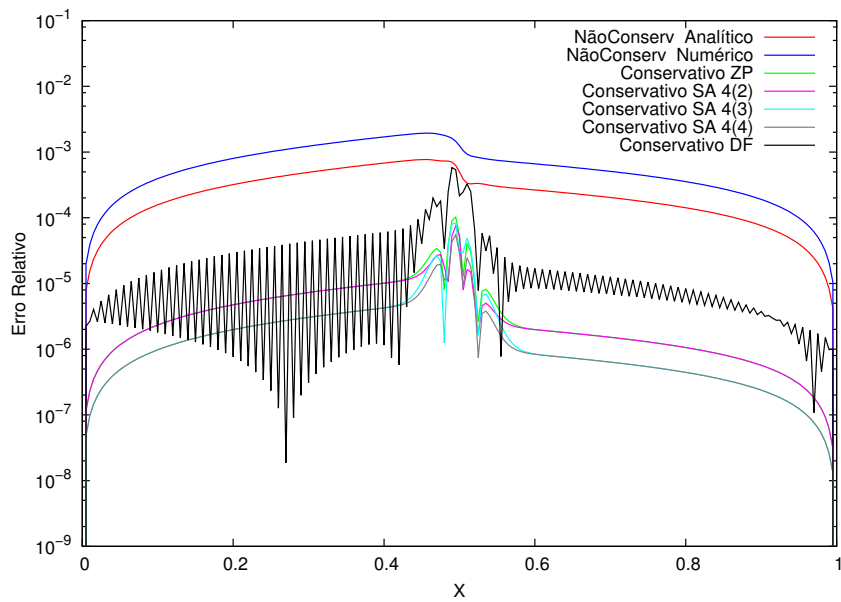


FIG. 7.203: Erro Relativo para $\theta = 50$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.

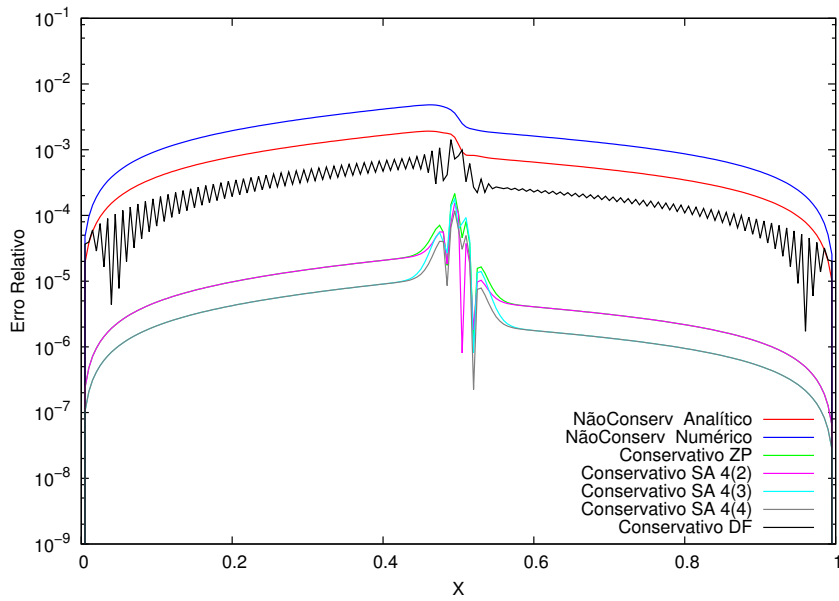


FIG. 7.204: Erro Relativo para $\theta = 60$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.

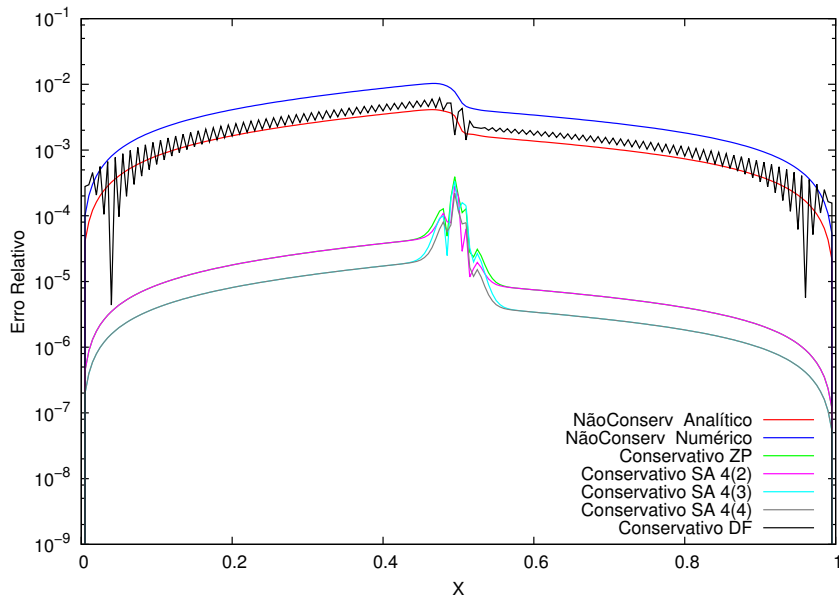


FIG. 7.205: Erro Relativo para $\theta = 70$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.

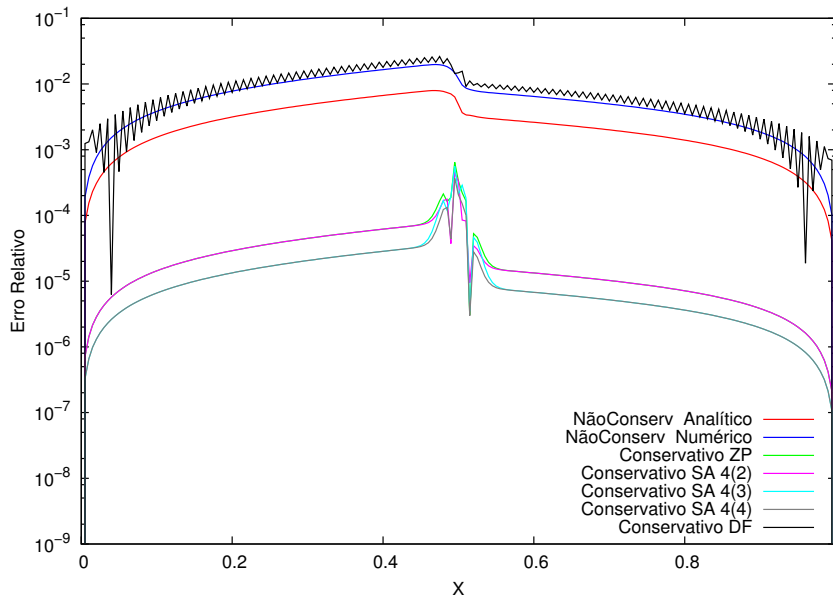


FIG. 7.206: Erro Relativo para $\theta = 80$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.

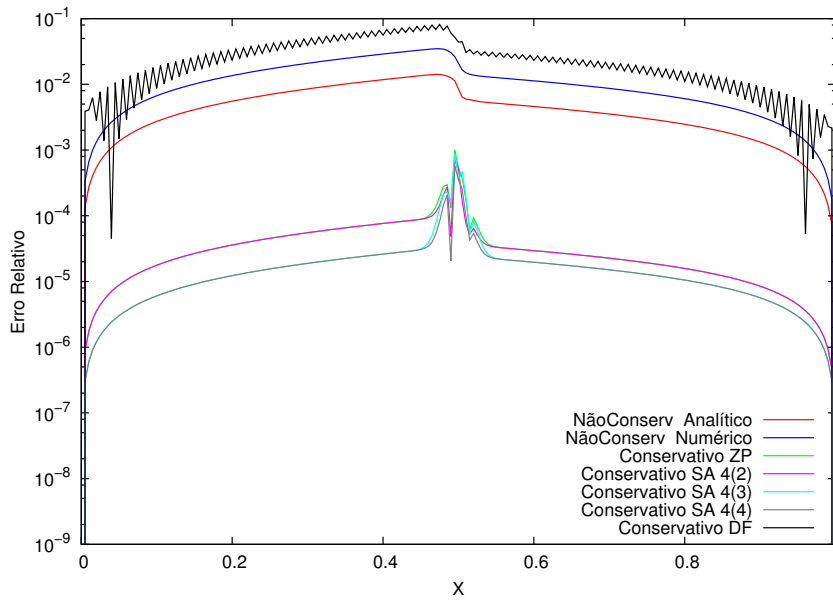


FIG. 7.207: Erro Relativo para $\theta = 90$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.

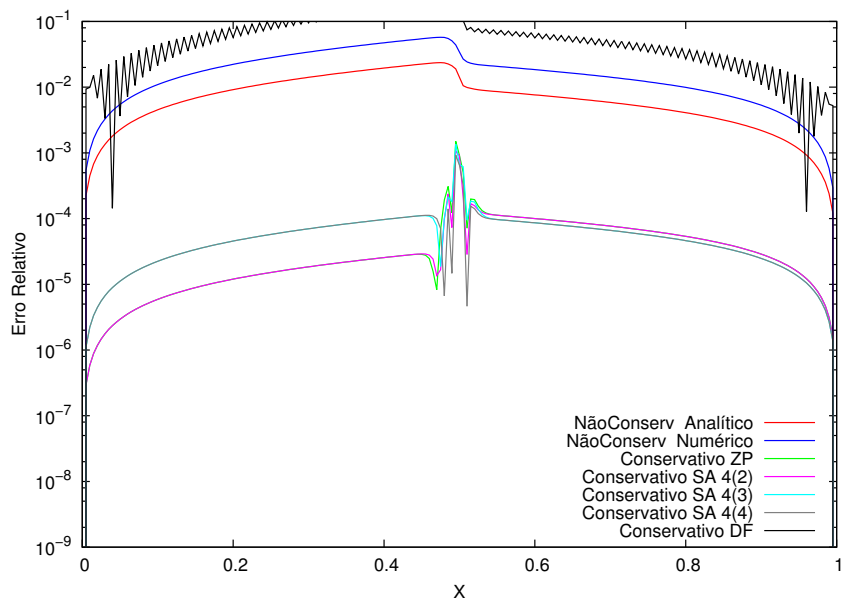


FIG. 7.208: Erro Relativo para $\theta = 100$ com malha de 201, 401 e 801 pontos.